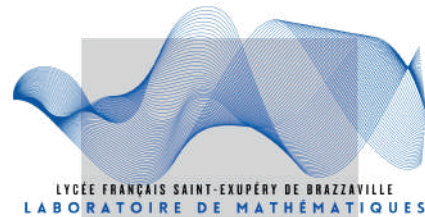




LYCÉE FRANÇAIS  
Saint  
Exupéry  
CONGO BRAZZAVILLE



LYCÉE FRANÇAIS SAINT-EXUPÉRY DE BRAZZAVILLE  
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES

# ANNALES 2023 MATHABRAZZA

TOUS LES SUJETS ET CORRIGÉS  
2012 - 2022



LYCÉE FRANÇAIS SAINT-EXUPÉRY DE BRAZZAVILLE



# MATHABRAZZA

Dans la présentation de la collection de livres " le monde est mathématiques", Étienne Ghys, mathématicien, directeur de recherche au CNRS et secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences affirme que les mathématiques sont partout autour de nous et que rien ne peut se comprendre sans elles.

Voilà pourquoi il nous apparaît indispensable de faire des mathématiques un objet de curiosité, un mécano que l'on construit et déconstruit, une grille de lecture du monde et de l'univers vus de l'intérieur et de l'extérieur.

Le laboratoire de mathématiques et d'informatique, inauguré en 2021 au LFSE par l'Ambassadeur de France au Congo, Monsieur François BARATEAU, sera le lieu dans lequel les chercheurs, les professeurs et aussi les élèves prendront du plaisir à explorer cet univers, sans peur et sans limite. Dictabrazza est un des moyens pour y arriver.

Édouard Herriot, agrégé de Lettres, pense que "la musique est une mathématique sonore, la mathématique une musique silencieuse." Alors, à vos instruments !!!

Paul DORVILLE

Proviseur du Lycée Français Saint-Exupéry de Brazzaville

---

Consulter l'intégralité des annales mathabrazza sur le site de l'établissement en cliquant sur l'onglet "pédagogie innovante".



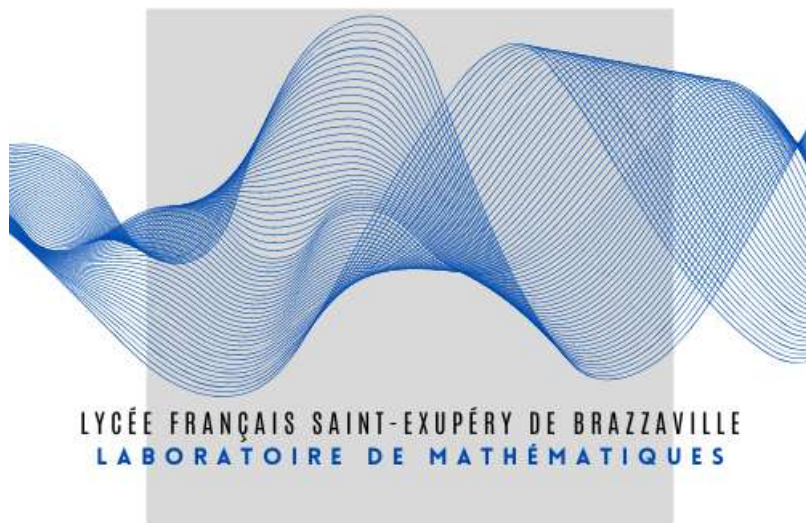
[www.lycee-saintexbrazza.org](http://www.lycee-saintexbrazza.org)



Avenue de l'OUA, BP 31 Brazzaville, République du Congo



[v.berlin@lycee-saintexbrazza.org](mailto:v.berlin@lycee-saintexbrazza.org)



**Sous la direction de**

**Paul DORVILLE**

Proviseur

Lycée Français Saint Exupéry

République du Congo

**Valérien EBERLIN**

Coordonnateur de mathématiques

Coordonnateur du laboratoire de mathématiques

Lycée Français Saint Exupéry

République du Congo

**Auteur des sujets**

Rallye Mathématiques du Centre

Académie d'Orléans

**Pierrick BIDEAU-SORITA** (Responsable)

## LISTE DES ÉTABLISSEMENTS PARTICIPANTS MATHABRAZZA 2023

### CSC MARIE IMMACULÉE

Chef d'établissement : Mme. Josette GAMBA  
Réfèrent Mathabrazza : Almath Guivih VILA

### E.M.P.G.L

Directeur des études : Raoul NGASSAKI  
Réfèrent Mathabrazza : Kalman MOUANDZA

### LYCÉE A. A. NETO B

Chef d'établissement : Chrisostom EPAMA  
Réfèrent Mathabrazza : Grevelin A. KIHOUARI

### LYCÉE CHAMINADE

Chef d'établissement : Fernand BOUKA  
Réfèrent Mathabrazza : Guy Richard MPIKA

### LYCÉE DE LA RÉVOLUTION

Chef d'établissement : Firmin MOUNGALA  
Réfèrent Mathabrazza : Espoir J. MEMOUGANE

### LYCÉE FRANCAIS RENÉ DESCARTES (RDC)

Chef d'établissement : Nicolas SIEGER  
Réfèrent Mathabrazza : Damien BELLEMER

### LYCÉE LUMUMBA

Chef d'établissement : Arthur MOUKOKO  
Réfèrent Mathabrazza : Damien Dublin P. MABANZA

### LYCÉE SAINT ALPHONSO

Chef d'établissement : Emmanuel NDINGA  
Réfèrent Mathabrazza : Roselin B. ONGILI DZEKE

### LYCÉE SAVORGNAN DE BRAZZA B

Chef d'établissement : Gildas MOUEGNI KIPOUTOU  
Réfèrent Mathabrazza : Bienvenu R. BASSILOUA

### LYCÉE THOMAS SANKARA B

Chef d'établissement : Jean Philippe MAKAYA  
Réfèrent Mathabrazza : Teddy Fiacre MOBEMOUANA  
MONKESSA

### G.C. DOM HELDER CAMARA

Chef d'établissement : Jean Paul MAMPOUYA  
Réfèrent Mathabrazza : Jean MABIALA

### LYCÉE DE NGANGA LINGOLO

Chef d'établissement : Jean Nicaise KODIA  
Réfèrent Mathabrazza : Almath Guivih VILA

### LYCÉE A. A. NETO A

Chef d'établissement : John Rollin EBATTA  
Réfèrent Mathabrazza : Roselin B. ONGILI DZEKE  
Réfèrent Mathabrazza : Sorel Ellion ETHOUT

### LYCÉE AUGAGNEUR (Pointe-Noire)

Chef d'établissement : Nicolas MAKAYA  
Réfèrent Mathabrazza : NADEGE MOUTOU

### LYCÉE DE KINTÉLÉ

Chef d'établissement : Damas BOUAKO  
Réfèrent Mathabrazza : Bienfait P. GANGANY MBAN

### LYCÉE FRANCAIS CHARLEMAGNE (Pointe-Noire)

Chef d'établissement : Patrice HANNE  
Réfèrent Mathabrazza : Cédric PROST

### LYCÉE FRANCAIS SAINT EXUPÉRY

Chef d'établissement : Paul DORVILLE  
Réfèrent Mathabrazza : Pierre NSOUMBOU

### LYCÉE NGANGA EDOUARD

Chef d'établissement : Edmond Jovin ITOUA  
Réfèrent Mathabrazza : Antoine M'VOUENDÉ

### LYCÉE SAVORGNAN DE BRAZZA A

Chef d'établissement : Cherubin BALANDAMIO  
Réfèrent Mathabrazza : Frédéric NTADI DIAMBOMBA

### LYCÉE THOMAS SANKARA A

Chef d'établissement : Ange MBEMDE  
Réfèrent Mathabrazza : Yannick ETOU

### COMPLEXE SCOLAIRE SAINT LUC MARISA

Chef d'établissement : Fernand OWONDA  
Réfèrent Mathabrazza : Wolfen Hershey MADZOU

# SOMMAIRE

- **Mathabrazza 2012**
  - Épreuve préparatoire ..... page 9
  - Épreuve officielle ..... page 12
  - Éléments de correction de l'épreuve préparatoire ..... page 70
  - Éléments de correction de l'épreuve officielle ..... page 75
- **Mathabrazza 2013**
  - Épreuve préparatoire ..... page 15
  - Épreuve officielle ..... page 18
  - Éléments de correction de l'épreuve préparatoire ..... page 82
  - Éléments de correction de l'épreuve officielle ..... page 87
- **Mathabrazza 2014**
  - Épreuve préparatoire ..... page 21
  - Épreuve officielle ..... page 24
  - Éléments de correction de l'épreuve préparatoire ..... page 92
  - Éléments de correction de l'épreuve officielle ..... page 97
- **Mathabrazza 2015**
  - Épreuve préparatoire ..... page 27
  - Épreuve officielle ..... page 31
  - Éléments de correction de l'épreuve préparatoire ..... page 101
  - Éléments de correction de l'épreuve officielle ..... page 107
- **Mathabrazza 2016**
  - Épreuve préparatoire ..... page 34
  - Épreuve officielle ..... page 37
  - Éléments de correction de l'épreuve préparatoire ..... page 112
  - Éléments de correction de l'épreuve officielle ..... page 115
- **Mathabrazza 2017**
  - Épreuve préparatoire ..... page 40
  - Épreuve officielle ..... page 43
  - Éléments de correction de l'épreuve préparatoire ..... page 119
  - Éléments de correction de l'épreuve officielle ..... page 124
- **Mathabrazza 2018**
  - Épreuve préparatoire ..... page 45
  - Épreuve officielle ..... page 47
  - Éléments de correction de l'épreuve préparatoire ..... page 130
  - Éléments de correction de l'épreuve officielle ..... page 135

- **Mathabrazza 2019**
  - Épreuve préparatoire ..... page 49
  - Épreuve officielle ..... page 51
  - Éléments de correction de l'épreuve préparatoire ..... page 143
  - Éléments de correction de l'épreuve officielle ..... page 148
- **Mathabrazza 2020**
  - Épreuve préparatoire ..... page 53
  - Épreuve officielle ..... page 56
  - Éléments de correction de l'épreuve préparatoire ..... page 155
  - Éléments de correction de l'épreuve officielle ..... page 160
- **Mathabrazza 2021**
  - Épreuve préparatoire ..... page 58
  - Épreuve officielle ..... page 61
  - Éléments de correction de l'épreuve préparatoire ..... page 167
  - Éléments de correction de l'épreuve officielle ..... page 172
- **Mathabrazza 2022**
  - Épreuve préparatoire ..... page 64
  - Épreuve officielle ..... page 67
  - Éléments de correction de l'épreuve préparatoire ..... page 180
  - Éléments de correction de l'épreuve officielle ..... page 186

Crée en 1986, le grand Rallye Mathabrazza, partenaire du rallye mathématique de l'Académie d'Orléans, est une compétition entre des élèves de seconde des lycées français et locaux de Brazzaville, Pointe-Noire et Kinshasa, répartis en groupes de 20 par établissement.

Le rallye consiste à résoudre des exercices ludiques, de difficultés graduées, de natures diverses tant sur le fond que sur la forme, stimulants pour les élèves. Il est conçu comme une partie intégrante des programmes de mathématiques (congolais et français) et de ses objectifs, en particulier ceux concernant l'initiation à la démarche scientifique, le développement de l'autonomie, l'organisation d'une recherche, la communication de résultats.

Cette année, la 13<sup>ème</sup> édition de Mathabrazza, organisée par Monsieur Valérien EBERLIN, professeur de mathématiques, Coordonnateur de mathématiques, Coordonnateur du laboratoire de mathématiques, regroupe vingt et un établissements soit plus de 400 élèves.

Le rallye Mathabrazza espère contribuer ainsi à une amélioration, auprès de tous les publics élèves, de la représentation des contenus mathématiques.

Je remercie tous mes collègues, professeurs référents de mathabrazza des vingt lycées locaux et français, de Brazzaville, Pointe-Noire et Kinshasa ainsi que leur chef d'établissement pour leur belle implication dans la réussite de cette 13 ème édition du rallye mathabrazza.

**Valérien EBERLIN**

*Coordonnateur de mathématiques*

*Coordonnateur du laboratoire de mathématiques*

**Lycée Français Saint Exupéry - Brazzaville - Congo**

# RALLYE MATHÉMATIQUE DU CENTRE ET DU CONGO

## Épreuve préparatoire

Décembre 2011

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.

Les solutions partielles seront examinées.

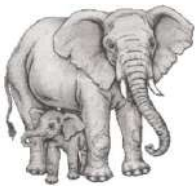
Bon courage et rendez-vous le 20 mars pour l'épreuve officielle.

### Exercice n°1

### Zoo logique

5 points

Les « big five » sont, par ordre décroissant de poids, l'éléphant, le rhinocéros, le buffle, le lion et le léopard.



Il y a eu récemment des naissances dans chacune de ces espèces. Le vétérinaire qui les a vus naître a baptisé l'unique mâle de chaque portée. Dino et Enzo sont des herbivores, mais pas Aldo. Coco n'est pas un léopard. À l'âge adulte, Bobo aura des cornes et sera plus lourd que Dino.

À quelle espèce appartient Aldo ? Bobo ? Coco ? Dino ? et Enzo ?

### Exercice n°2

### Le prix du \$

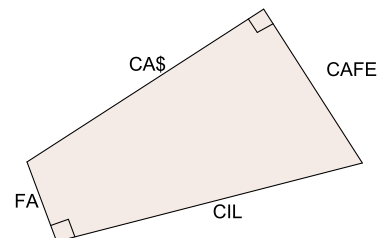
5 points

Dès l'antiquité, les Babyloniens, les Perses et les Grecs substituaient aux lettres les nombres correspondant à leur rang dans l'alphabet.

La figure ci-contre, dans laquelle la valeur de chaque mot représente la longueur du côté correspondant, a été codée par un procédé analogue.

Par exemple, *ECU* vaut  $5 + 3 + 21$ , c'est à dire 29.

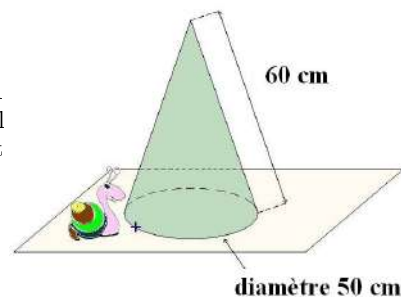
Quelle est la lettre remplacée par \$ ?



**Exercice n°3****De quoi en baver !****8 points**

Pour signaler des travaux sur le bord d'une route, on y a placé des cônes. A la base de l'un d'eux, représenté ci-contre, se prélassait un escargot. Le soleil devenant trop ardent, il décide de rejoindre le point de la base diamétralement opposé en parcourant sur le cône la plus courte distance possible.

1. Dessiner un patron de ce cône à l'échelle 1/10.
2. Représenter, sur ce patron, la trace laissée par l'escargot.
3. Calculer, à un millimètre près, la longueur réelle de cette trace.

**Exercice n°4****Code secret****5 points**

Dans ce codage, chaque lettre est remplacée par ses coordonnées obtenues grâce à la clé dans la grille. Pour coder un message avec la clé secrète MATHS, il faut commencer par supprimer la ponctuation puis associer à chaque lettre du texte ses coordonnées dans la grille. On a ainsi : a=MM, b=MA, c=MT ...

Si on a besoin d'utiliser la lettre W, on la remplacera par la lettre V.

| clé | M | A   | T | H | S |
|-----|---|-----|---|---|---|
| M   | a | b   | c | d | e |
| A   | f | g   | h | i | j |
| T   | k | l   | m | n | o |
| H   | p | q   | r | s | t |
| S   | u | v/w | x | y | z |

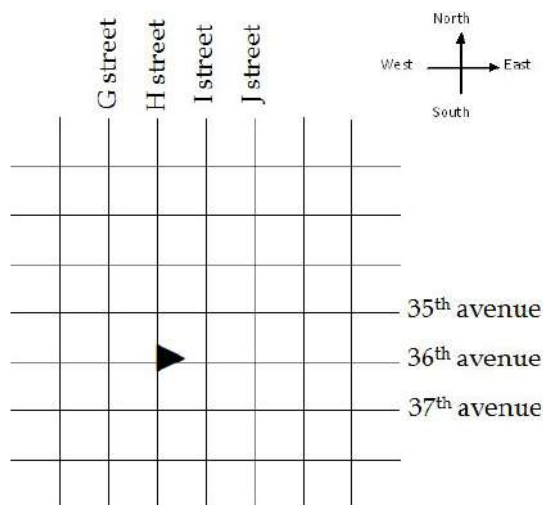
1. Avec la clé MATHS.
  - (a) Coder le message suivant : Pythagore est philosophe
  - (b) Décoder le message suivant : TSTH MSHHHS MAAHMSTH MSTH MMSMHSTSTTTTHMS
2. On a choisi un autre mot clé que MATHS.  
Le message codé de la question 2 devient : YNYO RNOOON RAAORNYO RNYO RRNRONYNYYYORN  
Quel était le mot clé?

**Exercice n°5****Joe's walk****8 points**

Joe is at the corner of H street and 36th avenue.  
He is looking towards the East.

He moves forward two blocks and turns left ;  
then he moves forward three blocks and turns left ;  
then one block and turns left again ;  
then one block and turns right ;  
then one block and turns left ;  
and finally, forward one more block.

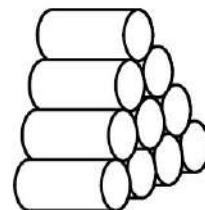
He starts these steps over again 2011 times.  
At which crossing is he standing?



**Exercice n°6****Bigoudis****8 points**

Une coiffeuse prépare ses dix bigoudis de 4 cm de diamètre en les empilant sur une table comme sur le dessin ci-contre.

Quelle est la hauteur de la pile des bigoudis ?

**Exercice n°7****Réfléchir avant de foncer****8 points****Règlement de la course de VTT**

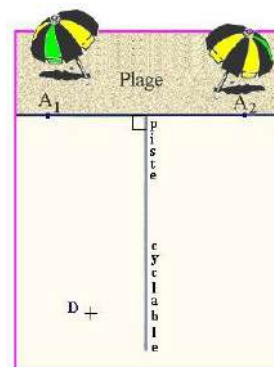
Les concurrents doivent relier le point de départ D au point d'arrivée de leur choix  $A_1$  ou  $A_2$ . Le parcours se déroule sur un terrain plat et libre de tout obstacle mais chaque compétiteur doit parcourir exactement 500 m sur la piste cyclable.

Le dessin n'est pas à l'échelle.

D est à 2000 m de la piste cyclable et à 5400 m de la plage.

$A_1$  et  $A_2$  sont au bord de la plage, à 5000 m chacun de la piste cyclable.

Calculer la longueur du trajet minimum, arrondie au mètre.

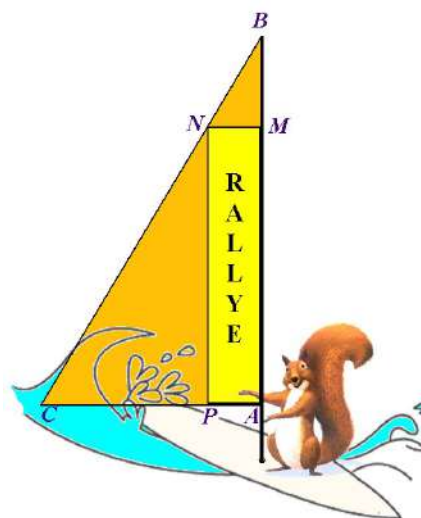
**Exercice n°8****Le logo du mécène****8 points**

Flip possède une planche à voile. La voile qui équipe sa planche a la forme d'un triangle  $ABC$  rectangle en  $A$  avec  $AB = 4,2$  m et  $AC = 1,8$  m.

Pour pouvoir participer à la célèbre régata de Pleumeur-plage, il décide de porter les couleurs du Rallye mathématique du Centre.

Le logo du mécène a une forme rectangulaire (le rectangle  $MNPA$  sur le dessin avec  $N \in [BC]$ ,  $M \in [AB]$ ,  $P \in [AC]$ ).

1. Quelle est l'aire du rectangle  $MNPA$  lorsque  $BM = 1$  m ?
2. Quelle est l'aire du rectangle  $MNPA$  lorsque  $BM = 3$  m ?
3. Quelles doivent être les dimensions du rectangle  $MNPA$  pour que le logo ait une aire maximale ?



# Rallye mathématique du Centre et du Congo

Épreuve officielle - Mardi 20 mars 2012

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.  
Les solutions partielles seront examinées.

## Exercice n°1

### Formez les rangs !

5 points



Lors d'un entraînement, le même petit groupe de légionnaires de l'armée romaine a pu se mettre en formation carrée aussi bien qu'en formation triangulaire. Combien de légionnaires romains ont participé à cet entraînement ?

Un historien prétend qu'une armée de 1225 hommes pouvait se mettre en formation carrée aussi bien qu'en formation triangulaire. A-t-il raison ?

## Exercice n°2

### Quand Cupidon s'emmêle...

12 points

Pipo est un clown triste, un de ces clowns blancs avec son chapeau en forme de cône. Sarah est une trapéziste amoureuse de Pipo. Mais Pipo est trop triste pour être amoureux. Cupidon a donc décidé de lui décocher une de ses célèbres flèches. Malheureusement, Cupidon a raté sa cible et la flèche a traversé le chapeau du clown. Elle est entrée dans le chapeau en E, a traversé la hauteur en B et est ressortie en S.

La hauteur OH du cône est de 30 cm.

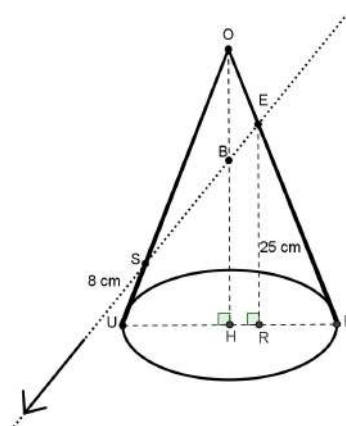
Le rayon du disque de base est de 10 cm.

La longueur ER est de 25 cm.

La longueur US est de 8 cm.

Calculer les longueurs OE et OS.

Dessiner à l'échelle  $\frac{1}{4}$  le patron du chapeau, puis placer correctement dessus les points E et S.



**Exercice n°3****Cinq colonnes à la une****8 points**

Les nombres entiers strictement supérieurs à 1 sont rangés dans cinq colonnes selon le principe ci-dessous :

|                        | a  | b  | c  | d  | e  |
|------------------------|----|----|----|----|----|
| 1 <sup>ère</sup> ligne | 2  | 3  | 4  | 5  |    |
| 2 <sup>ème</sup> ligne |    | 9  | 8  | 7  | 6  |
| 3 <sup>ème</sup> ligne | 10 | 11 | 12 | 13 |    |
| 4 <sup>ème</sup> ligne |    | 17 | 16 | 15 | 14 |

Le nombre 13 est situé dans la 3<sup>ème</sup> ligne, colonne d.

En continuant le principe énoncé ci-dessus, où se situe :

1. le nombre 2012 ?
2. le nombre 1002 ?
3. le nombre 747 ?

**Exercice n°4****Le Carré de POLYBE****5 points**

|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | A | B | C | D | E |
| 2 | F | G | H | I | J |
| 3 | K | L | M | N | O |
| 4 | P | Q | R | S | T |
| 5 | U | V | X | Y | Z |

Polybe, un historien grec (vers 200 – 125 av. J.-C.), est à l'origine du premier procédé de chiffrement par substitution. C'est un système de transmission basé sur un carré de 25 cases. Chaque lettre peut être ainsi représentée par un groupe de deux chiffres : celui de sa ligne suivi de celui de sa colonne.

Ainsi : "E" = 15, "U" = 51, "N" = 34 ...

Mais ce codage est peut-être un peu simple. On décale alors l'alphabet avec un mot de passe... Par exemple, si le mot de passe est ELECTRICITE, on commence à remplir le carré avec les lettres de ce mot, en ne gardant que la première occurrence de chaque lettre, ce qui donne E L C T R I, puis on complète le tableau avec les lettres inutilisées dans l'ordre alphabétique. (voir ci-contre)

*Le W n'est pas utilisé. Au besoin, on emploie le V à sa place.*

|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | E | L | C | T | R |
| 2 | I | A | B | D | F |
| 3 | G | H | J | K | M |
| 4 | N | O | P | Q | S |
| 5 | U | V | X | Y | Z |

Que se cache-t-il derrière le message chiffré ci-dessous ? Pour le découvrir, il faut le SESAME.

**41153212214531234244121431124422123413213413111112**

**Exercice n°5****Le dé qui roule****8 points**

Un dé est dans la position initiale ci-contre.

Pour les dessins demandés, on utilisera le même type de représentation.

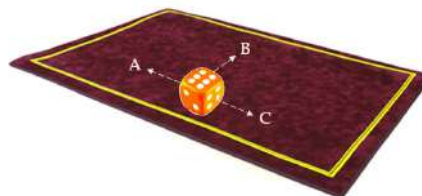


On enchaîne sur ce dé, à partir de cette position initiale, certaines opérations successives de basculement.

Ces opérations sont déterminées par la valeur apparue sur la face supérieure du dé.

Ainsi si cette face supérieure indique :

- 1, alors on bascule le dé en direction de A, une fois ;
- 2, alors on bascule le dé en direction de A, deux fois ;
- 3, alors on bascule le dé en direction de B, une fois ;
- 4, alors on bascule le dé en direction de B, deux fois ;
- 5, alors on bascule le dé en direction de C, une fois ;
- 6, alors on bascule le dé en direction de C, deux fois.

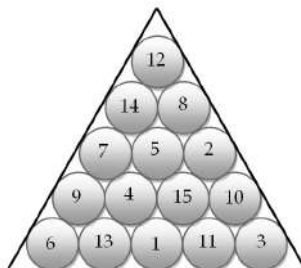


1. Dessiner le dé dans sa position initiale puis après la première application du procédé et ensuite pour les onze applications suivantes. Effectuer la somme des treize faces supérieures représentées précédemment.
2. On continue le procédé, jusqu'à ce que la somme des faces supérieures soit égale à 2012. Dessiner alors le dé dans cette dernière position.

*Indication : la somme des nombres indiqués sur deux faces opposées d'un dé vaut toujours 7.*

**Exercice n°6****Good game!****5 points**

This figure on the right represents 15 snooker balls enclosed in their wooden triangle.  
The diameter of the balls is of 57 mm.  
How much does the side of the triangle measure?

**Exercice n°7****Au bal masqué, ohé...****5 points**

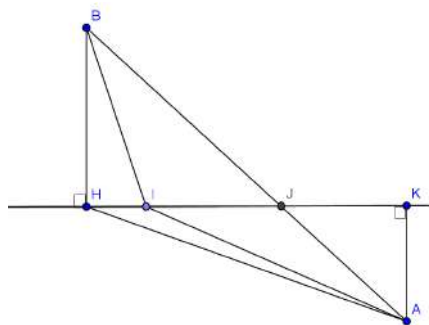
Aristide, Ben et Christian préparent une fête masquée chez l'une de leurs camarades.  
Ils disposent de trois déguisements, un pour chacun : fantôme, pirate et vampire.

- Ben dit : « Si Christian se déguise en vampire, alors moi je me mets en pirate!!! »
- Christian répond : « Si Ben se déguise en fantôme, alors moi je me mets en pirate!!! »
- Et Aristide de conclure : « Si Ben ne se déguise pas en vampire, alors moi je me mets en pirate!!! »

Quelles sont les répartitions possibles des déguisements de chacun ?

**Exercice n°8****Le maître nageur****12 points**

Un maître nageur s'entraîne au sauvetage. Il est sur la plage et surveille la baignade dans un lac séparé de la plage par un muret rectiligne. Il est en A, à 6 m de ce muret ( $AK = 6$  m) et doit rejoindre au plus vite une bouée située en B, à 9 m du muret ( $BH = 9$  m) et à 20 m sur la gauche de A ( $HK = 20$  m). Il nage à la vitesse d'un mètre par seconde et il court sur le sable quatre fois plus vite qu'il ne nage.



1. Il se dit d'abord qu'il ira plus vite en passant par H que s'il allait en B en ligne droite, coupant  $[HK]$  en J.  
A-t-il raison ?
2. Puis il se dit que peut-être, en passant entre H et K par I tel que  $HJ = 4 \times HI$ , il ira encore plus vite. Est-ce vrai ?
3. N'y a-t-il pas un trajet encore plus rapide ? Si oui, préciser la position correspondante du point M, entre H et K.

# RALLYE MATHÉMATIQUE DU CENTRE ET DU CONGO

## Épreuve préparatoire

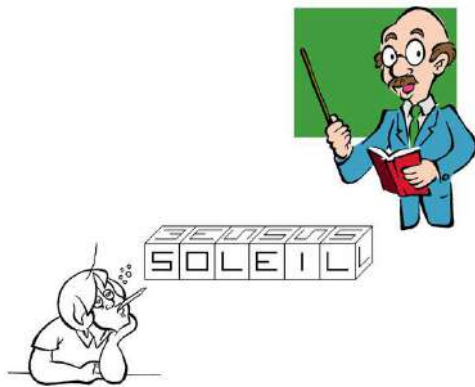
Décembre 2012

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.  
Les solutions partielles seront examinées.  
Bon courage et rendez-vous le 19 mars pour l'épreuve officielle.

### Exercice n°1

### Les cubes de son cours

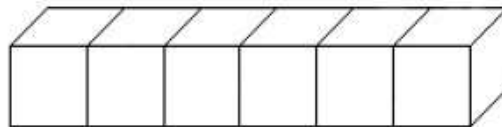
5 points



Un professeur en neurologie présente à ses étudiants un test destiné à détecter certains troubles de la perception de l'espace : il dispose sur une table, entre lui et les étudiants, six cubes identiques disposés de manière à ce que les étudiants ne puissent voir que ceci :



Aidez les étudiants à deviner ce que le professeur distingue, lui, de son côté :



(D'après rallye Aquitaine 2008)

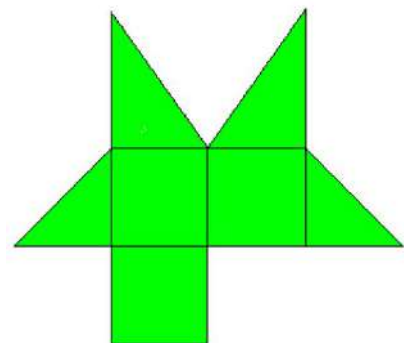
### Exercice n°2

### Empreinte

8 points

La figure ci-contre est le patron d'un solide S qui comporte 7 faces, les unes sont des carrés de 5 cm de côté et les autres des triangles rectangles. On veut compléter le solide S par un solide P afin d'obtenir un cube. Réaliser le patron du solide P en vraie grandeur.

(d'après Maths sans Frontières)



**Exercice n°3****Les ascendants****12 points**

On dit qu'un entier positif non nul est « un ascendant » lorsqu'il est formé d'un chiffre ou de plusieurs, tous différents, écrits de gauche à droite dans l'ordre croissant. Exemples : 6 ; 28 ; 247 ; 1789 ...

1. Quel est le plus grand ascendant ?
2. Combien y a-t-il d'ascendants à 2 chiffres ? En donner la liste complète.
3. Combien existe-t-il d'ascendants à 3 chiffres ?
4. Combien existe-t-il d'ascendants à 4 chiffres ?
5. En observant les ascendants 3578 et 12469, comparer les nombres d'ascendants à 4 chiffres et à 5 chiffres.
6. Combien existe-t-il d'ascendants ?

**Exercice n°4****Echecs et maths****8 points**

|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A |   |   |   |   |   |   |   |   |
| B |   |   |   |   |   |   |   |   |
| C |   |   |   |   |   |   |   |   |
| D |   |   |   |   |   |   |   |   |
| E |   |   |   |   |   |   |   |   |
| F |   |   |   |   |   |   |   |   |
| G |   |   |   |   |   |   |   |   |
| H |   |   |   |   |   |   |   |   |

Un jeu d'échecs est constitué de 64 cases, il est représenté par le schéma ci-contre. On s'intéresse au déplacement de la pièce "cavalier" qui s'effectue de la façon suivante : deux cases verticales puis une case horizontale ou deux cases horizontales puis une verticale.

Ainsi, par exemple, le "cavalier" situé en E5 peut atteindre en un coup la case F3.

Représenter l'échiquier sur la feuille réponse.

1. Nommer les autres cases atteintes en un seul coup par le "cavalier" situé en E5.
2. Le "cavalier" est maintenant situé en H2.
  - (a) Quel est le nombre minimal de coups nécessaires pour atteindre la case F4 ?
  - (b) Colorier toutes les cases telles que le nombre minimal de coups pour les atteindre soit 4.

**Exercice n°5****Step by step****5 points**

There are less than 200 steps on the flight of stairs.

If you go down the stairs 2 steps at time, there will be 1 step left,  
 If you go down the stairs 3 steps at time, there will be 2 left,  
 If you go down the stairs 4 steps at time, there will be 3 left,  
 If you go down the stairs 5 steps at time, there will be 4 left,  
 If you go down the stairs 6 steps at time, there will be 5 left,  
 If you go down the stairs 7 steps at time, there will be none left,

How many steps are there on those stairs?



**Exercice n°6****La farandole des + et des -****5 points**

1. Soit  $E = 1 \clubsuit 2 \diamondsuit 3 \heartsuit 4 \spadesuit 5$ .

En remplaçant  $\clubsuit$ ,  $\diamondsuit$ ,  $\heartsuit$  et  $\spadesuit$  par l'un ou l'autre des symboles  $+$  ou  $-$ ,  $E$  peut-il être égal à 5 ? Si oui, écrire toutes les manières de l'obtenir.

2. Quelles sont toutes les valeurs numériques prises par  $E$  lorsqu'on remplace  $\clubsuit$ ,  $\diamondsuit$ ,  $\heartsuit$  et  $\spadesuit$  par l'un ou l'autre des symboles  $+$  ou  $-$  ?

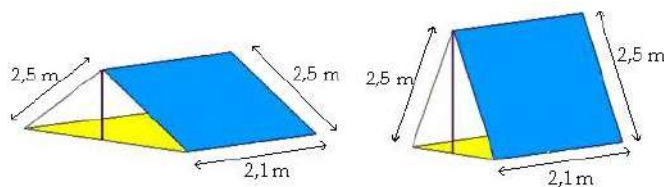
3. Soit  $F = 1 \clubsuit 2 \diamondsuit 3 \heartsuit 4 \spadesuit 5 \star 6$ .

En remplaçant  $\clubsuit$ ,  $\diamondsuit$ ,  $\heartsuit$ ,  $\spadesuit$  et  $\star$  par l'un ou l'autre des symboles  $+$  ou  $-$ ,  $F$  peut-il être égal à 12 ?

**Exercice n°7****Bien tenté****8 points**

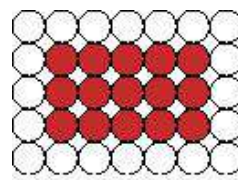
Victor dispose d'une toile rectangulaire de dimensions  $2,10 \text{ m} \times 5 \text{ m}$ . Il veut monter une tente à deux pans pour ses enfants (la tente est assimilée à un prisme droit).

- Il dresse verticalement des piquets de hauteur 1 mètre. Quel est le volume de la tente ?
- Sa fille lui dit que s'il utilise des piquets de hauteur 2 m, le volume de la tente est plus grand. A-t-elle raison ?
- Quelle hauteur de piquets doit-il choisir pour que le volume de la tente soit maximal ?

**Exercice n°8****Jeu, sets et maths ...****8 points**

Mes amis avaient décoré leur table avec des sets de table comme celui-ci, rectangulaires et formés de disques de même taille, joints les uns aux autres. Tous les sets étaient constitués de la même manière : des disques blancs à l'extérieur et des disques rouges à l'intérieur. J'avais remarqué qu'il y avait 20 disques blancs et 15 disques rouges.

Existe-t-il des sets de table constitués de la même façon mais comptant exactement le même nombre de disques rouges et de disques blancs ?



# Rallye mathématique du Centre et du Congo

## Épreuve officielle - Mardi 19 mars 2013

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.  
Les solutions partielles seront examinées.

### Exercice n°1

#### A la pêche au moule

8 points

Afin de réaliser, pour ses nouveaux chocolats, un moule pyramidal à base rectangulaire dont les faces latérales sont des triangles rectangles, un pâtissier assemble huit tiges. Il dispose de deux tiges de 2,4 cm, de deux de 6 cm, d'une de 3,2 cm, d'une de 4 cm, d'une de 6,8 cm et d'une dernière plus longue. Il recouvre cet assemblage d'un revêtement plastique et y verse son délicieux chocolat.

1. Réaliser un patron du moule.
2. Quelle est la longueur exacte de la dernière tige?
3. Quel volume de chocolat en mL faut-il pour fabriquer 100 chocolats?

### Exercice n°2

#### A côté de la plaque

5 points

Les numéros d'immatriculation en Epsilonie sont composés de deux lettres et trois chiffres.

Les plaques sont immatriculées avec le système suivant :

de **AA-001** à **AA-999** puis de **AB-001** à **AB-999** on progresse jusqu'à **AZ-999**.

La suivante est **BA-001** et ainsi de suite.

Le 1er avril 2012, la dernière plaque mise en circulation fut **CK-854**.

Ce jour là, un accident survint dans le village de Sigmato.

Le chauffard responsable de l'accident s'enfuit à bord de son véhicule. Arrivé sur les lieux de l'accident, un gendarme enquêta.

1. Le gendarme interrogea M. Iota, témoin de l'accident.  
Celui-ci ne se souvint que de la première lettre de la plaque : C .  
Combien de véhicules immatriculés correspondent à cette information ?
2. Le gendarme interrogea Mme Kappa. Celle-ci se souvint qu'il y avait le chiffre 7 dans le numéro d'immatriculation.  
Avec cette nouvelle information, combien de véhicules immatriculés reste-t-il maintenant ?
3. Puis le gendarme interrogea Mme Lambda. Celle-ci se souvint que la partie numérique de la plaque était palindromique (comme par exemple : 181, 525...).  
Finalement, combien de véhicules immatriculés suspects reste-t-il?

**Exercice n°3****Ce n'est pas du cinéma !****5 points**

Lors de l'exposition « Mathématiques, un dépaysement soudain » organisée par la Fondation Cartier pour l'art contemporain en 2011-2012, un jeu mathématique était proposé par l'acteur et cinéaste japonais Takeshi Kitano. Il s'agissait, en écrivant les nombres 1,2,3,4... dans l'ordre chacun une seule fois et en utilisant n'importe quel symbole parmi  $+$   $-$   $\times$   $\div$   $( )$   $\sqrt{\quad}$  de trouver une formule la plus courte possible dont le résultat était 2011, la longueur d'une formule étant le dernier entier utilisé.

Exemples de formules pour trouver 29 :

$$(1+2)^3 - 4 + 5 - 6 + 7 = 29 \text{ ou } 1^2 \times 3 + 4 \times 5 + 6 = 29 \text{ ou } 1 + 2^3 + 4 \times 5 = 29 \text{ ou } (1+2)^3 + \sqrt{4} = 29$$

La dernière formule est plus courte que les trois premières car elle n'utilise que les quatre premiers entiers.

1. Trouver une formule, la plus courte possible, qui donne comme résultat 28.
2. Trouver une formule, la plus courte possible, qui donne comme résultat 468.
3. Trouver une formule, la plus courte possible, qui donne comme résultat 2013.

Pour information :

468 classes sont inscrites à l'édition 2013 du Rallye Mathématique du Centre qui fête cette année son 28e anniversaire.

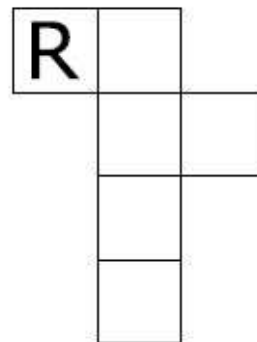
**Exercice n°4****Les trois vues du cube****5 points**

Trois vues du même cube sont représentées ci-dessous.



Compléter le patron de ce cube, ici commencé.

Attention à l'orientation des lettres...

**Exercice n°5****Jeu du Potkimonte****8 points**

Le petit Alfred a reçu un jeu vidéo pour son anniversaire. Un des personnages du jeu gagne ou perd des points de vie (PV) en passant d'un niveau à l'autre. Le premier niveau est le numéro 1, il progresse d'un niveau à la fois.

Si son cumul de points de vie est strictement inférieur au niveau auquel il accède, il gagne alors autant de points de vie que le numéro de ce niveau. Dans le cas contraire il en perd autant que le nouveau niveau.

Voici l'évolution de son capital pour les premiers niveaux :

- Au niveau 1, il dispose de 1 PV ;
- Il passe au niveau 2 et gagne 2 PV car  $1 < 2$  et a donc au total 3 PV.
- Il passe au niveau 3 et perd 3 PV car  $3 \geq 3$  et a donc au total 0 PV.
- Il passe au niveau 4 et gagne 4 PV car  $0 < 4$  et a donc au total 4 PV.
- Il passe au niveau 5 et gagne 5 PV car  $4 < 5$  et a donc au total 9 PV.
- Il passe au niveau 6 et perd 6 PV car  $9 \geq 6$  et a donc au total 3 PV.

1. Compléter ce tableau jusqu'au niveau 20.

| niveau | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| PV     | 1 | 3 | 0 | 4 | 9 | 3 |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |

2. Combien a-t-il de PV au niveau 39 ?
3. Que remarque-t-on aux niveaux 3, 12 et 39 ? A quel niveau suivant cela se reproduit-il ?
4. Au 2009e niveau, le personnage a 635 PV.  
Combien en avait-il au niveau 2008 ? Combien en aura-t-il au niveau 2013 ?

### Exercice n°6

### In the pocket

5 points



A 30 mm thick book is 125 mm wide and 200 mm long. We have three envelopes at our disposal, each with an opening on the top. They each measure:

- Envelope A: 170 mm wide, 210 mm long
- Envelope B: 160 mm wide, 220 mm long
- Envelope C: 150 mm wide, 230 mm long

Which envelope(s) can contain the complete book?



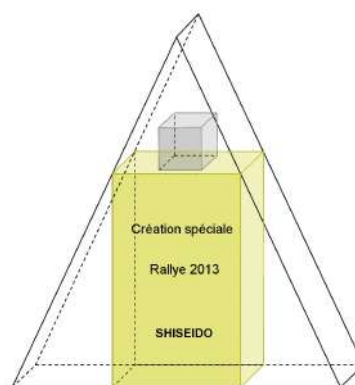
### Exercice n°7

### Un parfum de maths

8 points

Une célèbre marque de parfum souhaite concevoir une boîte particulière pour le flacon contenant sa dernière création. Le flacon a la forme d'un pavé droit dont la longueur est 10 cm, la largeur est 6 cm et l'épaisseur est 3 cm. Il est surmonté d'un bouchon cubique de 2 cm de côté, centré sur sa face supérieure. La boîte choisie est un prisme dont la base est un triangle isocèle. Le flacon sera placé comme ci-contre à l'intérieur du prisme. Les coins supérieurs du flacon touchent les bords de la boîte et la profondeur de la boîte est égale à l'épaisseur du flacon.

Quel est le volume minimal de la boîte ?

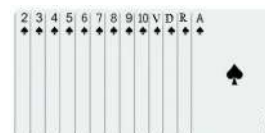


### Exercice n°8

### Mais où est donc passée Argine ?

8 points

Judith, Rachel et Pallas jouent aux cartes avec deux jeux de 52 cartes. Dans chaque jeu, il y a 4 couleurs (trèfle, carreau, cœur, pique) de 13 cartes chacune. Les 13 cartes sont classées par ordre de valeur comme ci-contre.



Voici les trois « mains » distribuées. La pioche est constituée du reste des cartes non distribuées.



Judith



Rachel



Pallas

1. Si Judith tire une carte en premier dans la pioche, quelle est la probabilité qu'elle tire une carte lui permettant de faire un carré? (Un carré est formé de 4 cartes de même valeur et de couleurs différentes, par exemple : 4 as  $A♣ A♦ A♠ A♥$  obligatoirement de trèfle, carreau, pique et cœur.)
2. Si Rachel tire une carte en premier, quelle est la probabilité qu'elle tire une carte lui permettant de faire une tierce? (Une tierce est formée de 3 cartes de la même couleur qui se suivent, par exemple :  $7♣ 8♣ 9♣$ .)
3. Si Pallas tire une carte en premier, quelle est la probabilité qu'elle tire une carte lui permettant de faire une quinte? (Une quinte est formée de 5 cartes de la même couleur qui se suivent, par exemple :  $9♥ 10♥ V♥ D♥ R♥$ .)

# RALLYE MATHÉMATIQUE DU CENTRE ET DU CONGO

## Épreuve préparatoire

Décembre 2013

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.

Les solutions partielles seront examinées.

Bon courage et rendez-vous le 18 mars pour l'épreuve officielle.

### Exercice n°1

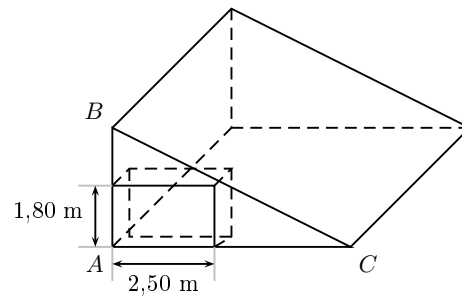
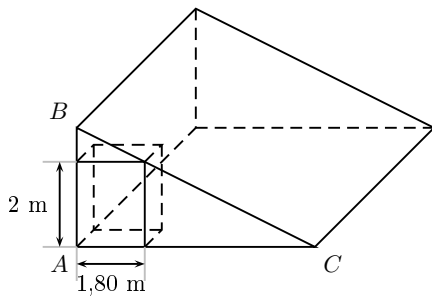
### Meuble sous toit

5 points

Une chambre mansardée a la forme d'un prisme droit, de base un triangle rectangle  $ABC$  tel que  $AB=2,50$  m (figure ci-dessous).

On y met tout juste contre le mur  $ABC$  une armoire de 2 m de hauteur et de 1,80 m de large.

Le locataire pourra-t-il mettre au même endroit une bibliothèque de 1,80 m de hauteur et de 2,50 m de large ?



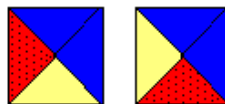
### Exercice n°2

### Couper Coller

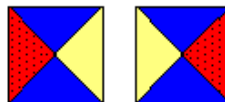
8 points

On fabrique un jeu de pions carrés. Chaque carré est divisé, par ses diagonales, en quatre triangles. A l'aide de trois couleurs (bleu, jaune, rouge) on colorie les quatre triangles afin d'obtenir des pions différents. Un pion peut contenir 1 ou 2 ou 3 couleurs ; il en existe 24 en tout, tous différents.

On considère que les deux pions ci-contre sont différents :



En revanche, les deux pions ci-contre sont identiques :



En choisissant 3 cm de côté pour les carrés, colorier les 24 pions différents.

Découper et coller ces pions sur la feuille réponse afin d'obtenir un rectangle de 12 cm sur 18 cm en respectant la consigne suivante : les côtés en contact de deux carrés sont de la même couleur.

**Exercice n°3****« Epharant ... »****12 points**

A la pointe du RA... le phare A émet un flash toutes les 6 minutes; on dit que sa période d'émission est de 6 minutes. L'émission du premier flash a lieu à minuit. Le phare B fonctionne avec une autre période d'émission qui est un nombre entier de minutes.

Les quatre situations proposées ci-dessous sont indépendantes.

**Situation 1 :** Le phare B a une période d'émission de 10 minutes et émet pour la première fois à 0 h 05 min.

Peut-il y avoir coïncidence entre les émissions des deux phares ?

**Situation 2 :** Le phare B émet toujours toutes les 10 minutes mais sa première émission a lieu moins de 9 minutes après celle du phare A.  
Les émissions des deux phares coïncident à 5 h 48 min.

Déterminer l'horaire de la première émission du phare B.

**Situation 3 :** Le phare B a toujours une période d'émission de 10 minutes et commence à émettre à 0 h 04 min.

Quelle est l'heure de la première coïncidence des émissions des deux phares ?

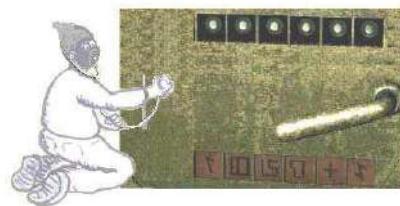
Quelle est l'heure de la dixième coïncidence des émissions des deux phares ?

Entre 0 h 00 min et 7 h 00 min, combien y a-t-il de coïncidences ?

**Situation 4 :** Le phare B débute son émission à 0 h 05 min avec une nouvelle période d'émission comprise entre 2 et 12 minutes. Sachant qu'il y a coïncidence à 1 h 36 min, quelle est la période d'émission du phare B ?

**Exercice n°4****Le code secret****5 points**

Un coffre-fort est protégé par un code à six chiffres qui ne commence pas par un zéro. Les quatre premiers chiffres sont des entiers consécutifs rangés dans l'ordre croissant (par exemple 2345). Les deux derniers sont des entiers consécutifs rangés dans l'ordre décroissant (par exemple 87). De plus, le code est un carré parfait. Quel est ce code ?

**Exercice n°5****Renversants****5 points**

Camille et son petit frère Max sont assis face à face. Camille écrit un nombre de cinq chiffres sur une feuille et sans bouger cette feuille, Max lit alors le même nombre que Camille. Ce nombre s'écrit sans le chiffre 1, il ne commence pas par 0 et il ne se termine pas par 0.

Trouver tous les nombres de 5 chiffres vérifiant les règles précédentes que Camille peut faire lire à son petit frère en utilisant les signes ci-dessous.

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 0 |

**Exercice n°6****Le chapeau chinois****8 points**

Lauralie a une amie en Chine qui lui a envoyé une photo d'elle en costume traditionnel avec une belle coiffe. Tout en rêvant à son prochain voyage en Chine, Lauralie prend une bande de papier rectangulaire de dimensions 12 cm par 24 cm. Elle réalise en un seul pliage un pentagone qui a un axe de symétrie. Ce pentagone ressemble à la coiffe de son amie.

1. Faire ce pliage avec la bande de dimensions données.
2. Déterminer par calcul la hauteur  $h$  du pentagone.
3. Lauralie remarque que la longueur  $d$  est égale à la hauteur  $h$ . Calculer l'aire du pentagone.
4. Coller le pliage sur la feuille réponse.

**Exercice n°7****Le logo du mécène****8 points**

Flip possède une planche à voile. La voile qui équipe sa planche a la forme d'un triangle  $ABC$  rectangle en  $A$  avec  $AB = 4,2$  m et  $AC = 1,8$  m. Pour pouvoir participer à la célèbre régata de Pleumeur-plage, il décide de porter les couleurs du Rallye mathématique du Centre.

Le logo du mécène a une forme rectangulaire (le rectangle  $MNPA$  sur le dessin avec  $N \in [BC]$ ,  $M \in [AB]$ ,  $P \in [AC]$ ).

1. Quelle est l'aire du rectangle  $MNPA$  lorsque  $BM = 1$  m ?
2. Quelles doivent être les dimensions du rectangle  $MNPA$  pour que le logo ait une aire maximale ?

**Exercice n°8****Touché, coulé !****8 points**

Pierre et Léa jouent à la bataille navale, chacun dispose d'un plateau se composant de 100 cases carrées. Elles sont repérées horizontalement de  $A$  à  $J$  et verticalement de 1 à 10.

Ils disposent chacun d'un bateau qu'ils peuvent placer horizontalement ou verticalement.



1. Lors de la première partie, ils jouent chacun avec un bateau de 2 cases qu'ils placent sur leur plateau.
  - (a) Pierre joue en premier et choisit au hasard une case. Quelle est la probabilité qu'il touche le bateau au premier coup ?
  - (b) Pierre a touché le bateau de Léa en  $E5$ . Il a le droit de rejouer. Si Pierre joue "intelligemment", nommer précisément les cases qu'il doit viser pour tenter de toucher l'autre partie du navire et donc le couler ?
  - (c) Maintenant, c'est Léa qui tente de couler le bateau de Pierre. Léa touche aussi à son premier essai le navire de Pierre. Celui-ci lui dit qu'en jouant intelligemment, elle a 1 chance sur 2 de le couler. Quelles sont les positions possibles du bateau ?
2. Lors de la seconde partie, ils jouent chacun avec un bateau de longueur 3 cases. Léa a touché le bateau de Pierre en  $B2$ . Nommer les cases qu'elle doit choisir en priorité pour avoir le plus de chances de le toucher à nouveau.

# Rallye mathématique du Centre et du Congo

## Épreuve officielle

Mardi 18 mars 2014

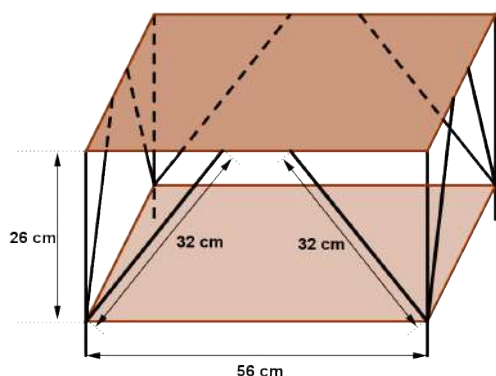
Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.  
Les solutions partielles seront examinées.

### Exercice n°1

### Casier judicieux

8 points

Christelle a dans son salon une table basse carrée comme celle qui est représentée ci-dessous. Elle est composée de deux plateaux en bois reliés par des tubes métalliques. Les dimensions sont données sur la figure.



Elle souhaite utiliser le plateau du dessous pour mettre un casier afin de ranger des magazines. Elle a donc acheté un casier qui a la forme d'un pavé droit, ouvert sur le dessus, dont le fond a pour dimensions 30 cm sur 45 cm et dont la hauteur mesure 17 cm. Elle veut introduire le casier par un côté de la table en le faisant glisser sur le plateau du dessous. Il n'est pas question de l'incliner pour le faire rentrer.  
Le casier que Christelle a acheté convient-il ?

### Exercice n°2

### L'écart d'heure

5 points

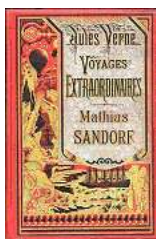
Un horloger se voit confier deux montres pour réglage.

Le lendemain, un mardi, il les règle toutes les deux sur 8 heures puis les démarre au même instant lorsqu'il est exactement 8 heures sur son horloge de référence.

Au bout de quelque temps, il constate que l'une des montres prend une seconde de retard toutes les heures et l'autre deux secondes d'avance toutes les heures par rapport à son horloge de référence.



1. Au bout de combien de temps auront-elles 7 minutes de différence ?
2. Le mardi suivant, quelles heures affichent les deux montres lorsqu'il est exactement 8 heures à son horloge de référence ?

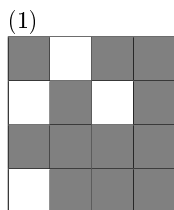
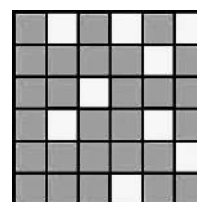
**Exercice n°3****Le cache secret, le message se transforme****8 points**

Après avoir lu le roman Mathias Sandorf de Jules Verne, Maxence et Sarah décident d'utiliser le même système de codage que celui évoqué dans le livre pour s'écrire des messages secrets.

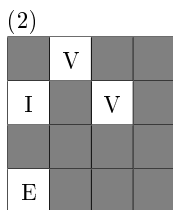
Le principe de ce codage est le suivant : on utilise un cache secret et une grille  $4 \times 4$ ,  $5 \times 5$ ,  $6 \times 6$  ... selon la longueur du message. Le cache, de même dimension que la grille, possède des trous, comme celui du roman de Jules Verne (voir ci-contre).

Sur l'exemple ci-dessous on illustre comment le message

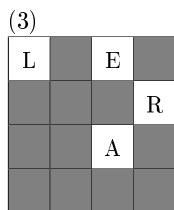
« VIVE LE RALLYE MATH » est codé en « LVEL IMVR ALAY ETEH ».



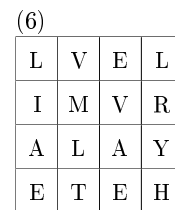
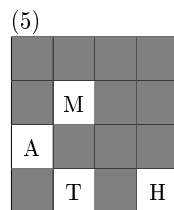
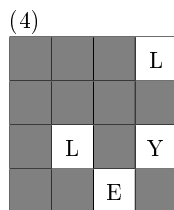
(1) Position initiale d'un cache  $4 \times 4$  sur une grille vide.



(2) On écrit les premières lettres du message dans les cases vides.



(3) Puis on fait tourner le cache d'un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre. On continue de remplir le message. (4) On refait tourner le cache et on continue d'écrire. (5) On tourne de nouveau le cache et on finit d'écrire le message.

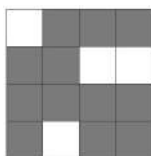


(6) On enlève le cache et on obtient le message codé.

1. Afin de convenir d'un rendez-vous avec Sarah, Maxence désire coder le message suivant « A QUEL ENDROIT SE RENCONTRER ? » à l'aide de son cache  $5 \times 5$  représenté ci-contre dans sa position initiale.

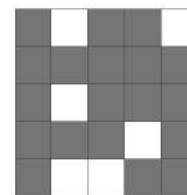
Quel message va-t-il envoyer à Sarah ? (Il place le ? au centre du carré)

2.



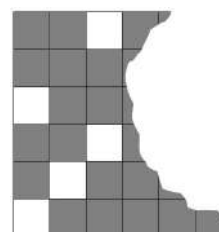
Sarah lui renvoie le message suivant « RTUR EEDV CHSA UPDA ».

Quel message va décrypter Maxence à l'aide de son cache  $4 \times 4$  représenté ci-contre dans sa position initiale ?



3. Pour écrire des messages plus longs, Maxence utilise un cache  $6 \times 6$  possédant 9 trous, cache qu'il a malheureusement abîmé. Voici le morceau restant représenté dans sa position initiale.

Reconstituer le cache.

**Exercice n°4****Jules décède****8 points**

Flore a mis au défi son ami Jules de trouver le code d'accès qui permet de rentrer dans son immeuble. Ce code est composé de cinq chiffres suivis de la lettre B et n'a jamais été changé depuis son installation.



Flore lui a juste donné comme indice que les chiffres de deux touches du digicode sont quasiment effacés, qu'une autre touche montre aussi des traces d'usure, mais moins importantes que sur les deux autres et que les autres touches sont comme neuves. Elle lui dit aussi que le nombre formé par les 4 premiers chiffres de la combinaison est un carré parfait. Elle se dit qu'avec ces renseignements, elle n'est pas près de voir arriver Jules !

Jules se dit lui aussi que toutes ces informations sont bien insuffisantes pour trouver le code et qu'il aura bien du mal à entrer dans l'immeuble, sachant qu'il n'a que trois essais avant de bloquer la porte. Mais Jules, qui est déjà allé chez Flore se souvient que le code formé par les cinq chiffres est un palindrome (comme par exemple : 47874, 52225...). Cela l'avait marqué ! Quelque temps plus tard, il appelle Flore et lui dit « Je n'ai même pas besoin de me déplacer devant ton digicode pour savoir que je vais pouvoir entrer dans ton immeuble. ».

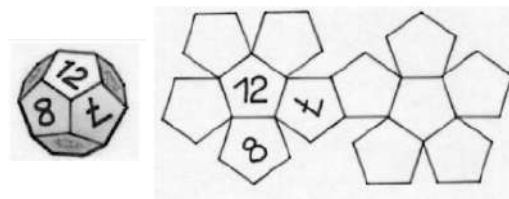
A-t-il raison ?

**Exercice n°5****Le dé à Dédé****5 points**

Dédé, grand amateur de jeux de société, possède un dé à douze faces, deux à deux parallèles et numérotées de 1 à 12. Chaque face est un pentagone régulier et la somme des nombres sur deux faces parallèles est toujours la même (c'est-à-dire 13).

Les chiffres 6 et 9 sont soulignés, ce qui donne 6 et 9 pour ne pas les confondre.

Placer les nombres manquants sur le patron ci-contre, qui sera collé sur la feuille réponse.

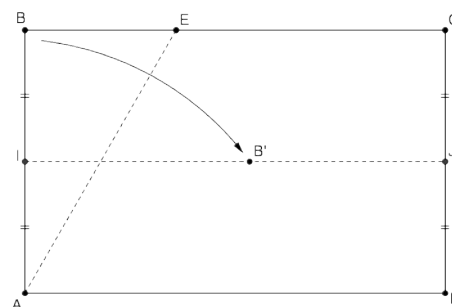
**Exercice n°6****Deux plis pour trois****8 points**

On prend une feuille de papier rectangulaire ABCD avec  $AB < BC$ .

On marque le pli [IJ] où I est le milieu de [AB] et J celui de [CD].

On cherche le point E sur [BC] tel qu'en pliant suivant [AE], le point B vienne sur le segment [IJ] en un point que l'on va noter B'.

1. Effectuer le pliage sur une feuille de dimensions 10 cm par 15 cm et le coller sur la feuille réponse.
2. Calculer les mesures des angles  $\widehat{BAE}$ ,  $\widehat{EAB'}$  et  $\widehat{B'AD}$  ?
3. Finalement, qu'a-t-on réalisé sans aucun instrument de géométrie ?

**Exercice n°7****Des dés****5 points**

Un jeu de dés à six faces, oppose en trois manches deux adversaires : l'attaquant et le défenseur.

Première manche : l'attaquant lance un dé puis c'est au tour du défenseur de lancer le sien ; si la valeur du dé du défenseur est supérieure ou égale à celle de l'attaquant alors le défenseur marque un point, sinon c'est l'attaquant qui marque un point. L'attaquant a obtenu "5". Quelle est la probabilité que le défenseur marque un point ?

Deuxième manche : l'attaquant lance deux dés puis le défenseur lance un dé ; si le double de la valeur du dé du défenseur est supérieur ou égal à la somme des deux dés de l'attaquant alors le défenseur marque un point, sinon c'est l'attaquant qui marque un point. L'attaquant a obtenu "3" et "5".

Quelle est la probabilité que le défenseur marque un point ?

Troisième manche : l'attaquant lance deux dés puis le défenseur lance deux dés ; si la somme des deux dés du défenseur est supérieure ou égale à la somme des deux dés de l'attaquant alors le défenseur marque un point, sinon c'est l'attaquant qui marque un point. L'attaquant a obtenu "3" et "4".

Quelle est la probabilité que le défenseur marque un point ?

**Exercice n°8****Des pensées sans trop dépenser****8 points**

Deux jardiniers du parc floral de La Source sont chargés de fleurir un parterre rectangulaire de 60 m sur 80 m.

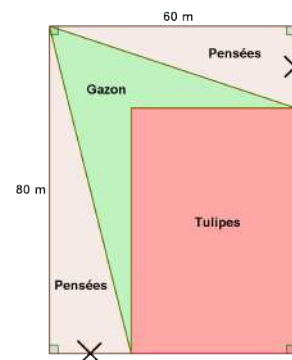
Ils doivent respecter le schéma ci-contre à ajuster suivant le coût de réalisation.

• Une zone rectangulaire sera plantée de tulipes, une zone en forme de flèche sera engazonnée et deux zones triangulaires seront plantées de pensées.

Ces deux triangles doivent avoir un côté de même longueur (voir schéma).

• 1 m<sup>2</sup> de gazon en rouleau coûte 4 euros, 1 m<sup>2</sup> de pensées revient à 7 euros et 1 m<sup>2</sup> de tulipes revient à 8 euros.

Quelles dimensions les jardiniers doivent-ils donner aux deux triangles de pensées afin que la réalisation de l'ensemble du parterre soit la moins coûteuse possible ?



# RALLYE MATHÉMATIQUE DU CENTRE ET DU CONGO

## Épreuve préparatoire - 2<sup>de</sup>

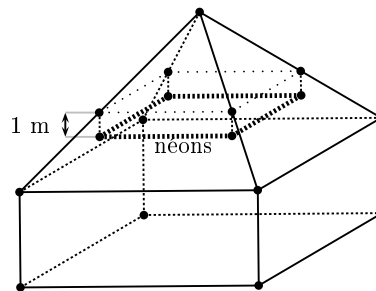
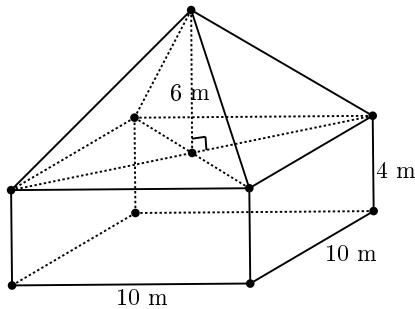
Décembre 2014

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.  
Les solutions partielles seront examinées.  
Bon courage et rendez-vous le 17 mars pour l'épreuve officielle.

### Exercice n°1

« Et la lumière fut »

8 points



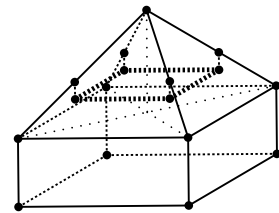
Un bâtiment est formé :

- d'un pavé droit à base carrée de côté 10 m et de hauteur 4 m ;
- d'une pyramide régulière à base carrée de côté 10 m et de hauteur 6 m qui forme le toit.

On veut accrocher un système d'éclairage dans cette salle. Ce système est composé de néons qui forment un carré horizontal de 7 m de côté.

Chaque sommet du carré formé par les néons est relié à une arête de la pyramide grâce à un filin vertical de 1 m de longueur.

1. A quelle distance du sommet de la pyramide les quatre filins sont-ils fixés ?
2. A quelle hauteur du sol se trouvent les néons ?



### Exercice n°2

Just an average box

5 points

In a sequence of six numbers, every number after the first two is the average of the previous two numbers.  
The 4<sup>th</sup> number in the sequence is 22 and the 6<sup>th</sup> number in the sequence is 45.  
Determine all six numbers in the sequence.

|   |   |   |    |   |    |
|---|---|---|----|---|----|
| ? | ? | ? | 22 | ? | 45 |
|---|---|---|----|---|----|

**Exercice n°3****A côté de la plaque****5 points**

Les numéros d'immatriculation en Epsilonie sont composés de deux lettres et trois chiffres.

Les plaques sont immatriculées avec le système suivant :

de **AA-001** à **AA-999** puis de **AB-001** à **AB-999** on progresse jusqu'à **AZ-999**.

La suivante est **BA-001** et ainsi de suite.

Le 1er avril 2014, la dernière plaque mise en circulation fut **CK-854**.

Ce jour-là, un accident survint dans le village de Sigmato.

Le chauffard responsable de l'accident s'enfuit à bord de son véhicule. Arrivé sur les lieux de l'accident, un gendarme enquêta.

1. Le gendarme interrogea M. Iota, témoin de l'accident.  
Celui-ci ne se souvint que de la première lettre de la plaque : C .  
Combien de véhicules immatriculés correspondent à cette information ?
2. Le gendarme interrogea Mme Kappa. Celle-ci se souvint qu'il y avait le chiffre 7 dans le numéro d'immatriculation.  
Avec cette nouvelle information, combien de véhicules immatriculés reste-t-il maintenant ?
3. Puis le gendarme interrogea Mme Lambda. Celle-ci se souvint que la partie numérique de la plaque était palindromique (comme par exemple : 181, 525...).  
Finalement, combien de véhicules immatriculés suspects reste-t-il ?

**Exercice n°4****La face cachée****5 points**

Quatre amis installés autour d'une table regardent un dé à jouer.

Chacun voit trois faces du dé. Le premier dit qu'il voit 7 points noirs en tout, le second 10, le troisième 15 et le dernier 12.

Combien y a-t-il de points sur la face cachée ?

Rappel : La somme de deux faces opposées d'un dé est toujours égale à 7.

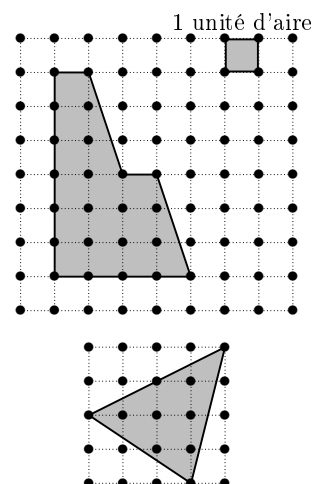
(d'après Rallye math d'Aquitaine)

**Exercice n°5****Pick, l'as des carreaux****8 points**

On considère un quadrillage formé de carrés de côté une unité de longueur.

1. (a) Déterminer l'aire exacte de l'hexagone ci-contre, exprimée en unités d'aire.  
(b) Georg explique qu'il a calculé l'aire de ce polygone d'une autre façon :  
« J'ai compté le nombre  $b$  de points du quadrillage situés sur le bord du polygone, puis le nombre  $i$  de points du quadrillage situés à l'intérieur du polygone.  
L'aire est égale à  $\mathcal{A} = i + \frac{b}{2} - 1$ . »  
Vérifier que la méthode de Georg donne le bon résultat.
2. Alexander dit : « La formule de Georg est encore vraie pour le triangle ci-contre. »  
Qu'en pensez-vous ?

Le mathématicien autrichien Georg Alexander PICK a montré en 1899 que la formule était valable pour tous les polygones dont les sommets sont des points du quadrillage.



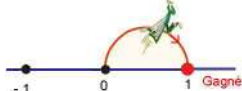
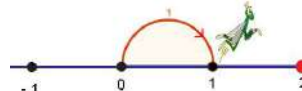
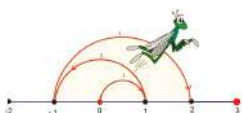
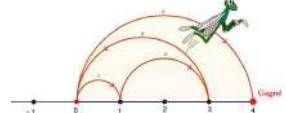
3. Construire un octogone dont les sommets sont des points du quadrillage et qui a pour aire 10 unités d'aire.

### Exercice n°6

### Les "Cricket Numbers" de la sauterelle

8 points

Sur une ligne graduée régulièrement par les nombres entiers relatifs une sauterelle effectue, au départ de zéro, des bonds consécutifs de longueur croissante soit en avant soit en arrière. Elle doit commencer par un bond d'une unité, puis de deux unités à partir du point où elle se trouve, puis de trois unités à partir du nouveau point, etc ... L'objectif pour elle est que son dernier bond (le  $n$ -ième) – de longueur  $n$  – lui permette de tomber exactement sur le nombre  $n$ , dans ce cas  $n$  est un "Cricket Number". (au cours de ses bonds intermédiaires, elle a parfaitement le droit de dépasser le nombre  $n$ , ou même d'aller à gauche de 0).

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"><math>n = 1</math></p>  <p>La sauterelle fait un bond de 1 unité en avant. Elle tombe en 1! <b>Gagné!</b><br/>1 est un "Cricket Number"</p>                                                                           | <p style="text-align: center;"><math>n = 2</math></p>  <p>La sauterelle fait un bond de 1 unité vers l'avant, puis de 2 unités vers l'avant. Elle ne retombe pas en 2 mais en 3. <b>Essaye encore!</b></p>                                                     |
| <p style="text-align: center;"><math>n = 3</math></p>  <p>La sauterelle effectue un bond de 1 unité vers l'avant, puis de 2 unités vers l'arrière, puis de 3 unités vers l'avant. En trois bonds, elle devait tomber en 3. <b>Essaye encore!</b></p> | <p style="text-align: center;"><math>n = 4</math></p>  <p>La sauterelle effectue un bond de 1 puis de 2 unités vers l'avant puis de 3 (vers l'arrière) puis de 4 vers l'avant et tombe sur le 4 comme attendu. <b>Gagné!</b><br/>4 est un "Cricket Number"</p> |

1. 3 et 8 sont-ils des "Cricket Numbers" ?
2. 5 est un "Cricket Number". Dessiner une suite de bonds possibles sur une droite graduée.
3. A partir de 5, la sauterelle peut-elle atteindre 9 avec quatre bonds supplémentaires ?
4. Quels sont les sept premiers "Cricket Numbers" (non nuls) ?

### Exercice n°7

### Un exercice qui ne manque pas de sel

8 points



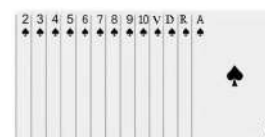
Un saunier veut créer des marais salants formant un rectangle longé par la mer, d'une superficie de 43,56 ha. Il dispose de 2420 m de grillage pour les clôturer. Sachant qu'aucune clôture n'est utilisée le long de la mer, lui est-il possible de clôturer son terrain ?

### Exercice n°8

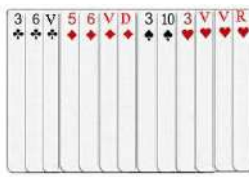
### Mais où est donc passée Argine ?

8 points

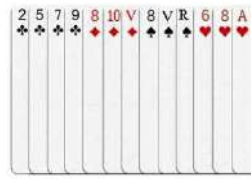
Judith, Rachel et Pallas jouent aux cartes avec deux jeux de 52 cartes. Dans chaque jeu, il y a 4 couleurs (trèfle, carreau, cœur, pique) de 13 cartes chacune. Les 13 cartes sont classées par ordre de valeur comme ci-contre.



Voici les trois « mains » distribuées. La pioche est constituée du reste des cartes non distribuées.



Judith



Rachel



Pallas

1. Si Judith tire une carte en premier dans la pioche, quelle est la probabilité qu'elle tire une carte lui permettant de faire un carré? (Un carré est formé de 4 cartes de même valeur et de couleurs différentes, par exemple : 4 as obligatoirement de trèfle, carreau, pique et cœur.)
2. Si Rachel tire une carte en premier, quelle est la probabilité qu'elle tire une carte lui permettant de faire une tierce? (Une tierce est formée de 3 cartes de la même couleur qui se suivent, par exemple : .)
3. Si Pallas tire une carte en premier, quelle est la probabilité qu'elle tire une carte lui permettant de faire une quinte? (Une quinte est formée de 5 cartes de la même couleur qui se suivent, par exemple : .)

# Rallye mathématique du Centre et du Congo

## Épreuve officielle

Mardi 17 mars 2015

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.  
Les solutions partielles seront examinées.

### Exercice n°1

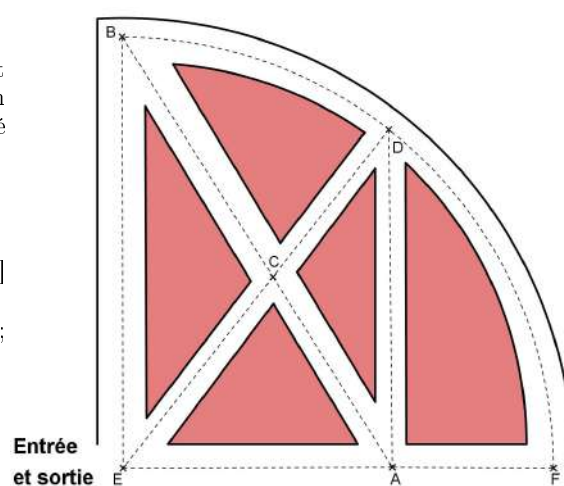
### Le jardin de Jean

#### 12 points

Jean, qui est employé à l'entretien du parc d'un château, doit passer la tondeuse dans toutes les allées engazonnées d'un ancien jardin ayant la forme d'un quart de disque constitué de cinq parterres de fleurs.

Voici des indications concernant ce jardin :

- l'entrée et la sortie ne peuvent se faire qu'en E ;
- les allées [BE] et [DA] sont perpendiculaires à l'allée [EF] qui passe par A ;
- l'allée  $\widehat{BF}$  est un quart de cercle de centre E passant par D ;
- les allées [BA] et [DE] se coupent en C ;
- Par mesure à 0,1 m près, on a :  
 $EC = 75$  m ,  $CD = 45$  m et  $BC = 96$  m .



1. Hier, Jean a passé la tondeuse dans toutes les allées de ce jardin. Il a fait le trajet suivant :  
 $E \rightarrow A \rightarrow F \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow E$   
Calculer la longueur de son trajet. (Arrondir les longueurs des allées au mètre près.)
2. Après avoir passé la tondeuse, Jean se dit que son trajet n'est certainement pas le plus court pour entretenir toutes ces allées. Il se demande alors quel trajet emprunter pour avoir le chemin le plus court possible.  
Proposer un chemin, le plus court possible, pour l'entretien de ces allées et en donner sa longueur.

### Exercice n°2

### Boxed Products

#### 5 points

A positive integer is to be placed in each box. Integers may be repeated, but the product of any four adjacent integers is always 120. Determine all possible values for  $x$ .

|  |  |   |  |  |   |  |     |  |  |   |  |  |
|--|--|---|--|--|---|--|-----|--|--|---|--|--|
|  |  | 2 |  |  | 4 |  | $x$ |  |  | 3 |  |  |
|--|--|---|--|--|---|--|-----|--|--|---|--|--|

**Exercice n°3****Le cryptex****8 points**

Dans le « Da Vinci Code », Dan Brown fait utiliser cet objet (voir ci-contre).

C'est une sorte de coffre-fort portable, capable de contenir des messages.

L'idée originale proviendrait de Léonard de Vinci.

Ce cryptex fonctionne comme un antivol de vélo. C'est un mot de cinq lettres qui actionnera la serrure et permettra d'ouvrir le cylindre. Ce cylindre contient un papier où a été inscrit un message.

Ce papier est enroulé autour d'un tube en verre fin contenant un produit chimique, ce qui empêche toute ouverture de force du cryptex pour obtenir le message : cela briserait le tube de verre et répandrait le produit chimique sur le papier qui deviendrait dès lors illisible.

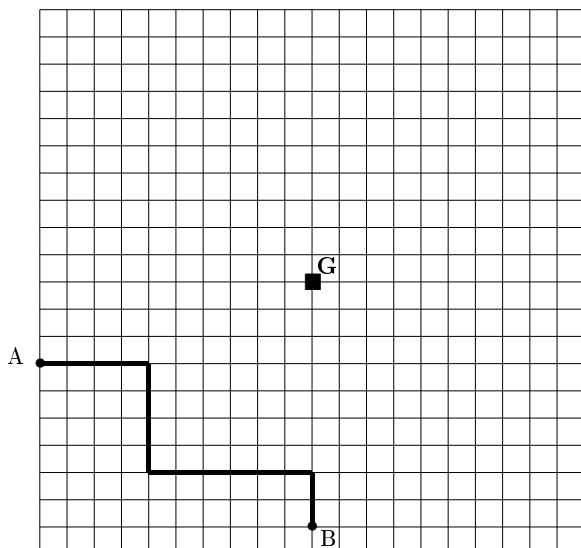
Le cryptex est composé de cinq rouleaux, chacun comportant toutes les lettres de l'alphabet dans l'ordre usuel.

Ils sont tous sur la position donnant AAAAA au départ.

Pour découvrir le code et ouvrir le cryptex, John teste toutes les combinaisons en actionnant les rouleaux de la façon suivante :

la 1<sup>re</sup> combinaison testée est AAAAA, la 2<sup>e</sup> AAAAB, la 3<sup>e</sup> AAAAC, etc. Ainsi, la 26<sup>e</sup> combinaison testée est AAAAZ, puis la 27<sup>e</sup> AAABA, la 28<sup>e</sup> AAABB, la 29<sup>e</sup> AAABC, etc.

John met en moyenne 2 secondes pour tester chaque combinaison. Combien de temps (jours, heures, minutes et secondes) lui faudra-t-il pour ouvrir cet objet sachant que le mot permettant l'ouverture est E U L E R ?

**Exercice n°4****La distance du taxi****5 points**

Un taxi se déplace dans la ville de *Circularix* où les rues forment toutes un quadrillage comme indiqué sur la figure ci-contre. Pour mesurer un trajet sur ce quadrillage, on compte le nombre de côtés des carrés parcourus de longueur 1 unité. Il n'y a pas de sens interdits.

Le garage du taxi est situé à l'origine **G** (indiquée sur la figure).

Par exemple, la longueur du trajet dessiné du point A au point B est de 16 unités (10 à l'horizontale et 6 à la verticale). Il n'y a pas de trajet entre A et B plus court que celui-ci mais d'autres trajets de même longueur sont possibles. On dit alors que la taxi-distance de A à B est de 16 unités. C'est la définition de la "distance du taxi".

Une cliente appelle le taxi. Elle lui dit qu'elle se trouve à une taxi-distance de 7 unités du garage **G**. Sur le quadrillage, à découper et à coller sur votre feuille-réponse, marquer tous les points où peut se trouver la cliente.

**Exercice n°5****Solidarité avec le Congo****5 points**

Un petit groupe de jeunes français a entendu dire qu'une équipe de cyclistes amateurs du Congo avait beaucoup de mal à se procurer des pneus et des chambres à air pour leurs vélos de course. Pour leur venir en aide, ils ont collecté 1305 € grâce à des actions bénévoles. Dans un grand magasin de la Région Centre, les pneus « course » valent 22 € pièce et les chambres à air correspondantes valent 9 € pièce.

Ils se rendent compte qu'ils ne peuvent pas acheter avec la somme de 1305 € exactement le même nombre de pneus et de chambres à air pour avoir des roues complètes. Ils décident donc d'acheter le maximum de roues complètes (pneu plus chambre à air) et d'utiliser le reliquat (reste des fonds disponibles) pour acheter des pneus ou des chambres à air supplémentaires. Ils veulent absolument tout dépenser.

Combien de pneus et de chambres à air doivent-ils acheter ?

### Exercice n°6

### Le trajet s'enracine

8 points

Sur un quadrillage formé de carrés de côté une unité, on construit des trajets d'un point de départ D jusqu'à un point d'arrivée A. Ces trajets sont formés d'une suite de segments consécutifs qui ne se coupent pas, de longueurs strictement croissantes et dont chaque extrémité est un point du réseau.

Par exemple, le trajet représenté sur la *fig a* ci-dessous a pour longueur :  $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{4}$

1. Donner de la même façon la longueur du trajet représenté sur la *fig b* ci-dessous.
2. Tracer sur le quadrillage de la *fig c* (à découper et à coller sur la feuille-réponse) un trajet de D à A dont la longueur est :  $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{8} + \sqrt{9} + \sqrt{10}$
3. Tracer sur le quadrillage de la *fig d* (à découper et à coller sur la feuille-réponse) un trajet de D à A le plus long possible et donner sa longueur.

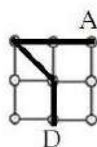


fig a

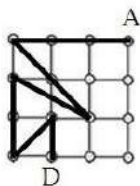


fig b

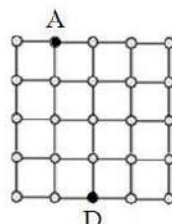


fig c

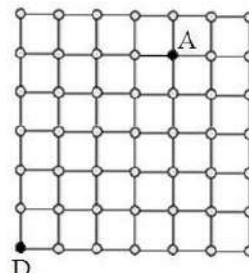


fig d

### Exercice n°7

### A voir la dalle

8 points

Jean-Pierre vient d'acheter un nouveau téléviseur pour remplacer l'ancien, tombé en panne.

Il remarque que les deux téléviseurs ont des dimensions extérieures identiques de 102 cm sur 63 cm. La diagonale de la dalle de l'écran du nouveau téléviseur est affichée par le constructeur à 117 cm alors que la diagonale de l'ancien mesurait exactement 104 cm. Jean-Pierre se dit que la différence doit provenir du cadre de largeur régulière qui entoure les écrans. Le cadre est beaucoup plus fin sur le nouveau, il ne mesure que 1 cm de large.

1. Vérifier que la diagonale de la dalle du nouveau téléviseur mesure 117 cm en arrondissant au cm près.
2. Trouver la largeur du cadre qui entourait l'ancien téléviseur de Jean-Pierre.

### Exercice n°8

### Ne jetons pas les pions !

8 points

Deux joueurs jouent à un jeu qui utilise un plateau carré de 36 cases numérotées de A1 à F6 et 2 sacs. Le 1<sup>er</sup> sac contient 13 pions bleus, 7 pions rouges, 7 pions verts et 9 pions jaunes. Le 2<sup>d</sup> sac contient 36 jetons portant chacun le numéro d'une des cases de A1 à F6. Avant de jouer, on prend dans le 1<sup>er</sup> sac un pion rouge, un pion vert, un pion bleu et un pion jaune que l'on pose respectivement sur les cases B2, B5, E2, E5. Puis on enlève ensuite du 2<sup>d</sup> sac les jetons des cases B2, B5, E2, E5.

Avant chaque tour de jeu, le joueur doit choisir l'une des deux options suivantes :

- **Option 1** : il prend en regardant dans le 1<sup>er</sup> sac un pion de la couleur de son choix puis il tire au hasard dans le 2<sup>d</sup> sac un jeton (qui ne sera pas remis en jeu) indiquant le numéro de la case où il devra poser son pion de couleur.
- **Option 2** : il choisit en regardant dans le 2<sup>d</sup> sac un jeton (qui ne sera pas remis en jeu) indiquant le numéro de la case où il va poser le pion de couleur qu'il tire au hasard dans le 1<sup>er</sup> sac.

La règle du jeu impose que deux pions de même couleur ne peuvent pas se trouver posés sur deux cases voisines, que ce soit horizontalement, verticalement ou en diagonale. Dès qu'un joueur ne peut plus poser son pion, il a perdu.

1. La partie commence, le 1<sup>er</sup> joueur choisit l'option 1 avec un pion de couleur jaune.  
Quelle est la probabilité qu'il perde ?  
Il tire ensuite un jeton indiquant la case C4 et pose son pion jaune en C4. Il n'a pas perdu, la partie peut continuer.
2. Le 2<sup>d</sup> joueur prend l'option 2 et choisit le jeton indiquant la case F6. Quelle est la probabilité qu'il perde ?  
Il tire alors un pion bleu du 1<sup>er</sup> sac et le pose en F6. Il n'a pas perdu, la partie peut continuer.
3. Après plusieurs coups, on arrive à une situation où aucun joueur n'a perdu et en plus des pions déjà posés précédemment, il y a des pions bleus en A1, A4, B6, C2 et D5, des pions rouges en A5, D1, D6 et F1, des pions verts en A2, C1, D3, E6, F2 et F4, des pions jaunes en B1, D2 et F3.  
Que doit décider de jouer le prochain joueur pour avoir le moins de chances de perdre ? (On donnera toutes les possibilités.)



# RALLYE MATHÉMATIQUE DU CENTRE ET DU CONGO

## Épreuve préparatoire

Décembre 2015

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.  
Les solutions partielles seront examinées.  
Bon courage et rendez-vous le 15 mars pour l'épreuve officielle.

### Exercice n°1

Ça ne tourne pas rond !

5 points

Par rapport à la case grisée **1** :

- le nombre 10 est 1 case à droite et 2 cases en haut ;
- le nombre 16 est 2 cases à gauche et 1 case en bas.

En poursuivant l'enroulement de la même façon, préciser la position du nombre 2015 par rapport à la case grisée **1**.

|    |    |    |    |  |
|----|----|----|----|--|
| 13 | 12 | 11 | 10 |  |
| 14 | 3  | 2  | 9  |  |
| 15 | 4  | 1  | 8  |  |
| 16 | 5  | 6  | 7  |  |
| 17 | 18 | 19 |    |  |

### Exercice n°2

Le Carré de POLYBE

5 points



|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | A | B | C | D | E |
| 2 | F | G | H | I | J |
| 3 | K | L | M | N | O |
| 4 | P | Q | R | S | T |
| 5 | U | V | X | Y | Z |

Polybe, un historien grec (vers 200 – 125 av. J.-C.), est à l'origine du premier procédé de chiffrement par substitution. C'est un système de transmission basé sur un carré de 25 cases. Chaque lettre peut être ainsi représentée par un groupe de deux chiffres : celui de sa ligne suivi de celui de sa colonne.

Ainsi : "E" = 15, "U" = 51, "N" = 34 ...

Mais ce codage est peut-être un peu simple. On décale alors l'alphabet avec un mot de passe... Par exemple, si le mot de passe est ELECTRICITE, on commence à remplir le carré avec les lettres de ce mot, en ne gardant que la première occurrence de chaque lettre, ce qui donne E L C T R I, puis on complète le tableau avec les lettres inutilisées dans l'ordre alphabétique. (voir ci-contre)

*Le W n'est pas utilisé. Au besoin, on emploie le V à sa place.*

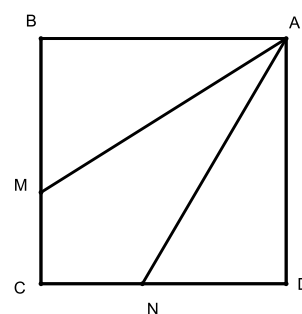
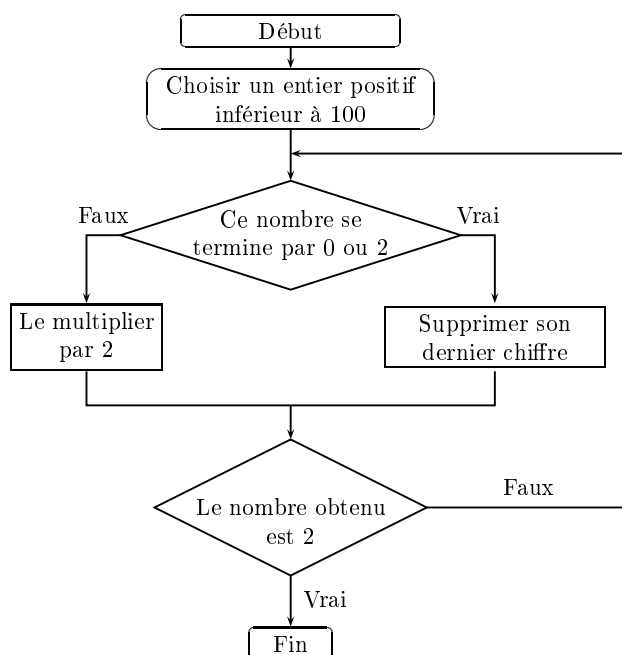
Que se cache-t-il derrière le message chiffré ci-dessous ? Pour le découvrir, il faut le SESAME.

**41153212214531234244121431124422123413213413111112**

|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | E | L | C | T | R |
| 2 | I | A | B | D | F |
| 3 | G | H | J | K | M |
| 4 | N | O | P | Q | S |
| 5 | U | V | X | Y | Z |

**Exercice n°3****Un puits pour trois****8 points**

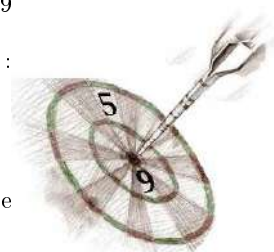
Trois frères ont hérité d'un champ carré de 120 m de côté, qu'ils veulent se partager comme indiqué sur la figure car un point d'eau se trouve en A. Où placer le point M sur le segment [BC] et le point N sur le segment [CD] pour que les superficies des trois parcelles soient égales ? Comparer les périmètres des trois parcelles obtenues.

**Exercice n°4****Quitte ou double****8 points**

1. Appliquer cet algorithme aux entiers 19 et 29.
2. L'appliquer à l'entier 43. Que remarque-t-on ?
3. Déterminer tous les entiers compris entre 1 et 100 pour lesquels l'algorithme « tourne » indéfiniment.

**Exercice n°5****Un exercice bien ciblé****5 points**

1. On peut lancer autant de fléchettes que l'on veut sur cette cible. On marquera 5 ou 9 points à chaque lancer.  
Bien sûr, tous les scores sont des nombres entiers et certains scores sont impossibles : 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 par exemple.
  - (a) Peut-on obtenir les scores suivants : 21 ? 44 ?
  - (b) Existe-t-il un plus grand score que l'on ne puisse pas atteindre ?
2. Si au lieu de 5 et 9, on choisit 6 et 8, existe-t-il un plus grand score que l'on ne puisse pas atteindre ?
3. Si au lieu de 5 et 9, on avait 2 et 3, quel serait le plus grand score que l'on ne puisse pas atteindre ?



**Exercice n°6****De quoi prendre de la hauteur****12 points**

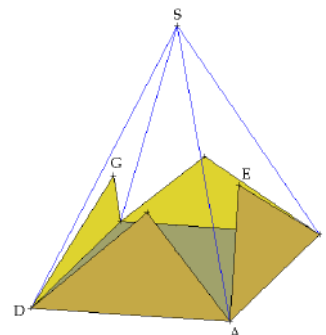
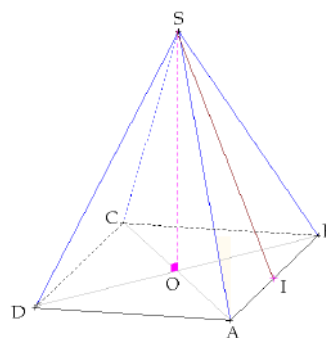
On considère une pyramide régulière  $SABCD$  de sommet  $S$  et dont la base est un carré  $ABCD$  de centre  $O$ , de 4 cm de côté.

- Sur la face  $SAB$ , on trace un triangle  $ABE$  de telle sorte que si on le découpait pour le rabattre sur la base, le point  $E$  coïnciderait avec le centre  $O$  du carré  $ABCD$ .

On trace sur les trois autres faces triangulaires de la pyramide, trois autres triangles  $CBF$ ,  $CDG$  et  $ADH$  superposables à  $ABE$  de telle sorte que si on découpait les quatre triangles pour les rabattre sur la base, ils reformeraient le carré de base.

- De plus, on suppose que  $EG = 2$  cm.
- On admettra que les points  $E$ ,  $F$ ,  $G$  et  $H$  sont dans un même plan horizontal.

1. Calculer la valeur exacte de la hauteur  $SI$  du triangle  $SAB$ .
2. Tracer en vraie grandeur un patron de cette pyramide avec les quatre triangles dessinés sur les faces.
3. Calculer la valeur exacte de la hauteur  $SO$  de cette pyramide.



# Rallye mathématique du Centre et du Congo

## Épreuve officielle

Mardi 15 mars 2016

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.  
Les solutions partielles seront examinées.

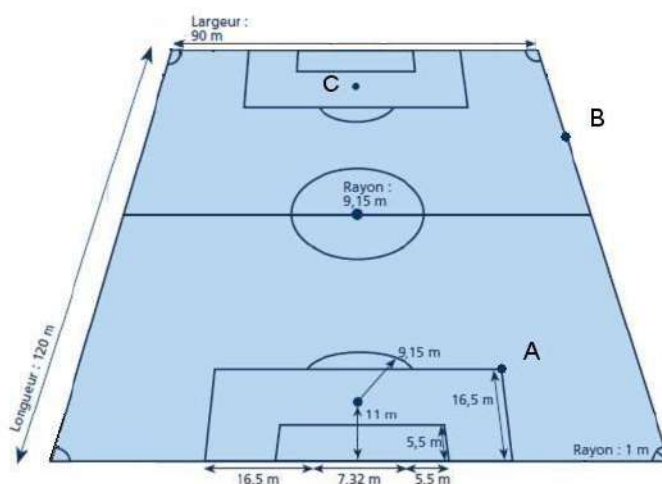
### Exercice n°1

### Les lignes du terrain

12 points

Jérôme et son collègue Florent sont jardiniers pour un club de football. En début de saison, la pelouse est refaite. Ils doivent donc refaire le traçage total du terrain.

1. Reproduire à l'échelle 1/400 la moitié de ce terrain de football avec toutes ses lignes, ce qui correspond au camp d'une équipe.
2. Quelle est la longueur totale des lignes à tracer par les deux jardiniers? (arrondir au dm près)
3. Le terrain est prêt à recevoir les joueurs, l'entraînement peut commencer.  
L'entraîneur souhaite travailler un schéma tactique particulier dans lequel un joueur A envoie le ballon sur un joueur B placé sur la ligne de touche qui doit ensuite l'envoyer au joueur C placé au point de pénalty adverse. Où le joueur B doit-il se placer sur la ligne de touche pour que le ballon parcoure le minimum de distance possible?



### Exercice n°2

### Les aventuriers de $\rho\lambda$

5 points

Sur l'île de  $\rho\lambda$ , deux équipes de 8 joueurs s'affrontent tous les trois jours lors d'une épreuve qui a toujours lieu l'après-midi. A l'issue de chaque épreuve un joueur est éliminé.

Le premier jour de l'aventure est distribué à chaque équipe un sac de 6 kg de riz. La première épreuve a lieu le troisième jour de l'aventure. Quand il reste 8 joueurs, le jeu devient individuel et le riz restant est mis en commun. L'aventure s'arrête quand il reste un seul joueur.

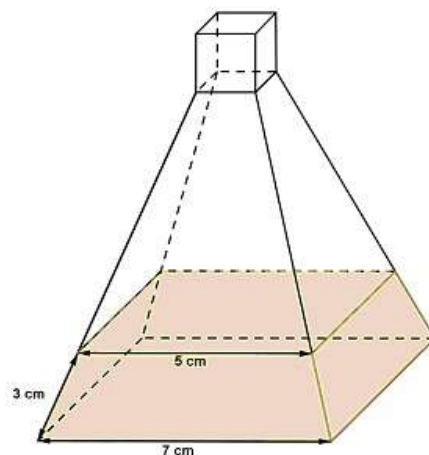
Tous les joueurs mangent la même quantité de riz chaque jour, lors d'un unique repas qui a lieu tous les matins. Les joueurs éliminés ne mangent plus de riz. Sachant qu'à la fin de l'aventure tout le riz a été consommé, quelle est la quantité quotidienne de riz que pourra manger un candidat?



**Exercice n°3****Qui a raison ?****12 points**

Un flacon de parfum est constitué à partir d'une pyramide régulière à base carrée de côté 7 cm, tronquée en son sommet. Le bouchon du parfum qui est posé sur la pyramide tronquée est un cube. Ce flacon est largement entamé. Christelle affirme à Laëtitia qu'il reste assez de parfum dans le flacon pour se parfumer pendant un an à raison de quatre pulvérisations tous les matins. Laëtitia qui pense que ce n'est pas vrai a pris des mesures sur le flacon. Elles sont indiquées sur le schéma ci-contre. Elle a aussi trouvé sur internet qu'une pulvérisation envoie dans l'atmosphère environ 0,07 mL de parfum à chaque fois.

Qui a raison ?

**Exercice n°4****Le codage Fairplay de Playfair****9 points**

Le codage Playfair, a été popularisé par Lyon Playfair, mais il a été inventé par Sir Charles Wheatstone, un des pionniers du télégraphe électrique. Ce codage nécessite une grille 5×5 contenant 25 lettres.

Pour la créer, on utilise les 26 lettres de l'alphabet auxquelles on enlève le W et on place les 25 lettres restantes dans un ordre que l'on choisit dans une grille 5×5 vierge. Pour le codage, on remplace les W du texte par des V.

Le texte à coder est d'abord découpé en groupes de deux lettres à partir de la première.

Si le nombre de lettres du texte est impair alors on ne code pas la dernière lettre. Ensuite, on code chaque couple de lettres en utilisant le principe décrit ci-dessous avec la grille donnée en exemple.

- Si deux lettres sont sur la même ligne, on prend les deux lettres qui les suivent immédiatement à leur droite. Exemples : FJ sera remplacé par US et VE par EC.
- Si deux lettres sont sur la même colonne, on prend les deux lettres qui les suivent immédiatement en dessous. Exemples : BJ sera remplacé par JL et RM par ID.
- Si les deux lettres sont identiques on les considère comme étant sur la même ligne, on prend donc deux fois la lettre qui suit à droite.  
Exemples : AA sera remplacé par RR et ZZ par BB.
- Si les deux lettres ne sont ni sur la même colonne ni sur la même ligne (par exemple : O et K), elles sont donc sur les coins d'un rectangle, elles sont alors codées par les deux lettres figurant sur les deux autres coins du rectangle (donc V et A). La première des deux lettres codées est sur la même ligne que la première lettre à coder.  
Exemples : BI devient DC, GO devient YV.

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| B | Y | D | G | Z |
| J | S | F | U | P |
| L | A | R | K | X |
| C | O | I | V | E |
| Q | N | M | H | T |

|   |   |   |
|---|---|---|
| A | R | K |
| O | I | V |

Mathilde et Maëlle utilisent ce système de codage avec la grille ci-dessus pour communiquer en toute discrétion.

- Aider Maëlle à coder le message suivant : JE PEUX JOUER DEMAIN MATIN
- Décoder le message que Mathilde lui a envoyé en réponse : PCYIOFSRMIITOPZIEIMIS
- Les filles ont dû changer leur grille de codage. Mathilde envoie :  
JTFDXQSXEKKQIYRKLKLU qui veut dire PEUT ETRE SAMEDI SOIR.  
Compléter la grille ci-contre pour trouver la grille de codage utilisée par Mathilde.

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
|   |   | Z |   |   |
| X |   |   |   | E |
| L | N |   |   |   |
| O | C | M |   |   |
| H | P | G | V |   |

**Exercice n°5****Du rouge au vert****5 points**

Un jeu sur tablette tactile est basé sur un carré quadrillé dont les cases carrées peuvent prendre la couleur verte ou la couleur rouge. Lorsqu'on touche une case du doigt, la case touchée et les cases qui ont un côté commun avec elle changent de couleur. Celles qui n'ont aucun côté commun avec elle gardent leur couleur (y compris celles qui ont un sommet commun avec elle mais aucun côté commun).

En début de partie, toutes les cases sont rouges. Le joueur a gagné quand toutes les cases sont vertes.

1. Le niveau 1 se joue sur un rectangle composé de 4 cases.

|   |   |
|---|---|
| a | b |
| c | d |

Proposer une suite de coups permettant de gagner en un minimum de coups. La décrire avec les lettres identifiant les cases touchées.

2. Le niveau 2 se joue sur un rectangle composé de 9 cases.

|   |   |   |
|---|---|---|
| a | b | c |
| d | e | f |
| g | h | i |

Proposer une suite de coups permettant de gagner en un minimum de coups. La décrire avec les lettres identifiant les cases touchées.

**Exercice n°6****Le jeu des cavaliers****6 points**

Le joueur dispose d'une grille de 8 colonnes sur 4 rangées et de 4 réglettes (les « cavaliers ») numérotées de 1 à 4. On a représenté ci-contre les cavaliers n°1, n°2, n°3 et n°4.

Par exemple, le cavalier n°4 est constituée de 5 cases, la première et la dernière portent le chiffre 4 et les cases centrales sont vides.

|   |   |   |   |   |   |  |  |
|---|---|---|---|---|---|--|--|
| 1 | 1 |   |   |   |   |  |  |
| 2 | / |   |   | 2 |   |  |  |
| 3 | / | / | / | 3 |   |  |  |
| 4 | / | / | / | / | 4 |  |  |

Il s'agit de placer tous les « cavaliers » sur la grille sans chevauchement tel qu'il n'y ait qu'un cavalier par ligne et qu'un seul chiffre par colonne. Voici un exemple de position convenable avec une grille de 8 colonnes et 4 cavaliers numérotés de 1 à 4 :

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | / | / | / | 4 |   |   |   |
|   |   | 3 | / | / | 3 |   |   |
|   | 2 | / | 2 |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   | 1 | 1 |

Cette solution est représentée par le nombre suivant : 42 324 311.

- Quels sont les autres nombres solutions avec une grille de 8 colonnes et 4 rangées avec des cavaliers numérotés de 1 à 4 ?
- On dispose maintenant d'une grille de 10 colonnes et 5 rangées avec des cavaliers numérotés de 1 à 5. Quels sont les nombres solutions ?

# RALLYE MATHÉMATIQUE DU CENTRE ET DU CONGO

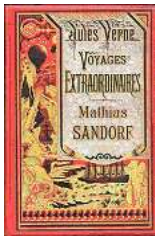
## Épreuve préparatoire - Décembre 2016

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.  
Les solutions partielles seront examinées.  
Bon courage et rendez-vous le 14 mars pour l'épreuve officielle.

### Exercice n°1

### Le cache secret, le message se transforme

8 points

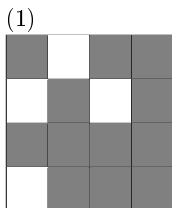
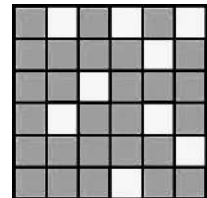


Après avoir lu le roman Mathias Sandorf de Jules Verne, Maxence et Sarah décident d'utiliser le même système de codage que celui évoqué dans le livre pour s'écrire des messages secrets.

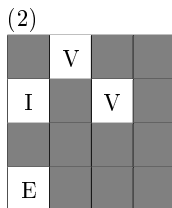
Le principe de ce codage est le suivant : on utilise un cache secret et une grille  $4 \times 4$ ,  $5 \times 5$ ,  $6 \times 6$  ... selon la longueur du message. Le cache, de même dimension que la grille, possède des trous, comme celui du roman de Jules Verne (voir ci-contre).

Sur l'exemple ci-dessous on illustre comment le message

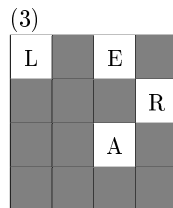
« VIVE LE RALLYE MATH » est codé en « LVEL IMVR ALAY ETEH ».



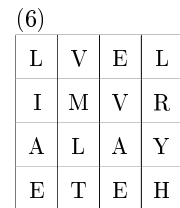
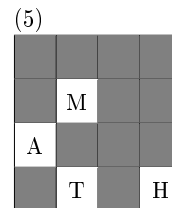
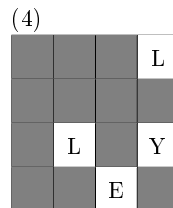
(1) Position initiale d'un cache  $4 \times 4$  sur une grille vide.



(2) On écrit les premières lettres du message dans les cases vides.



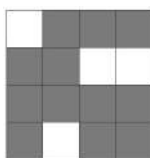
(3) Puis on fait tourner le cache d'un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre. On continue de remplir le message. (4) On refait tourner le cache et on continue d'écrire. (5) On tourne de nouveau le cache et on finit d'écrire le message.



(6) On enlève le cache et on obtient le message codé.

1. Afin de convenir d'un rendez-vous avec Sarah, Maxence désire coder le message suivant « A QUEL ENDROIT SE RENCONTRER ? » à l'aide de son cache  $5 \times 5$  représenté ci-contre dans sa position initiale.

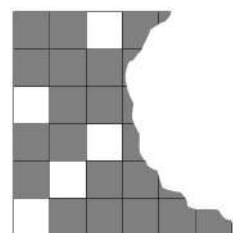
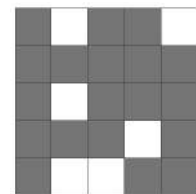
Quel message va-t-il envoyer à Sarah ? (Il place le ? au centre du carré)



2.

Sarah lui renvoie le message suivant « RTUR EEDV CHSA UPDA ».

Quel message va décrypter Maxence à l'aide de son cache  $4 \times 4$  représenté ci-contre dans sa position initiale ?



3. Pour écrire des messages plus longs, Maxence utilise un cache  $6 \times 6$  possédant 9 trous, cache qu'il a malheureusement abîmé. Voici le morceau restant représenté dans sa position initiale.

Reconstituer le cache.

**Exercice n°2****Les âges carrément parfaits****5 points**

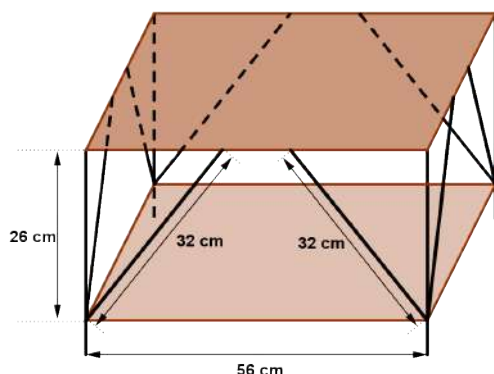
Maëlle qui aime beaucoup les mathématiques vient de fêter ses dix ans. Elle remarque que si elle écrit à la suite, l'un derrière l'autre, l'âge de sa grande sœur Pauline puis celui de son grand frère Guillaume, on obtient un carré parfait (c'est à dire le carré d'un nombre entier).

Elle a aussi remarqué que, curieusement, dans 31 ans, leurs âges rangés dans le même ordre formeront un autre carré parfait de quatre chiffres.

Quels sont les âges de Pauline et Guillaume ?

**Exercice n°3****Casier judicieux****8 points**

Christelle a dans son salon une table basse carrée comme celle qui est représentée ci-dessous. Elle est composée de deux plateaux en bois reliés par des tubes métalliques. Les dimensions sont données sur la figure.



Elle souhaite utiliser le plateau du dessous pour mettre un casier afin de ranger des magazines. Elle a donc acheté un casier qui a la forme d'un pavé droit, ouvert sur le dessus, dont le fond a pour dimensions 30 cm sur 45 cm et dont la hauteur mesure 17 cm.

Elle veut introduire le casier par un côté de la table en le faisant glisser sur le plateau du dessous. Il n'est pas question de l'incliner pour le faire rentrer.

Le casier que Christelle a acheté convient-il ?

**Exercice n°4****Jours fériés bien placés !****5 points**

Le 11 novembre 2016, Margot fête ses 9 ans avec toute sa famille. Nostalgique, sa maman se souvient que le jour de sa naissance était un dimanche férié.

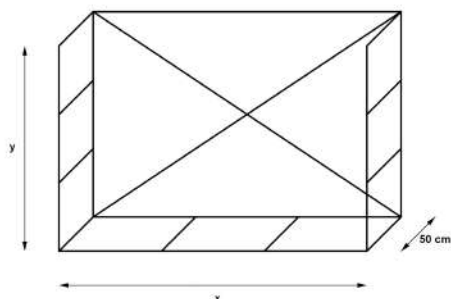
Son papa lui rappelle que toutes les années ne peuvent pas être aussi exceptionnelles que l'année 2002 pour la position de certains jours fériés. En effet, cette année-là, ni le 1er janvier, ni le 1er mai, ni le 8 mai, ni le 15 août, ni le 1er novembre, ni le 11 novembre, ni le 25 décembre ne tombaient un samedi ou un dimanche.



1. Le 1er janvier 2002 était un mardi. À quels jours de la semaine correspondaient les 1er mai, 8 mai, 15 août, 1er novembre, 11 novembre et 25 décembre ?
2. L'année 2024 (année bissextile) sera aussi exceptionnelle que l'année 2002. À quel jour de la semaine correspondra le 1er janvier 2024 ?

**Exercice n°5****Bûche, ô ma bûche !****8 points**

Une entreprise veut fabriquer une structure en tubes métalliques pour contenir un volume de  $1 \text{ m}^3$  afin de stocker des bûches de 50 cm de long. Le plan défini pour la structure est le suivant :

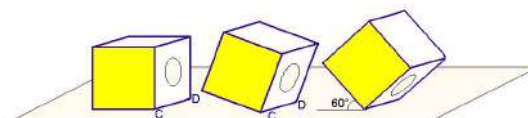
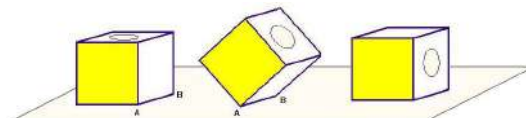


1. Quelle est la longueur totale de tubes métalliques nécessaires si  $x$  est égal à 1 m ? à 2 m ?
2. Déterminer l'arrondi au cm des dimensions  $x$  et  $y$  de la structure qui minimisent la longueur totale de tubes métalliques.

**Exercice n°6****Le cube lâche le bouillon****8 points**

Un réservoir cubique de 1 m de côté possède sur sa face supérieure une ouverture circulaire de 40 cm de diamètre, dont le centre est le même que celui du carré. Il contient 305 L d'eau.

1. On bascule avec précaution le réservoir sur le côté autour de l'arête  $[AB]$ . Que se passe-t-il ?
2. Le réservoir est ensuite incliné selon un angle de  $60^\circ$  en le faisant basculer autour de l'arête  $[CD]$ . Il est maintenu dans cette position jusqu'à l'arrêt de l'écoulement.
  - (a) On le remet dans sa position initiale. Quelle est la hauteur de l'eau restant dans le cube ? *On donnera la réponse en cm, arrondie au dixième.*
  - (b) De quel angle aurait-il fallu incliner le cube pour qu'il restât 100 L ?



# Rallye mathématique du Centre et du Congo

## Épreuve officielle

Mardi 14 mars 2017

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.  
Les solutions partielles seront examinées.

### Exercice n°1

### Gare à la « Catcher car »



6 points

Le 8 mai 2016 a eu lieu dans 34 villes du monde simultanément, une course à pied intitulée « Wings for life world run ». Cette course a pour but de recueillir des fonds pour la recherche sur la moelle épinière. Les participants commencent la course exactement en même temps dans les différents lieux officiels.

En France, la course avait lieu à Rouen et le départ était donné à 13 heures, heure française.

Le principe de la course est simple, courir le plus longtemps possible sans être rattrapé par la « catcher car ».

Il n'y a donc pas de ligne d'arrivée, un concurrent termine sa course dès que la « catcher car » le double.

La « catcher car » démarre 30 minutes après le départ des concurrents et roule à 15 km/h pendant 1 h. Puis elle roule à 16 km/h pendant une heure, puis 17 km/h pendant 1 h puis 20 km/h pendant 2 h et enfin 35 km/h jusqu'à ce qu'elle ait rattrapé tous les concurrents.

1. A 15 h 30, quelle est la distance parcourue par la voiture ?
2. Un concurrent a couru à une vitesse constante de 12,5 km/h. A quelle heure a-t-il été rattrapé ?
3. En 2016, le vainqueur (un italien) a parcouru 88,44 km. A quelle heure a-t-il été rattrapé ?

### Exercice n°2

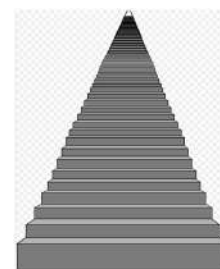
### Vaillant Michel !

5 points

Lors d'un voyage en Asie, Michel, par défi sportif, veut gravir l'escalier d'une des plus hautes tours du monde de façon originale. Il décide de le monter par sauts successifs.

Au premier saut il monte d'une marche, au second saut de deux marches, au troisième saut de trois marches, au quatrième saut de quatre marches. Au cinquième saut, il recommence par une marche, deux marches au sixième saut, puis progresse comme avant et ainsi de suite...

1. A quelle marche se trouve-t-il au bout de 73 sauts ?
2. Toujours vaillant après avoir passé 2000 marches, il se demande s'il posera le pied sur la 2017<sup>e</sup> marche. Qu'en pensez-vous ?

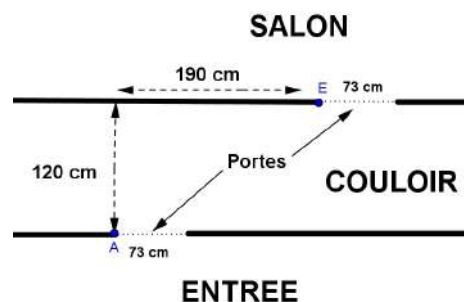


### Exercice n°3

### Ça passe ou pas ?

8 points

Joël veut commander sur internet un gros buffet très tendance tout en métal monté sur des roulettes. Le buffet choisi a pour longueur 260 cm, pour profondeur 40 cm et pour hauteur 70 cm. Il se demande s'il pourra faire rouler le buffet qui sera livré dans l'entrée jusque dans son salon.



Après avoir étudié la configuration de l'entrée et du salon, il apparaît que la seule possibilité pour le faire rouler jusqu'au salon, c'est d'essayer de le faire passer en longueur le plus près possible des montants des portes (points A et E sur le schéma de Joël ci-dessus). Le buffet choisi pourra-t-il être amené jusqu'au salon ?

**Exercice n°4****Argh ! Tu parles...****6 points**

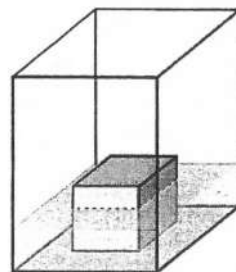
Il y a longtemps dans une tribu lointaine, les hommes et les femmes communiquaient à partir de trois cris : « argh », « irgh » et « orgh ». Voici une bribe de conversation de 3 personnes entendue au retour de la chasse au mammouth : l'un dit « irgh » ; un autre répond « argh orgh orgh » ; le troisième conclut par « irgh argh ».

1. Pour s'exprimer, les membres de cette tribu composent ces cris pour former des phrases d'au plus trois cris de longueur, la longueur d'une phrase étant le nombre total de cris qui la composent.  
Par exemple, la phrase « irgh » a une longueur de 1 et la phrase « orgh argh argh » a une longueur de 3.  
Combien de phrases différentes les membres de cette tribu peuvent-ils utiliser ?
2. Le temps passe ; une femme de la tribu se promène un jour au loin, au bord d'une rivière et rencontre un homme d'une autre tribu. Elle lui demande « argh irgh orgh » ; il répond « irgh urgh ». « urgh », dit-elle interloquée ; « urgh » reprend-il en levant les bras et lui tournant le dos.  
Notre tribu possède à présent quatre cris différents mais elle continue à former des phrases d'au plus trois cris de longueur.  
Combien de phrases différentes les membres de cette tribu peuvent-ils utiliser ?
3. L'évolution et le progrès suivent leur cours sur la Terre. La nécessité fait que pour communiquer dans le monde moderne, la tribu a besoin d'un milliard de phrases. Les membres de la tribu continuent de communiquer avec les seuls quatre cris « argh », « irgh », « orgh » et « urgh » mais doivent augmenter la longueur de leurs phrases. Jusqu'à combien doivent-ils augmenter cette longueur au minimum afin de s'intégrer dans le monde moderne ?

**Exercice n°5****Game of cubes****12 points**

Léo a 10 cubes pleins en acier, tous différents, numérotés de 1 à 10. Le numéro de chaque cube est la longueur de son arête en cm. Dans un vase en verre transparent, parallélépipédique de base carrée dont les dimensions intérieures sont 11 cm × 11 cm × 20 cm, il verse un demi-litre d'eau.

1. Léo prend un cube, le pose dans le vase et observe s'il dépasse le niveau de l'eau. Puis, il le retire et recommence avec chacun des autres cubes.  
Certains cubes dépassent le niveau de l'eau, comme sur le dessin ci-contre.  
Quels sont ces cubes ?
2. Sa sœur Léa le rejoint et lui dit : « les mettre un par un pour voir s'ils dépassent ou pas le niveau de l'eau, ce n'est pas très intéressant, essaie donc de mettre en même temps un maximum de cubes sous l'eau ».  
Léo reprend ses cubes et les pose au fond du vase les uns à côté des autres.  
Combien de cubes peut-il mettre au maximum et lesquels ?



3. Sa sœur lui dit « je peux faire mieux que toi ! ». A son tour, elle prend les cubes et les pose au fond du vase en en superposant certains. Combien de cubes peut-elle mettre au maximum et lesquels ?

**Exercice n°6****La chasse d'Olaf le pirate****9 points**

Olaf le « Renard » est en attente d'une proie qu'il sait en route vers l'Espagne. C'est « La Espléndida Gallina », gros galion chargé de richesses. La vigie de sa goélette lui signale à midi qu'on repère un navire qui ne peut être que celui qu'il attend. Par relevés, Olaf estime la vitesse du galion à 4 nœuds, détermine que son cap de route est plein Est et le situe à 10 milles au Nord de sa goélette. Pour ne pas multiplier les manœuvres, il décide de naviguer à cap constant (c'est à dire dans une même direction) pendant des tranches horaires d'une demi-heure chacune, en visant à chaque fois la position qui sera atteinte par le galion à la fin de la demi-heure. Il débute sa course aussitôt, à la vitesse de 8 nœuds, sachant qu'à chaque changement de cap il prendra plus de vent et que sa vitesse sera augmentée de 10 %.

1. Le schéma porté sur la feuille réponse jointe précise les positions initiales du galion G0 et de la goélette pirate R0. L'unité utilisée est de 2 cm pour 1 mille. Poursuivre ce schéma en plaçant les trois positions occupées par les deux navires à la fin de la première demi-heure, à la fin de la seconde demi-heure puis à la fin de la troisième.
2. Au moment où Olaf croise la route suivie par le galion, quelle distance a-t-il parcourue depuis son dernier changement de cap et à quelle distance est-il alors du galion ? (on arrondira les résultats au centième de mille)

*Informations : Le mille est l'unité de distance utilisée en marine. Les anglo-saxons le nomme « nautic mile ».  
Il équivaut à 1852 m. Le nœud vaut 1 mille/heure.*

# RALLYE MATHÉMATIQUE DU CENTRE ET DU CONGO

## Épreuve préparatoire - Décembre 2017

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.  
Les solutions partielles seront examinées.  
Bon courage et rendez-vous le 13 mars pour l'épreuve officielle.

### Exercice n°1

### Les nombres de Friedman

8 points

Un nombre de Friedman est un nombre entier qui est égal au résultat obtenu en appliquant une formule dans laquelle apparaissent TOUS les chiffres qui le composent et uniquement ceux là, chaque chiffre intervenant le nombre exact de fois où il est présent dans l'écriture de ce nombre. Dans cette formule, on peut utiliser des nombres écrits avec ses chiffres, des parenthèses, l'élevation à la puissance et les quatre opérations  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$ .

Dans la suite, les nombres utilisés sont écrits dans le système habituel de notation (en base 10).

Par exemple :  $25 = 5^2$ ,  $289 = (8 + 9)^2$ ,  $37668 = 6 \times 73 \times 86$ ,  $2048 = \frac{8^4}{2} + 0$ , etc.

Voici la liste des nombres de Friedman inférieurs à 10 000 :

25, 121, 125, 126, 127, 128, 153, 216, 289, 343, 347, 625, 688, 736, 1 022, 1 024, 1 206, 1 255, 1 260, 1 285, 1 296, 1 395, 1 435, 1 503, 1 530, 1 792, 1 827, 2 048, 2 187, 2 349, 2 500, 2 501, 2 502, 2 503, 2 504, 2 505, 2 506, 2 507, 2 508, 2 509, 2 592, 2 737, 2 916, 3 125, 3 159, 3 281, 3 375, 3 378, 3 685, 3 784, 3 864, 3 972, 4 088, 4 096, 4 106, 4 167, 4 536, 4 624, 4 628, 5 120, 5 776, 5 832, 6 144, 6 145, 6 455, 6 880, 7 928, 8 092, 8 192, 9 025, 9 216, 9 261.

Choisir un maximum de nombres dans la liste ci-dessus (parmi ceux qui n'ont pas été donnés en exemple) et montrer que ces nombres sont bien des nombres de Friedman.

### Exercice n°2

### Le code se crée

5 points

Dans ce codage, chaque lettre est remplacée par ses coordonnées obtenues grâce à la clé dans la grille. Pour coder un message avec la clé secrète MATHS, il faut commencer par supprimer la ponctuation puis associer à chaque lettre du texte ses coordonnées dans la grille. On a ainsi : a=MM, b=MA, c=MT ...

Si on a besoin d'utiliser la lettre W, on la remplacera par la lettre V.

| clé | M | A   | T | H | S |
|-----|---|-----|---|---|---|
| M   | a | b   | c | d | e |
| A   | f | g   | h | i | j |
| T   | k | l   | m | n | o |
| H   | p | q   | r | s | t |
| S   | u | v/w | x | y | z |

1. Avec la clé MATHS.

(a) Coder le message suivant : Pythagore est philosophe

(b) Décoder le message suivant : TSTH MSHHHS MAAHMSTH MSTH MMSMHSTSTTTTHMS

2. On a choisi un autre mot clé que MATHS.

Le message codé de la question 1 (b) devient : YNYO RNOOON RAAORNYO RNYO RRNRONYNYYYOORN

Quel était le mot clé ?

**Exercice n°3****L'écart d'heure****5 points**

Un horloger se voit confier deux montres pour réglage.

Le lendemain matin, un mardi, il les règle toutes les deux sur 8 heures puis les démarre au même instant lorsqu'il est exactement 8 heures sur son horloge de référence.

Au bout de quelque temps, il constate que l'une des montres prend une seconde de retard toutes les heures et l'autre deux secondes d'avance toutes les heures par rapport à son horloge de référence.



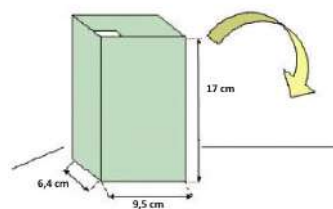
1. Au bout de combien de temps auront-elles exactement 7 minutes de différence?
2. Le mardi suivant, quelles heures affichent les deux montres lorsqu'il est exactement 8 heures à son horloge de référence?

**Exercice n°4****La brique de lait****5 points**

Une brique de lait a la forme d'un pavé droit de dimensions 6,4 cm, 9,5 cm et 17 cm. La face supérieure est munie, dans l'un des coins, d'un orifice carré de 2 cm de côté. Maxence a perdu le bouchon de cette ouverture, il sait que la brique n'est pas pleine mais il ne connaît pas la hauteur de lait restant.

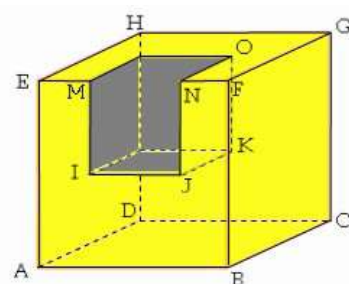
Il décide de ranger cette brique au réfrigérateur mais faute de place, il la couche horizontalement (voir schéma) et le lait ne coule pas!

Quelle est la hauteur maximale de lait contenu dans la brique lorsqu'elle est posée verticalement sur la face de dimensions 9,5 cm et 6,4 cm?

**Exercice n°5****Deux fourmis sur un cube « écupé »****8 points**

ABCDEFGH est un cube de 4 cm d'arête. Il est « écupé » d'un autre cube de 2 cm d'arête tel que  $EM = NF = 1$  cm (voir schéma ci-contre).

1. Réaliser un patron de ce cube écupé.
2. Une fourmi rouge part de A pour se rendre en O. Elle ne se déplace que sur les faces planes du solide. Elle emprunte le trajet AIKO.  
De la même façon, une fourmi noire part de A pour se rendre en O mais emprunte le trajet AJKO.  
Quelle est la fourmi ayant effectué le trajet le plus court?  
Tracer en rouge et en noir les deux trajets sur le patron.
3. Toujours en circulant sur les parties planes du solide, est-il possible d'emprunter un chemin plus court pour rejoindre O en partant de A?  
Si oui, donner sa longueur et le tracer en vert sur votre patron.

**Exercice n°6****Qui perd double !****5 points**

Trois joueurs entament une suite de trois parties où chacun dispose au début d'une certaine somme et n'ajoutera aucun euro en plus durant ces parties.

Ils conviennent que le perdant de chaque partie doublera l'avoir de chacun des deux autres en fin de cette partie.

Ils jouent les trois parties et perdent chacun une partie.

A la fin de la dernière partie, chacun possède 16 euros. De combien chacun disposait-il au début du jeu?

# Rallye mathématique du Centre et du Congo

## Épreuve officielle

Mardi 13 mars 2018

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.  
Les solutions partielles seront examinées.

### Exercice n°1

### Nombres Harshad

8 points

Les nombres Harshad sont les nombres entiers strictement positifs qui sont divisibles par la somme de leurs chiffres. Par exemple 7, 54, 110, 2010 sont des nombres Harshad.

1. Quel est le plus petit nombre qui n'est pas Harshad ?
2. Donner la liste de tous les nombres Harshad inférieurs à 200.
3. Donner un nombre Harshad s'écrivant avec 33 chiffres.
4. Donner un nombre Harshad s'écrivant avec 24 chiffres se terminant par 2.
5. Existe-t-il un nombre Harshad premier strictement supérieur à 7 ?

### Exercice n°2

### Éteindre le feu

5 points

Lors des incendies, il est fréquent que les pompiers utilisent des avions bombardiers d'eau aussi appelés canadairs.

A Bormes-les-Mimosas en juillet 2017, les canadairs utilisés contenaient deux réservoirs de 3000 L chacun. Lors de l'écopage (phase de remplissage à plein des réservoirs) le canadair vole à une vitesse de 110 km/h et le remplissage se fait avec un débit de  $0,5 \text{ m}^3/\text{s}$ .



Le 26 juillet 2017, 4 canadairs ont été utilisés pendant 4 heures sans faire de pause. La durée d'une rotation pour chacun des 4 avions (c'est à dire du remplissage au largage puis retour au plan d'eau) était de 3 minutes.

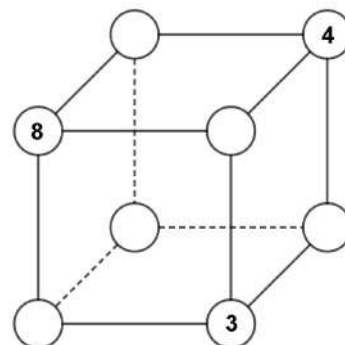
1. Quelle distance parcourt un canadair lors d'un écopage ?
2. Quel volume d'eau les canadairs ont-ils largué le 26 juillet ?

### Exercice n°3

### Quand le cube fait sa somme

5 points

Sur le cube ci-contre, cinq nombres manquent. Compléter les cases vides par des nombres entiers positifs de façon à ce que la somme des quatre nombres sur chacune des six faces soit toujours égale à 18.  
Donner toutes les solutions possibles.



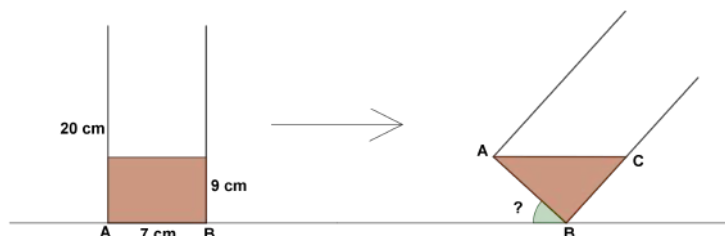
### Exercice n°4

### Un problème renversant

6 points

Un grand verre en forme de pavé droit dont la base est un carré de 7 cm de côté et dont la hauteur est de 20 cm contient du jus d'orange sur une hauteur de 9 cm.

1. On incline progressivement le verre le long d'une arête de la base, de façon à commencer à apercevoir le fond et on s'arrête à cette limite, comme indiqué sur la figure ci-dessous. Du jus d'orange est-il sorti du verre ?
2. De quel angle le verre a-t-il été incliné ?



Attention :  
la figure ci-contre n'est pas représentée  
à l'échelle.

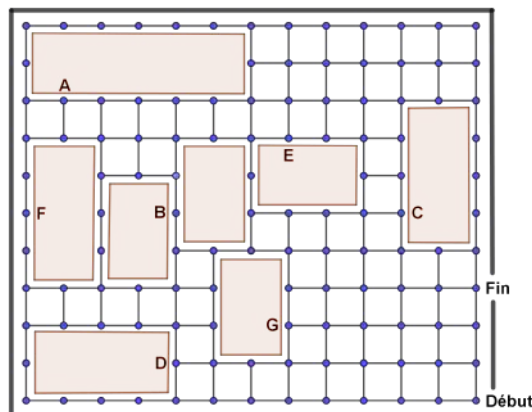
### Exercice n°5

### Les courses des robots R2 et D2

6 points

Dans l'entrepôt de stockage d'un commerçant en ligne, les rails sur lesquels les robots préparateurs de commandes se déplacent forment un quadrillage, comme représenté sur le schéma ci-contre. Chaque carré de ce quadrillage mesure 1 m sur 1 m.

Les robots R2 sont programmés pour effectuer le trajet le plus court mais en respectant l'ordre de la commande alors que les robots D2 ont eux, la possibilité de changer l'ordre afin de réaliser un trajet plus court. Tous les robots partent du point **Début** et finissent au point **Fin**. Les produits sont rangés dans des rayonnages représentés par des rectangles gris sur le schéma. Un robot peut prendre un produit lorsqu'il est sur le point du quadrillage situé en face du produit désiré (représenté par son initiale sur le schéma).



La commande à préparer est la suivante : **A**genda, **B**oîte de craies, **C**ompas, **D**ictionnaire, **E**querre, **F**euilles, **G**omme. Quelle est la distance parcourue par un robot R2 et celle parcourue par un robot D2 ?

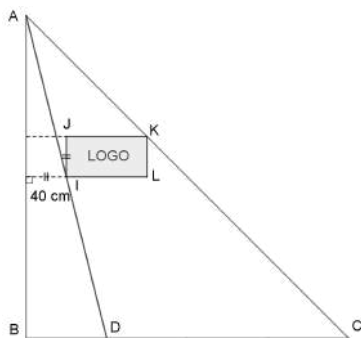
Tracer en rouge sur le schéma un chemin fléché correspondant au robot R2 puis le découper et le coller sur votre feuille réponse. Faire de même en vert pour un robot D2 sur un autre schéma.

### Exercice n°6

### Le logo prend la voile

6 points

Un fabricant de voiles inscrit son logo rectangulaire selon le même procédé sur toutes les voiles de ses créations. La hauteur du logo est toujours de 40 cm mais la largeur varie selon les dimensions de la voile (voir schéma ci-dessous).



Il utilise le procédé suivant pour placer son logo rectangulaire IJKL sur une voile triangulaire ABC :

- placer le point D sur [BC] tel que BD est égale à un quart de BC
- placer le point I sur [AD], tel que la distance de I à [AB] soit de 40 cm
- placer le logo rectangulaire IJKL tel que (IL) et (BC) soient parallèles et que K appartienne à [AC].

1. Réaliser une figure à l'échelle  $\frac{1}{20}$  dans le cas où ABC est un triangle rectangle isocèle en B tel que  $BC = 3,6$  m.
2. Calculer l'aire de son logo dans ce cas.

# RALLYE MATHÉMATIQUE DU CENTRE ET DU CONGO

## Épreuve préparatoire - Décembre 2018

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.  
Les solutions partielles seront examinées.  
Bon courage et rendez-vous le 12 mars pour l'épreuve officielle.

### Exercice n°1

**Paul ou Virginie**

5 points

Une distance de 2 km sépare Paul et Virginie qui marchent l'un vers l'autre, chacun à la vitesse de 3 km/h. Leur chien Médor qui aime autant son maître que sa maîtresse court de l'un vers l'autre à la vitesse de 8 km/h.

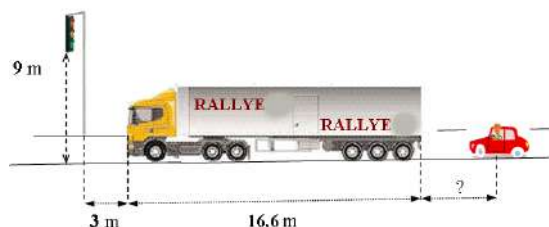


Quelle distance Médor aura-t-il parcourue lorsque Paul et Virginie se rencontreront ?

### Exercice n°2

**Verra verra pas**

5 points



Un camion semi-remorque mesure 16,6 m de long. Sa hauteur totale au-dessus de la chaussée est de 4 m. Il est arrêté à 3 m des feux tricolores qui sont situés à 9 m au-dessus de la chaussée.

A quelle distance de l'arrière du camion doit se trouver le conducteur de la voiture pour que celui-ci, assis derrière son volant, puisse voir la totalité du feu ?

Les yeux du conducteur sont situés à 1,20 m au-dessus de la chaussée.

### Exercice n°3

**Décortiquer la graine...**

8 points

Pour communiquer secrètement sur un Snapgram, deux amis mettent au point un codage qui fonctionne à partir d'une « graine », nombre compris entre 1 et 26. La graine sert à coder la première lettre du message clair, et c'est ensuite la lettre qui précède chaque lettre qui va jouer le même rôle.

Si, par exemple, cette graine est 5, le codage de COQ se fait ainsi :

- C est la 3<sup>ème</sup> lettre de l'alphabet : on calcule alors  $3 (C) + 5 (graine) = 8$  et C est traduit par H qui est la 8<sup>ème</sup> lettre de l'alphabet.
- Pour O, qui est la 15<sup>ème</sup> lettre de l'alphabet, on calcule  $15 (O) + 3 (lettre précédente : C) = 18$  et O est traduit par R qui est la 18<sup>ème</sup> lettre de l'alphabet.
- Pour Q, qui est la 17<sup>ème</sup> lettre de l'alphabet, on calcule  $17 (Q) + 15 (lettre précédente : O) = 32$  et comme  $32 > 26$ , on retient  $32 - 26 = 6$ . Le Q est alors traduit par F qui est la 6<sup>ème</sup> lettre de l'alphabet.

Ainsi COQ sera codé en HRF.

Décoder le message suivant en sachant que la graine est un diviseur de 20.

WHNDE ANVB

**Exercice n°4****Somme toute****8 points**

Avec le nombre 197 (qui est un nombre de trois chiffres) on commence l'énumération d'une suite de nombres entiers en écrivant les trois premiers nombres : 1 , 9, 7 . Pour continuer l'énumération, on calcule la somme des trois derniers nombres énumérés :  $1 + 9 + 7$ . Le 4ème nombre est donc 17. Le 5ème nombre de l'énumération est  $9 + 7 + 17$  c'est-à-dire 33 et ainsi de suite.

1. Continuer l'énumération attendue en appliquant cette règle jusqu'au moment où va apparaître le nombre 197.
2. Mettre en œuvre cet algorithme en partant du nombre 742. Qu'observez-vous ?
3. On adapte l'algorithme aux nombres de deux chiffres. La nouvelle règle pour calculer un « suivant » consistera à calculer la somme des deux derniers nombres énumérés.

Déterminer parmi tous les nombres à deux chiffres ceux qui, en leur appliquant l'algorithme, possèdent la propriété analogue à celle de 197, c'est-à-dire qui réapparaissent à un certain moment dans l'énumération.

**Exercice n°5****Cocktail multicolore****8 points**

Pour peindre une fresque de  $12 \text{ m}^2$ , on dispose de trois pots de peinture pleins : un pot de peinture bleue, un pot de peinture rouge et un pot de peinture jaune. Un pot permet de peindre  $4 \text{ m}^2$ .



La fresque doit être peinte en bleu, rouge, jaune, orange, vert et violet.

Le vert est obtenu avec  $\frac{2}{3}$  de jaune et  $\frac{1}{3}$  de bleu, l'orange avec  $\frac{1}{4}$  de rouge et  $\frac{3}{4}$  de jaune et le violet avec  $\frac{1}{2}$  de rouge et  $\frac{1}{2}$  de bleu.

La surface à peindre en bleu mesure  $1,8 \text{ m}^2$ , celle à peindre en rouge  $1,6 \text{ m}^2$  et celle à peindre en jaune  $1,9 \text{ m}^2$ .

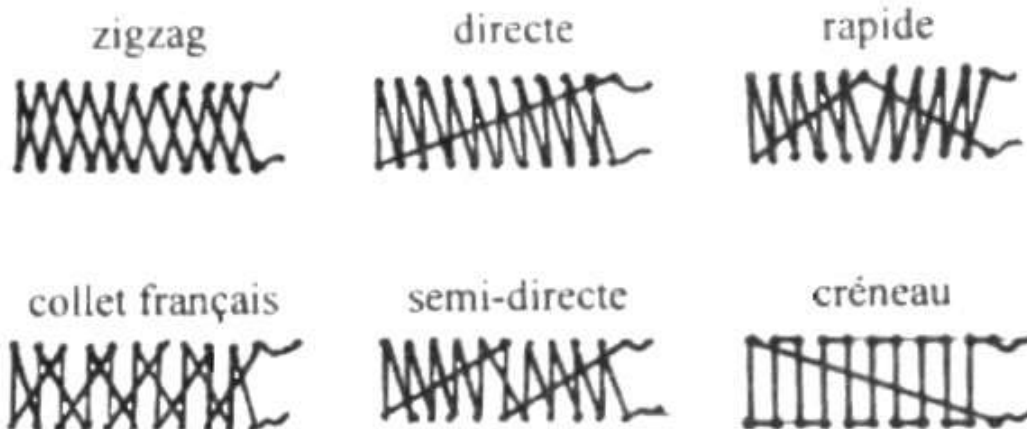
Les surfaces à peindre avec les couleurs mélangées mesurent  $3,8 \text{ m}^2$ ,  $2 \text{ m}^2$  et  $0,9 \text{ m}^2$ .

En testant toutes les possibilités, déterminer à quelle couleur correspond chacune de ces aires.

**Exercice n°6****On ne peut pas tout faire !****12 points**

Maud connaît les six façons ci-dessous de lacer ses " Doc ". Les deux rangées parallèles de onze trous sont distantes de 3 cm et sur chaque rangée les trous sont régulièrement espacés de 1 cm.

Quels sont, parmi ceux ci, les types de laçage que Maud peut utiliser, sachant que ses lacets mesurent un mètre de long et qu'elle a besoin d'au moins 30 cm pour faire la boucle ?



# Rallye mathématique du Centre et du Congo

## Épreuve officielle

Mardi 12 mars 2019

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.  
Les solutions partielles seront examinées.

### Exercice n°1

### A la bonne heure, l'escape game !

6 points

Pour déverrouiller la dernière porte d'un « escape game » un groupe d'amis doit régler les horloges de 4 pièces différentes, chacune sur une heure entière (1h, 2h, 3h,..., 12h). Malheureusement, ils n'ont pas encore résolu la dernière énigme leur permettant de trouver les heures des 4 horloges.

En effet, alors qu'il leur reste seulement 14 minutes, ils ont recueilli les informations suivantes :

- l'heure de l'horloge de la pièce principale est un nombre premier (nombre entier strictement supérieur à 1 ayant exactement deux diviseurs : 1 et lui-même) ;
- les heures des trois autres pièces sont trois nombres entiers consécutifs.



Romain pense, qu'avec ces renseignements, ils ont le temps de tester toutes les possibilités pour sortir à coup sûr alors que Tiphaine pense que, même à raison de seulement 3 secondes par combinaison testée, ils n'auront pas le temps et qu'il leur faut absolument trouver la dernière énigme. Qui a raison ?

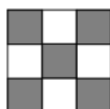
### Exercice n°2

### 5 chocolats<sup>3</sup> en boîte<sup>2</sup>

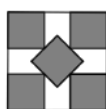
8 points

La confiserie Pick veut vendre ses délicieux chocolats par 5 dans des petites boîtes en bambou. Les chocolats sont des cubes de 3 cm de côté. La boîte est à base carrée et de hauteur 3 cm.

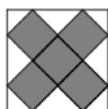
Pour cela chacun des 3 employés soumet un projet esthétique de disposition des chocolats.



Projet de  
Yann



Projet de  
Catherine



Projet de  
Jérôme

Pour des raisons écologiques et économiques, on souhaite que la base carrée soit la plus petite possible.  
Quel projet va-t-on retenir ?

### Exercice n°3

### Il faut qu'un tiroir soit ouvert ou fermé

8 points

Trois cents personnes font la queue devant un bloc de trois cents tiroirs fermés numérotés de 1 à 300.

- La première personne ouvre tous les tiroirs.
  - La deuxième personne ferme tous les tiroirs qui portent un numéro pair et ne touche pas aux autres.
  - La troisième s'intéresse aux tiroirs dont les numéros sont des multiples de 3 : si un tel tiroir est ouvert elle le ferme, s'il est fermé elle l'ouvre.
  - La quatrième s'intéresse aux tiroirs dont les numéros sont des multiples de 4 : si un tel tiroir est ouvert elle le ferme, s'il est fermé elle l'ouvre.
  - Et ainsi de suite jusqu'à la 300<sup>e</sup> personne.
1. A la fin, le tiroir portant le numéro 12 est-il ouvert ou fermé ?
  2. Donner la position finale des 20 premiers tiroirs.
  3. Combien y-a-t-il de tiroirs ouverts et quels sont-ils ?

**Exercice n°4****Le peintre 10 traits****6 points**

1. Un artiste peintre cherche à obtenir une couleur « framboise sauvage ». Pour ceci, il cherche dans un nuancier et il trouve qu'il faut 1 part de blanc de titane et 4 parts de rose permanent.  
Il fait un premier essai, mais comme il est distrait, il se trompe. Une part de blanc et cinq parts de rose, évidemment, c'est trop foncé!  
Il essaie de rectifier en rajoutant deux parts de blanc et deux parts de rose à son premier mélange. Cela ne lui convient toujours pas. Il décide donc de s'en tenir aux indications précises du nuancier.  
Combien de parts de rose et de blanc doit-il rajouter au mélange obtenu au second essai pour obtenir la bonne couleur « framboise sauvage » ? (*chaque part représente une même quantité*)
2. Cette fois, il veut obtenir la couleur « lavande ». Il faut 6 parts de blanc de titane, 2 parts de violet de cobalt et 1 part de bleu permanent. Et comme dans le premier cas « il se mélange les pinceaux » :  
il met 2 parts de blanc, 6 parts de bleu et 1 part de violet.  
Comment rectifier ?

**Exercice n°5****La belle échappée !****6 points**

Lors d'une sortie, deux amis cyclistes Florence et Olivier roulent à la vitesse de 24 km/h. Florence s'échappe à la vitesse de 42 km/h mais Olivier ne change pas de rythme et reste à 24 km/h. Dix minutes après s'être échappée, Florence fait demi-tour et repart rejoindre Olivier à la vitesse de 36 km/h.  
Quelle distance chacun a-t-il parcouru seul ?

**Exercice n°6****(i) Les tréteaux pour mettre la table****9 points**

En prévision d'un repas de famille, Victor a acheté une planche en bois et deux tréteaux pour ajouter à la table en plastique qu'il possède déjà. Le problème, c'est qu'une fois installées côte à côte, les deux tables n'ont pas la même hauteur.



L'épaisseur de la planche en bois est de 2 cm. Chaque tréteau a deux pieds obliques d'une longueur de 76 cm. La partie métallique qui relie les deux pieds du tréteau mesure 20 cm et elle est fixée sur chaque pied à 41 cm du sommet des pieds des tréteaux. La table en plastique a des pieds perpendiculaires au plateau qui mesurent 65 cm de long et son plateau en plastique a une épaisseur de 5 cm.

Il se demande donc comment faire pour que les deux tables aient la même hauteur. Il ne peut pas modifier la table en plastique donc la seule solution c'est de modifier les tréteaux. Après réflexion, il voit 3 options possibles.

1ère option : comme il est bricoleur, remplacer la barre métallique par une autre barre de la bonne longueur fixée au même endroit pour que les deux tables aient la même hauteur. Quelle doit être la longueur de la nouvelle barre ?

2ème option : dévisser la barre métallique existante et la visser, horizontalement, au bon endroit sur les pieds du tréteau pour que les deux tables aient la même hauteur. A quelle distance du sommet des pieds du tréteau doit-il visser la barre métallique ?

3ème option : couper les pieds des tréteaux à la bonne longueur pour que les deux tables aient la même hauteur. De quelle longueur doit-il raccourcir les tréteaux ?



# RALLYE MATHÉMATIQUE DU CENTRE ET DU CONGO

## Épreuve préparatoire - Décembre 2019

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.  
Les solutions partielles seront examinées.  
Bon courage et rendez-vous le 10 mars pour l'épreuve officielle.

### Exercice n°1

### Les aventuriers de $\rho\lambda$

8 points

Sur l'île de  $\rho\lambda$ , deux équipes de 8 joueurs s'affrontent tous les trois jours lors d'une épreuve qui a toujours lieu l'après-midi. A l'issue de chaque épreuve un joueur est éliminé.

Un sac de 6 kg de riz est distribué à chaque équipe avant le repas du premier jour de l'aventure. La première épreuve a lieu le troisième jour de l'aventure. Quand il reste 8 joueurs, le jeu devient individuel et le riz restant est mis en commun. L'aventure s'arrête quand il reste un seul joueur.

Tous les joueurs mangent la même quantité de riz chaque jour, lors d'un unique repas qui a lieu tous les matins. Les joueurs éliminés ne mangent plus de riz. Sachant qu'à la fin de l'aventure tout le riz a été consommé, quelle est la quantité quotidienne de riz que pourra manger un candidat ?



### Exercice n°2

### Le Carré de POLYBE

5 points



|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | A | B | C | D | E |
| 2 | F | G | H | I | J |
| 3 | K | L | M | N | O |
| 4 | P | Q | R | S | T |
| 5 | U | V | X | Y | Z |

Polybe, un historien grec (vers 200 – 125 av. J.-C.), est à l'origine du premier procédé de chiffrement par substitution. C'est un système de transmission basé sur un carré de 25 cases. Chaque lettre peut être ainsi représentée par un groupe de deux chiffres : celui de sa ligne suivi de celui de sa colonne.

Ainsi : "E" = 15, "U" = 51, "N" = 34 ...

Mais ce codage est peut-être un peu simple. On décale alors l'alphabet avec un mot de passe... Par exemple, si le mot de passe est ELECTRICITE, on commence à remplir le carré avec les lettres de ce mot, en ne gardant que la première occurrence de chaque lettre, ce qui donne E L C T R I, puis on complète le tableau avec les lettres inutilisées dans l'ordre alphabétique. (voir ci-contre)

*Le W n'est pas utilisé. Au besoin, on emploie le V à sa place.*

|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | E | L | C | T | R |
| 2 | I | A | B | D | F |
| 3 | G | H | J | K | M |
| 4 | N | O | P | Q | S |
| 5 | U | V | X | Y | Z |

Que se cache-t-il derrière le message chiffré ci-dessous ? Pour le découvrir, il faut le SESAME.

41153212214531234244121431124422123413213413111112

**Exercice n°3****Au bal masqué, ohé...****6 points**

Aristide, Ben et Christian préparent une fête masquée chez l'une de leurs camarades. Ils disposent de trois déguisements, un pour chacun : fantôme, pirate et vampire.

- Ben dit : « Si Christian se déguise en vampire, alors moi je me mets en pirate!!! »
- Christian répond : « Si Ben se déguise en fantôme, alors moi je me mets en pirate!!! »
- Et Aristide de conclure : « Si Ben ne se déguise pas en vampire, alors moi je me mets en pirate!!! »

Quelles sont les répartitions possibles des déguisements de chacun ?

**Exercice n°4****Nombre de Champernowne****7 points**

Le nombre de Champernowne est le nombre défini de la façon suivante : 0,123456789101112131415... dans lequel la partie décimale est infinie, construite en mettant bout à bout tous les entiers naturels.

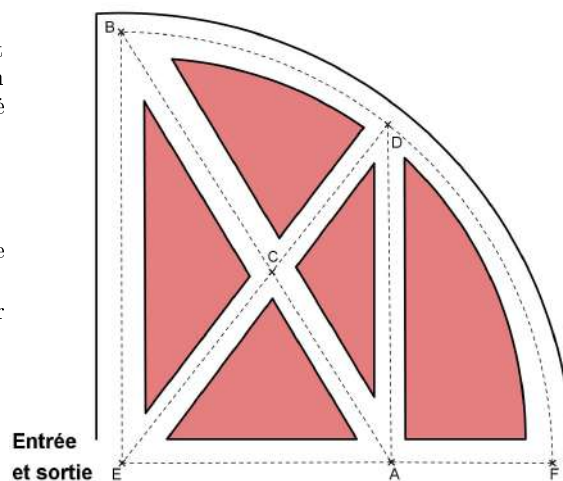
1. Quelle est la 20ème décimale de ce nombre ? la 100ème ? la 2020ème ?
2. Quelle est la première position dans la partie décimale du nombre de Champernowne, où l'on trouve les successions de chiffres suivantes ? (Donner la position du premier chiffre.)
  - 35
  - 181
  - 2020
  - 2021

**Exercice n°5****Le jardin de Jean****12 points**

Jean, qui est employé à l'entretien du parc d'un château, doit passer la tondeuse dans toutes les allées engazonnées d'un ancien jardin ayant la forme d'un quart de disque constitué de cinq parterres de fleurs.

Voici des indications concernant ce jardin :

- l'entrée et la sortie ne peuvent se faire qu'en E ;
- les allées [BE] et [DA] sont perpendiculaires à l'allée [EF] qui passe par A ;
- l'allée  $\widehat{BF}$  est un quart de cercle de centre E passant par D ;
- les allées [BA] et [DE] se coupent en C ;
- Par mesure à 0,1 m près, on a :  
EC = 75 m , CD = 45 m et BC = 96 m .



1. Hier, Jean a passé la tondeuse dans toutes les allées de ce jardin. Il a fait le trajet suivant :  
E → A → F → D → B → E → C → D → B → C → A → D → C → E  
Calculer la longueur de son trajet. (Arrondir les longueurs des allées au mètre près.)
2. Après avoir passé la tondeuse, Jean se dit que son trajet n'est certainement pas le plus court pour entretenir toutes ces allées. Il se demande alors quel trajet emprunter pour avoir le chemin le plus court possible. Proposer un chemin, le plus court possible, pour l'entretien de ces allées et donner sa longueur.

# Exercice n°6

# Le trajet s'enracine

8 points

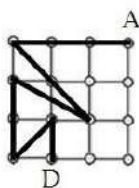
Sur un quadrillage formé de carrés de côté une unité, on construit des trajets d'un point de départ D jusqu'à un point d'arrivée A. Ces trajets sont formés d'une suite de segments consécutifs qui ne se coupent pas, de longueurs strictement croissantes et dont chaque extrémité est un point du réseau.

Par exemple, le trajet représenté sur la *fig a* ci-après a pour longueur :  $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{4}$

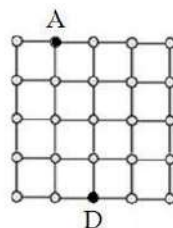
1. Donner de la même façon la longueur du trajet représenté sur la *fig b* ci-après.
2. Tracer sur le quadrillage de la *fig c* (à découper et à coller sur la feuille-réponse) un trajet de D à A dont la longueur est :  $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{8} + \sqrt{9} + \sqrt{10}$
3. Tracer sur le quadrillage de la *fig d* (à découper et à coller sur la feuille-réponse) un trajet de D à A le plus long possible et donner sa longueur.



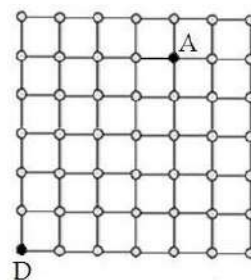
*fig a*



*fig b*



*fig c*



*fig d*

# Rallye mathématique du Centre et du Congo

## Épreuve officielle

Mardi 10 mars 2020

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.  
Les solutions partielles seront examinées.

### Exercice n°1

### Une carapace pour la légion

8 points

Un groupe de passionnés de l'histoire romaine organise une reconstitution de son armée. Une célèbre formation de combat est la « tortue ».



1. Le groupe peut former une tortue carrée (autant de soldats en longueur qu'en largeur) mais il restera 8 passionnés de côté. S'ils décidaient de faire une tortue, toujours carrée, avec une personne de plus sur le côté, il leur manquerait 5 passionnés. Combien de passionnés y a-t-il dans le groupe ?
2. Déçus de ne pouvoir tous se retrouver dans la tortue, le groupe fait venir d'autres passionnés et dix personnes de plus arrivent. Ne pouvant faire une tortue carrée, le groupe choisit de faire alors une tortue rectangulaire dont le rapport (ratio) de la longueur à la largeur est égal à  $\frac{3}{2}$ . Quelles sont les dimensions de cette tortue ?
3. Au premier janvier 2019, la région Centre-Val de Loire comptait 2 567 000 habitants. Quelle serait la plus grande tortue carrée que l'on pourrait faire et combien d'habitants ne pourraient pas l'intégrer ? Y aurait-il moins d'habitants laissés de côté si on choisissait une tortue rectangulaire de ratio  $\frac{3}{2}$  ?

### Exercice n°2

### Merci pour tout Jean-Marie

5 points

Cinq amis Jean-Marie, Philippe, Jean-Pierre, Rémi et Pierrick se réunissent pour une partie de poker.

Chacun d'eux porte au moins un de ces accessoires : un chapeau ou des lunettes ou une écharpe ; il peut porter deux éléments à la fois mais jamais les trois en même temps. On sait que :

- Jean-Pierre a un chapeau ;
- Philippe porte une écharpe mais pas Rémi ;
- Rémi et Pierrick n'ont pas de lunettes ;
- ils ont chacun une combinaison d'accessoires différente.

Au total deux amis ont une écharpe, trois portent des lunettes et trois portent un chapeau. Que porte Jean-Marie ?

### Exercice n°3

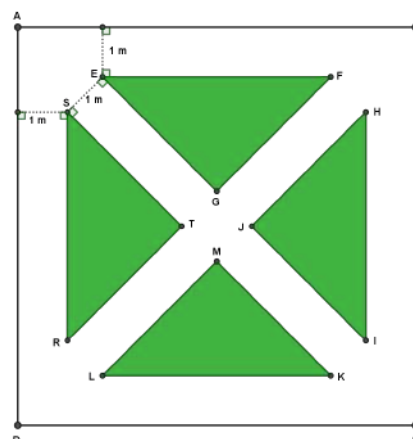
### Jardin à la française

10 points

Charles souhaite rénover les allées du jardin à la française de son manoir. Ce jardin a la forme d'un carré de 24 m de côté et a deux axes de symétrie : les diagonales du carré. Les allées font toutes un mètre de large et déterminent quatre parties triangulaires cultivées (voir plan ci-contre).

Pour la rénovation, il envisage de recouvrir toutes les allées de 5 cm d'épaisseur de gravier. Le gravier choisi revient à 210 euros le  $m^3$ , livraison et installation comprises.

Combien va lui coûter cette réalisation ?



**Exercice n°4****La tour infernale de MathCraft****9 points**

MathCraft est un jeu de construction qui plonge le joueur dans un univers composé de blocs cubiques qui permettent de construire des bâtiments de toutes dimensions.

Mattéo est passionné par ce jeu, il souhaite bâtir une tour de la façon suivante :

- elle est constituée d'un empilement de structures cubiques constituées à l'aide des blocs ;
- chaque structure cubique est centrée sur celle du dessous et réduite d'un bloc dans chaque direction ;
- la tour se termine par un cube constitué d'un seul bloc.

Sur la figure ci-contre la tour est constituée de trois structures cubiques et sa hauteur totale est de 9 blocs.



1. Dans ce jeu, la hauteur maximale d'une construction est de 191 blocs. De combien de structures cubiques est constituée au maximum la tour de Mattéo ?
2. Mattéo est capable de construire en moyenne 13 blocs toutes les 4 secondes. Combien lui faudra-t-il de temps pour construire la tour la plus haute possible ?
3. Mattéo veut maintenant construire deux tours jumelles absolument identiques. Il dispose pour cela de 83 000 blocs au maximum. Il veut encore qu'elles soient les plus hautes possibles. Quelle sera leur hauteur une fois réalisées et combien lui restera-t-il de blocs inutilisés à la fin ?

**Exercice n°5****Le codage dur à lire****6 points**

Pour communiquer avec ses amies Audrey utilise un système de codage. Le codage consiste à commencer par remplacer chaque lettre par sa position dans l'alphabet, mais pour des raisons techniques la position de la lettre A est 0, celle de B est 1, ..., celle de Z est 25.

On choisit ensuite deux nombres entiers **a** et **b** qui constituent la clef de chiffrement. La position d'une lettre est alors codée en la multipliant par **a** puis en ajoutant **b**. Ce nombre n'étant pas forcément compris entre 0 et 25, on prend son reste dans la division euclidienne par 26. Enfin ce dernier nombre est à son tour remplacé par la lettre qui lui correspond.

Par exemple, si on souhaite coder le mot MATHS avec le choix **a=3** et **b=5** :

Etape 0 - message initial : M A T H S

Etape 1 - en positions : 12 0 19 7 18

Etape 2 - après chiffrement : 41 5 62 26 59

Etape 3 - reste de la division par 26 : 15 5 10 0 7

Etape 4 - message codé : P F K A H

1. Coder « RALLYE MATHEMATIQUE » avec maintenant **a=7** et **b=1**.
2. Décoder « HDQPF CVLQ EVLE MDBO HBQFD » toujours avec **a=7** et **b=1**.

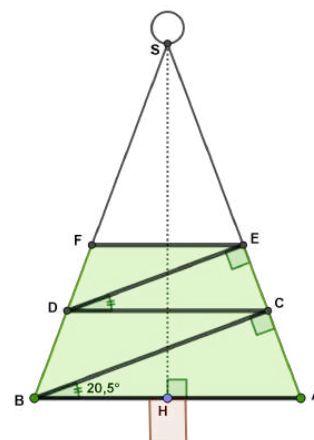
**Exercice n°6****Le sapin de Noël sans guirlande****10 points**

Manuel et Aliénor veulent fabriquer un sapin de Noël dans une planche en bois. Le sapin a la forme d'un triangle isocèle de sommet S. La base [AB] mesure 1,20 m et sa hauteur [SH] mesure 1,60 m. La partie supérieure formée par le triangle SFE sera peinte en blanc pour symboliser la neige. Au sommet du sapin trônera une belle boule dorée. Le quadrilatère ABFE sera peint en vert. Ils veulent fixer une guirlande électrique ABCDEF comme indiqué sur la figure ci-contre.

On sait que les angles  $\widehat{ABC}$  et  $\widehat{CDE}$  sont égaux et mesurent environ  $20,5^\circ$  et que les droites (BC) et (DE) sont perpendiculaires à (SA).

Alors que Aliénor pense qu'il leur faut une guirlande de plus de 4,5 m de long, Manuel prétend que 4,5 m suffisent.

Qui a raison et quelle sera la longueur de la guirlande ABCDEF (arrondir au cm) ?



# RALLYE MATHÉMATIQUE DU CENTRE ET DU CONGO

## Épreuve préparatoire - Décembre 2020

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.  
Les solutions partielles seront examinées.  
Bon courage et rendez-vous le 11 mars pour l'épreuve officielle.

### Exercice n°1

### Jules décode

7 points

Flore a mis au défi son ami Jules de trouver le code d'accès qui permet de rentrer dans son immeuble. Ce code est composé de cinq chiffres suivis de la lettre B et n'a jamais été changé depuis son installation.



Flore lui a juste donné comme indice que les chiffres de deux touches du digicode sont quasiment effacés, qu'une autre touche montre aussi des traces d'usure, mais moins importantes que sur les deux autres et que les autres touches sont comme neuves. Elle lui dit aussi que le nombre formé par les 4 premiers chiffres de la combinaison est un carré parfait. Elle se dit qu'avec ces renseignements, elle n'est pas près de voir arriver Jules !

Jules se dit lui aussi que toutes ces informations sont bien insuffisantes pour trouver le code et qu'il aura bien du mal à entrer dans l'immeuble, sachant qu'il n'a que trois essais avant de bloquer la porte. Mais Jules, qui est déjà allé chez Flore se souvient que le code formé par les cinq chiffres est un palindrome (comme par exemple : 47874, 52225...). Cela l'avait marqué ! Quelque temps plus tard, il appelle Flore et lui dit « Je n'ai même pas besoin de me déplacer devant ton digicode pour savoir que je vais pouvoir entrer dans ton immeuble. ». A-t-il raison ?

### Exercice n°2

### Le peintre 10 traits

6 points

1. Un artiste peintre cherche à obtenir une couleur « framboise sauvage ». Pour ceci, il cherche dans un nuancier et il trouve qu'il faut 1 part de blanc de titane et 4 parts de rose permanent.  
Il fait un premier essai, mais comme il est distrait, il se trompe. Une part de blanc et cinq parts de rose, évidemment, c'est trop foncé !  
Il essaie de rectifier en rajoutant deux parts de blanc et deux parts de rose à son premier mélange. Cela ne lui convient toujours pas. Il décide donc de s'en tenir aux indications précises du nuancier.  
Combien de parts de rose et de blanc doit-il rajouter au mélange obtenu au second essai pour obtenir la bonne couleur « framboise sauvage » ? (*chaque part représente une même quantité*)
2. Cette fois, il veut obtenir la couleur « lavande ». Il faut 6 parts de blanc de titane, 2 parts de violet de cobalt et 1 part de bleu permanent. Et comme dans le premier cas « il se mélange les pinceaux » :  
il met 2 parts de blanc, 6 parts de bleu et 1 part de violet.  
Comment rectifier ?

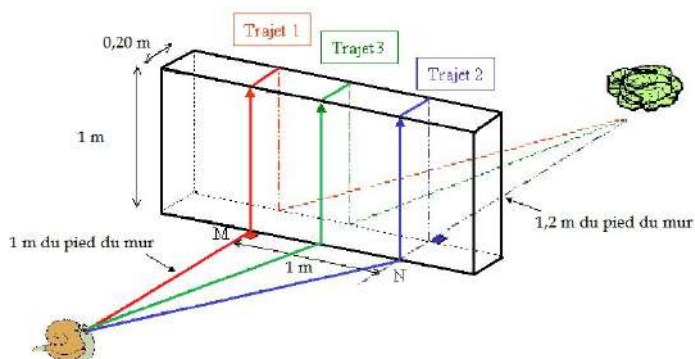
**Exercice n°3****My fortune for 10 €!****5 points**

John, un américain, rentre dans un petit magasin de Blois et dit au patron :

« *Give me as much money as I have with me, and I will spend 10 € in your store.* »

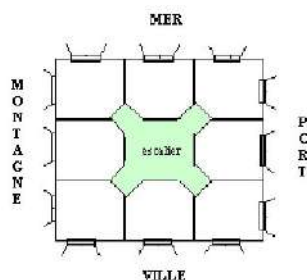
Le patron réfléchit et accepte. L'américain recommence dans un autre magasin dont le patron accepte à nouveau. Dans le troisième magasin, il renouvelle sa demande. Elle est acceptée et, à l'issue de ce dernier achat, John se retrouve finalement sans un sou.

Combien avait-il au début de ses transactions ?

**Exercice n°4****Le délice du limaçon****10 points**

L'escargot et la salade se trouvent de part et d'autre d'un très long mur de 1 mètre de hauteur et de 20 cm d'épaisseur. L'escargot se trouve à 1 mètre du pied du mur et la salade à 1,20 m du pied du mur (de l'autre côté) ; il veut atteindre la salade. Les deux perpendiculaires au pied du mur sont distantes de 1 mètre.

1. Quelle distance parcourt l'escargot en empruntant le trajet 1, en empruntant le trajet 2 ?
2. Le trajet 3 passe exactement au milieu de  $[MN]$ . Quelle est la longueur de ce trajet ?
3. Trouver le trajet le plus court possible que peut parcourir l'escargot pour se rendre à cette salade et calculer sa longueur.

**Exercice n°5****Histoire d'appartements****6 points**

Vingt personnes habitent ces huit appartements. Celles qui ont vue sur le port sont trois fois moins nombreuses que celles qui ont vue sur la ville et deux fois moins nombreuses que celles qui ont vue sur la montagne. Les gens qui ont vue sur la mer sont quatre fois moins nombreux que ceux qui regardent la ville. Tous les appartements sont occupés.

En expliquant la méthode, donner les dispositions possibles des personnes de cet ensemble d'appartements.

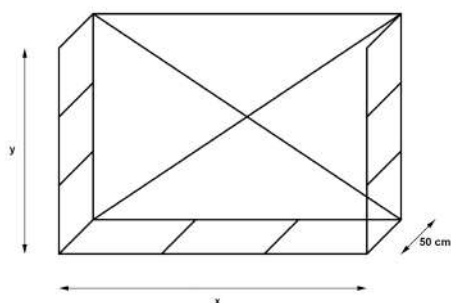
**Exercice n°6****La chèvre, le pré et le hangar****10 points**

M. Seguin possède une chèvre qu'il laisse brouter dans un pré clôturé rectangulaire ABCD de 60 m de long sur 40 m de large ( $AD = 60$  m et  $AB = 40$  m). Au centre de ce pré se trouve un hangar carré EFGH dont le centre est le centre du pré. La diagonale [FH] du hangar mesure 20 m et est parallèle au côté [AB] du pré, E est le coin du hangar le plus proche de [AB] et F est celui le plus proche de [BC].

1. Ne souhaitant pas que la chèvre broute partout, M. Seguin installe deux barrières séparant son pré en deux parties. Une barrière est perpendiculaire à [AD] et va jusqu'au coin H du hangar et l'autre est perpendiculaire à [BC] et va jusqu'au coin F. Il place alors la chèvre dans la partie contenant le point E.  
Réaliser une figure du pré à l'échelle en prenant 1 cm pour 5 m, colorier la zone accessible par la chèvre et calculer son aire.
2. Les barrières le gênant, il décide de les enlever mais attache sa chèvre l'aide d'une corde de longueur EA fixée au point E.  
Réaliser une figure du pré à l'échelle en prenant 1 cm pour 5 m, colorier la zone accessible par la chèvre et calculer son aire.

**Exercice n°7****Bûche, ô ma bûche !****8 points**

Une entreprise veut fabriquer une structure en tubes métalliques pour contenir un volume de  $1 \text{ m}^3$  afin de stocker des bûches de 50 cm de long. Le plan défini pour la structure est le suivant :



1. Quelle est la longueur totale de tubes métalliques nécessaires si x est égal à 1 m ? à 2 m ?
2. Déterminer l'arrondi au cm des dimensions x et y de la structure qui minimisent la longueur totale de tubes métalliques.

# Rallye mathématique du Centre et du Congo

## Épreuve officielle

2021

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.  
Les solutions partielles seront examinées.

### Exercice n°1

### Goldbach fait des sommes de premiers

9 points

On rappelle qu'un nombre premier est un nombre entier qui possède deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

Les premiers nombres premiers sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11...

Étant donné un nombre entier fixé, on va chercher deux nombres premiers dont la somme est égale à ce nombre.

Par exemple, si on prend 4 on a  $4 = 2+2$ . De même, avec 32, on a  $32 = 3+29$  et  $32 = 13+19$ .

1. Est-il possible d'obtenir 6 ; 8 ; 10 et 12 comme somme de 2 nombres premiers ? Si oui donner toutes les sommes possibles.
2. Est-il possible d'obtenir 100 comme somme de 2 nombres premiers ? Si oui donner toutes les sommes possibles.
3. Pour tous les nombres entiers pairs compris entre 14 et 100, donner si c'est possible une somme de deux nombres premiers qui leur soit égale.
4. Quelle conjecture pouvez-vous en déduire ?

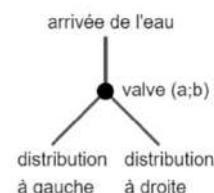
### Exercice n°2

### La valse des valves

8 points

Une valve de coefficients  $(a ; b)$  est définie ainsi ( $a$  et  $b$  sont des nombres entiers positifs) : pour un volume d'eau entrant  $v$  dans la valve, en sortie ce volume se divise en deux parties :

celle de gauche est  $\frac{a}{a+b} \times v$  et celle de droite est  $\frac{b}{a+b} \times v$ .

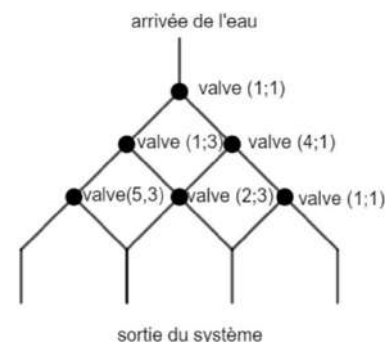


1. Un volume  $v = 12$  litres d'eau arrive sur une valve de coefficients  $(a ; b)$ . Donner le volume distribué à gauche et à droite dans chacun des cas suivants :
  - (i) une valve de coefficients  $(1 ; 1)$  ;
  - (ii) une valve de coefficients  $(2 ; 1)$  ;
  - (iii) une valve de coefficients  $(2 ; 3)$ .

2. Un système de tuyaux et de valves de coefficients  $(a ; b)$  est installé tel que ci-contre.

Le volume d'eau entrant est de 40 litres.

- (i) Quel est le volume d'eau à la sortie de chacun des tuyaux de ce système ?
- (ii) Reproduire le schéma de ce système en modifiant certains coefficients des valves afin que dans chacun des tuyaux il sorte la même quantité d'eau ?



**Exercice n°3****La tour d'Emma Toeux****6 points**

La tour d'Emma Toeux, princesse de Topologie, est une haute tour qui possède un escalier d'accès en colimaçon. Elle est très célèbre pour l'énigme qu'elle abrite.

Lors de l'ascension de cette tour, on peut découvrir un panneau à chacune des 4 étapes de la montée. Voici ce que mentionnent ces panneaux :



- Sur le premier, en bas de la tour, on peut lire : « La hauteur de chaque marche est de 16 cm et la hauteur de cet escalier est comprise entre 35 m et 42 m ».
- Sur le second panneau, on peut lire : « Arrivé ici, tu as gravi la moitié des marches ».
- Sur le 3e panneau, on peut lire : « Arrivé ici, tu as gravi le tiers de ce qui restait des marches après le panneau précédent ».
- Sur le 4e panneau, on peut lire : « Arrivé ici, tu as gravi le huitième de ce qui restait des marches après le panneau précédent. Quelle est donc la hauteur de cet escalier? ».

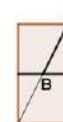
Résoudre l'énigme de la tour d'Emma Toeux.

**Exercice n°4****Les n-diagonales****6 points**

Un n-rectangle est un rectangle de 1 cm de large et composé de n carrés de 1 cm de côté tous alignés. Une n-diagonale est un segment dont les extrémités sont l'intersection de la diagonale du rectangle avec les côtés d'un carré de 1 cm de côté.

1. Voici ci-contre le schéma d'un 2-rectangle avec une 2-diagonale représentée par le segment  $[AB]$ .

Montrer que la 2-diagonale mesure  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  cm.

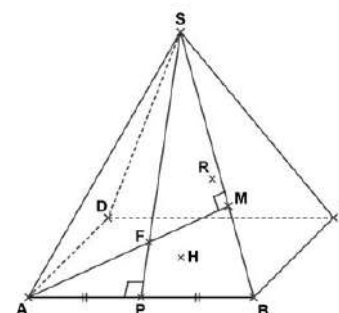


2. Construire un 3-rectangle et une 3-diagonale dont on déterminera la longueur exacte.
3. On considère que deux segments sont visiblement de longueurs identiques lorsque l'écart entre leurs mesures est inférieur au millième de centimètre.  
À partir de quelle valeur de n une n-diagonale est visiblement égale à la largeur d'un n-rectangle?

**Exercice n°5****Une fourmi sur une pyramide****12 points**

SABCD est une pyramide régulière à base carrée de côté 10 cm suspendue en son sommet S. Sa hauteur  $[SH]$  mesure 10 cm.

Une fourmi se trouve au point F qui est le point d'intersection de la hauteur issue de A et de la hauteur issue de S dans le triangle SAB. Elle désire se rendre au point R qui est le point d'intersection de la hauteur issue de D et de la hauteur issue de S dans le triangle SDC. On sait aussi que  $FP = \sqrt{5}$  cm. On pourra prendre  $FP \approx 2,24$  cm. Elle se déplace uniquement sur les faces de la pyramide et en ligne droite.



1. La fourmi envisage 3 trajets.  
1er trajet : elle se rend en P puis elle se déplace parallèlement à l'arête  $[BC]$  jusqu'à atteindre l'arête  $[DC]$  puis elle se rend en R.  
2ème trajet : elle se rend en S puis en R.  
3ème trajet : elle se rend en M puis elle se déplace parallèlement à l'arête  $[BC]$  jusqu'à atteindre l'arête  $[SC]$  puis elle se rend en R.  
Calculer la longueur, arrondie au mm, de chaque trajet. Lequel de ces trois trajets doit-elle suivre pour parcourir la plus petite distance possible?
2. Existe-t-il un chemin encore plus court ? Si oui, le décrire et en donner une longueur au mm près.

**Exercice n°6****La galette fait-elle trempette ?****6 points**

Maxence adore tremper ses galettes dans son bol de lait le matin au petit déjeuner. Mais ce matin il n'y a plus de bols disponibles, il prend donc un mug (tasse cylindrique) pour y verser ses 25 cL de lait. Peut-il tout de même tremper ses galettes préférées qui ont un diamètre de 7,8 cm sachant que son mug mesure 8 cm de haut et a un diamètre interne de 7,4 cm ?

**Exercice n°7****De Mercalme au fort Thune****6 points**

À partir du port de Mercalme, on doit ravitailler le fort Thune dans le désert. Une ligne de chemin de fer rectiligne de 100 km de long relie Mercalme à la ville de Yakoto. Le fort est situé à 80 km de Yakoto perpendiculairement à la ligne de chemin de fer.

Le transport par caravane dans le désert coûte trois fois plus cher que par la ligne de train. Pour réduire les frais de transport, on souhaite donc construire une station sur la ligne de chemin de fer entre Yakoto et Mercalme. Le ravitaillement du fort se fera en train de Mercalme jusqu'à cette station puis en ligne droite par caravane à travers le désert jusqu'au fort.

À quelle distance de Mercalme doit-on construire la station pour que le coût de transport soit le plus petit possible ?

# RALLYE MATHÉMATIQUE DU CENTRE ET DU CONGO

## Épreuve préparatoire - Décembre 2021

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.  
Les solutions partielles seront examinées.  
Bon courage et rendez-vous le 8 mars pour l'épreuve officielle.

### Exercice n°1

### Gare à la « Catcher car »



6 points

Le 8 mai 2016 a eu lieu dans 34 villes du monde simultanément, une course à pied intitulée « Wings for life world run ». Cette course a pour but de recueillir des fonds pour la recherche sur la moelle épinière. Les participants commencent la course exactement en même temps dans les différents lieux officiels.

En France, la course avait lieu à Rouen et le départ était donné à 13 heures, heure française.

Le principe de la course est simple, courir le plus longtemps possible sans être rattrapé par la « catcher car ».

Il n'y a donc pas de ligne d'arrivée, un concurrent termine sa course dès que la « catcher car » le double.

La « catcher car » démarre 30 minutes après le départ des concurrents et roule à 15 km/h pendant 1 h. Puis elle roule à 16 km/h pendant une heure, puis 17 km/h pendant 1 h puis 20 km/h pendant 2 h et enfin 35 km/h jusqu'à ce qu'elle ait rattrapé tous les concurrents.

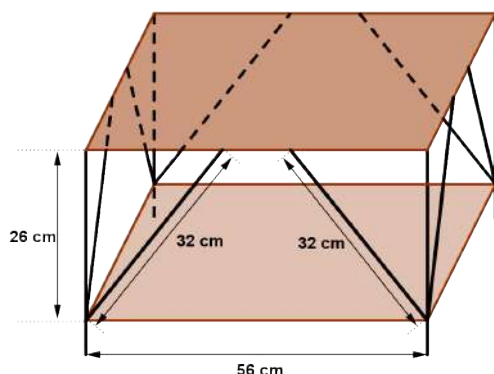
1. A 15 h 30, quelle est la distance parcourue par la voiture ?
2. Un concurrent a couru à une vitesse constante de 12,5 km/h. A quelle heure a-t-il été rattrapé ?
3. En 2016, le vainqueur (un italien) a parcouru 88,44 km. A quelle heure a-t-il été rattrapé ?

### Exercice n°2

### Casier judicieux

8 points

Christelle a dans son salon une table basse carrée comme celle qui est représentée ci-dessous. Elle est composée de deux plateaux en bois reliés par des tubes métalliques. Les dimensions sont données sur la figure.



Elle souhaite utiliser le plateau du dessous pour mettre un casier afin de ranger des magazines. Elle a donc acheté un casier qui a la forme d'un pavé droit, ouvert sur le dessus, dont le fond a pour dimensions 30 cm sur 45 cm et dont la hauteur mesure 17 cm.

Elle veut introduire le casier par un côté de la table en le faisant glisser sur le plateau du dessous. Il n'est pas question de l'incliner pour le faire rentrer.

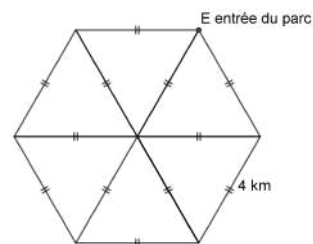
Le casier que Christelle a acheté convient-il ?

**Exercice n°3****Un tour manqué****8 points**

Un vaste parc de Mathville a la forme d'un hexagone régulier. Ce parc comporte 12 allées délimitant 6 triangles équilatéraux de 4 km de côté comme indiqué sur le schéma ci-contre.

Pierre commence à faire le tour du parc depuis l'entrée mais il se blesse après 10 km de course. Il décide alors de rejoindre en ligne droite son point de départ en coupant à travers le parc.

Quelle distance, à un mètre près, doit-il parcourir ?

**Exercice n°4****Du rouge au vert****5 points**

Un jeu sur tablette tactile est basé sur un carré quadrillé dont les cases carrées peuvent prendre la couleur verte ou la couleur rouge. Lorsqu'on touche une case du doigt, la case touchée et les cases qui ont un côté commun avec elle changent de couleur. Celles qui n'ont aucun côté commun avec elle gardent leur couleur (y compris celles qui ont un sommet commun avec elle mais aucun côté commun).

En début de partie, toutes les cases sont rouges. Le joueur a gagné quand toutes les cases sont vertes.

1. Le niveau 1 se joue sur un rectangle composé de 4 cases.

|   |   |
|---|---|
| a | b |
| c | d |

Proposer une suite de coups permettant de gagner en un minimum de coups. La décrire avec les lettres identifiant les cases touchées.

2. Le niveau 2 se joue sur un rectangle composé de 9 cases.

|   |   |   |
|---|---|---|
| a | b | c |
| d | e | f |
| g | h | i |

Proposer une suite de coups permettant de gagner en un minimum de coups. La décrire avec les lettres identifiant les cases touchées.

**Exercice n°5****Les récalcitrants****8 points**

Étant donné un nombre entier à 3 chiffres on définit la procédure suivante : on remplace chacun de ses chiffres par le chiffre des unités du carré de ce chiffre.

Par exemple 457 devient 659 et 606 reste 606. On dit que 606 est un nombre **récalcitrant**.

- On choisit les nombres 973, 777, 532, 696 et 209. Pour chacun de ces cinq nombres appliquer plusieurs fois de suite la procédure précédente. Quelle conjecture pouvez-vous faire ?
- Déterminer les nombres récalcitrants à trois chiffres.
- Prouver la conjecture de la première question.

**Exercice n°6****Faites l'œuf !****8 points**

Construire un cercle de diamètre AB (on prendra  $AB = 14$  cm). La médiatrice de [AB] coupe le cercle en deux points, on nomme C un de ces deux points.

Le cercle de centre A et de rayon AB coupe la demi-droite [AC) au point D. Le cercle de centre B et de rayon BA coupe la demi-droite [BC) au point E.

En couleur, tracer les arcs de cercle  $\widehat{AE}$  et  $\widehat{BD}$  de centres respectifs A et B, ainsi que l'arc de cercle  $\widehat{ED}$  de centre C et de rayon CD. Puis, repasser en couleur le demi-cercle de diamètre [AB] ne contenant pas le point C.

Calculer le périmètre de l'œuf obtenu.

**Exercice n°7****A la recherche du blé pas cher !****8 points**

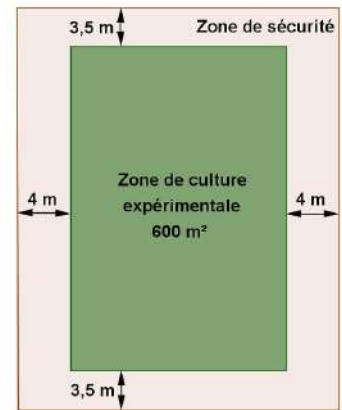
Une équipe d'ingénieurs agronomes doit expérimenter une nouvelle variété de semences de blé.

Pour cette expérimentation, l'équipe est à la recherche d'un terrain rectangulaire devant contenir :

- la zone de culture expérimentale rectangulaire d'une surface de  $600\text{ m}^2$
- la zone de sécurité qui entoure la zone de culture expérimentale comme indiqué sur le schéma ci-contre.

Pour des raisons budgétaires, l'équipe souhaite acheter un terrain ayant la plus petite aire possible.

Quelles sont les dimensions de ce plus petit terrain ?



# Rallye mathématique du Centre et du Congo

## Épreuve officielle

Mars 2022

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.  
Les solutions partielles seront examinées.

### Exercice n°1

### Au bonheur des nombres

8 points

À un nombre entier positif donné on fait correspondre l'entier obtenu en prenant la somme des carrés de ses chiffres. On recommence cette procédure avec le nombre obtenu et ainsi de suite. Si l'on arrive à 1 en répétant une ou plusieurs fois le procédé, le nombre de départ est dit **heureux**.

Par exemple 13 est un nombre heureux car :  $1^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10$  et  $1^2 + 0^2 = 1$ .

1. Montrer que les nombres 7, 23 et 139 sont des nombres heureux.
2. Les nombres 4, 58, 529, 794 et 2022 sont-ils des nombres heureux ?
3. Établir la liste des nombres heureux inférieurs ou égaux à 100.

### Exercice n°2

### Les cartes du chapeau

6 points

A l'intérieur d'un chapeau se trouvent 12 cartes numérotées de 1 à 12. Six amis Abel, Bérénice, Clémence, Dimitri, Ethan et Flora tirent chacun deux cartes sans les remettre et additionnent les nombres inscrits sur leurs cartes. Abel totalise 11 points, Bérénice 4 points, Clémence 16 points, Dimitri 7 points. Ethan a plus de points qu'Abel et Dimitri réunis alors que Flora a le plus grand nombre de points parmi tous ses amis.

Quelles sont les deux cartes de chacun ?



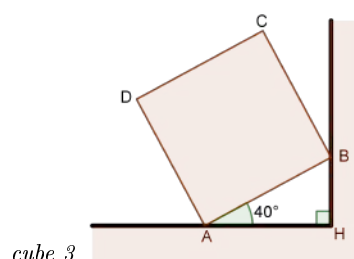
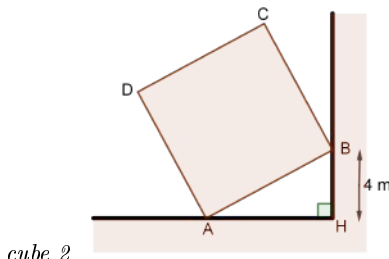
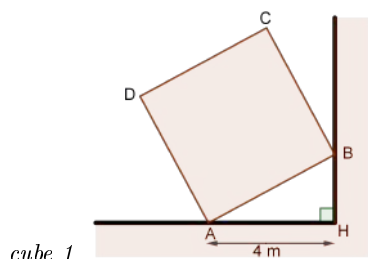
### Exercice n°3

### Les cubes du musée

8 points

Lors d'une visite d'un musée d'art moderne en plein air, Maëlle et son amie Juliette observent 3 cubes géants de 5 m de côté, placés le long d'un mur. Elles se demandent à quelles hauteurs culminent ces cubes et lequel des trois est le plus haut.

En utilisant les informations indiquées sur les figures ci-dessous où ABCD est un carré, répondre à leurs interrogations et préciser comment on pourrait installer un autre cube identique pour qu'il culmine le plus haut possible ?



**Exercice n°4****Duel dans l'octogone****6 points**

Arthur et Meddhi munis de casques VR jouent à un jeu de tir virtuel. Le jeu consiste à suivre un circuit constitué par une succession de salles. Sur le sol de chacune est dessiné un polygone régulier. Le dessin de la première salle est un carré, celui de la seconde un pentagone régulier, celui de la troisième un hexagone régulier etc.

Dans chaque salle, le joueur est placé automatiquement sur un des sommets, il tire alors successivement sur les cibles situées sur chacun des autres sommets du polygone puis se déplace sur le sommet suivant et fait de même jusqu'à revenir au sommet de départ. A ce moment il passe alors à la salle suivante.

Chaque tir nécessite au minimum 3 secondes, le déplacement d'un sommet adjacent à un autre demande 4 secondes, l'entrée dans la 1ère salle et ensuite chaque changement de salle demandent 5 secondes.

1. En réussissant tous ses tirs du 1er coup, Arthur prétend atteindre et achever la salle hexagonale en un peu moins de 4 minutes. Meddhi pense que ce n'est pas possible. Qui a raison ?
2. Quel temps depuis le début du jeu leur faudrait-il au minimum pour atteindre et achever la mission de la salle octogonale ?

**Exercice n°5****Myrtille et son sorbet de mûres****6 points**

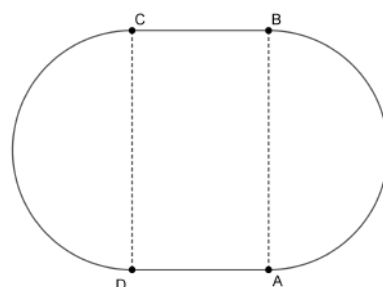
Myrtille a ramassé des mûres sauvages afin de préparer 1 kg de sorbet.

Pour cela elle mélange 3 ingrédients dans les proportions suivantes :

pour 110 g de purée de mûres, elle met 50 g de sucre et 40 g d'eau.

La purée de mûres s'obtient en écrasant les mûres puis en enlevant les grains.

On estime que dans les mûres les grains représentent 30% de la masse.



1. Quelle masse minimum de mûres doit-elle cueillir ? Donner la réponse au gramme près. Donner la masse de sucre et la masse d'eau nécessaires.
2. Elle met son sorbet dans une boîte de glace dont la base, dessinée ci-dessus est composée d'un rectangle et de deux demi-cercles. On donne  $AB = 11$  cm et  $BC = 7,5$  cm. La hauteur de glace dans la boîte est de 6 cm. Elle veut servir son sorbet en faisant des boules de diamètre 5 cm. Combien de boules de sorbet peut-elle faire ?  
(Rappel :  $V_{boule} = \frac{4}{3}\pi r^3$ )

**Exercice n°6****A la recherche du code perdu****10 points**

Pour permettre de se connecter à son site, une banque a mis en place une grille de 16 cases ( $4 \times 4$ ) dans laquelle sont répartis aléatoirement les 10 chiffres. Chaque client de la banque possède un code secret d'accès au site à 6 chiffres (par exemple : 082022, 123456).

Pour se connecter, le client doit cliquer à l'aide de la souris sur les 6 chiffres qui composent son code secret dans l'ordre où ils sont écrits.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 5 | 2 |   | 3 |
| 9 |   | 6 | 1 |
|   |   | 4 |   |
|   | 8 | 0 | 7 |

1. Lucas veut se connecter au site de la banque à l'aide de la grille donnée ci-dessus. Comme il est joueur, il propose à son amie Inès, friande d'énigmes, de découvrir son code en 3 essais.  
Il lui donne cependant les renseignements suivants :
  - \* Les deux premiers chiffres sont différents et situés dans les cases autour du 0 (cases qui ont un côté commun avec celle du 0).
  - \* Le 3ème chiffre est un nombre premier et le 4ème chiffre divise 9.
  - \* Les deux derniers chiffres sont dans des cases de la grille qui se touchent uniquement par un sommet et ils forment un nombre premier.
  - \* La somme de tous les chiffres du code est égale à 20.
 Quels sont tous les codes possibles déterminés par Inès et quelle est la probabilité qu'elle accède alors au site ?
2. Inès, amusée, lui fait remarquer que s'il complète la grille avec des chiffres de 1 à 8, tous différents, de telle sorte que la grille soit un carré magique (la somme des chiffres de chaque ligne, chaque colonne et des deux diagonales est la même) alors Lucas connaîtra le code secret de son amie en lisant les chiffres qui ont été ajoutés de la ligne du haut à la ligne du bas et de gauche à droite.  
Quel est le code secret de son amie Inès pour accéder à la banque ?

**Exercice n°7****Les mille et une glaces****6 points**

Une marchande de glaces propose quinze parfums différents pour ses glaces. Elle vend des cornets de une, deux, trois ou quatre boules. Les boules de chaque cornet doivent être de parfums différents.

1. Pierre, Anaïs et Nora évaluent leurs possibilités de choix différents avant d'acheter un cornet à deux boules.  
Pierre dit : « Puisqu'il y a quinze choix et deux boules, il a  $15 \times 2 = 30$  possibilités. »  
Anaïs le reprend : « Non ! Tu as quinze possibilités pour chaque boule donc tu as  $15 \times 15 = 225$  possibilités. »  
Nora la reprend à son tour : « Tu oublies que chacune des boules a un parfum différent de l'autre. Tu as donc  $15 \times 14 = 210$  possibilités. »  
La marchande qui les a écoutés leur dit : « Aucun de vous n'a raison ! »  
Expliquer pourquoi les trois amis ont tort et donner le bon nombre de possibilités de cornets.
2. Adam arrive et désire un cornet à trois boules. Combien a-t-il de possibilités de choix différents ?
3. La marchande voudrait appeler sa boutique « Les mille et une glaces... et quelques unes en plus. »  
Aura-t-elle assez de choix pour justifier ceci en ne vendant que des cornets de une, deux, trois ou quatre boules ?  
Les boules de chaque cornet étant de parfums différents.

# RALLYE MATHEMATIQUE DU CENTRE ET DU CONGO

Eléments de correction de l'épreuve préparatoire  
Décembre 2011

## Exercice n°1

5 points

### Zoo logique

|      | Éléphant       | Rhino          | Buffle         | Lion           | Léopard         |
|------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| Aldo |                |                |                |                | 1 <sup>er</sup> |
| Bobo |                | 3 <sup>e</sup> |                |                |                 |
| Coco |                |                |                | 2 <sup>e</sup> |                 |
| Dino |                |                | 4 <sup>e</sup> |                |                 |
| Enzo | 5 <sup>e</sup> |                |                |                |                 |

### Zoo logique

L'espèce à laquelle appartient Aldo est : Léopard

L'espèce à laquelle appartient Bobo est : Rhinocéros

L'espèce à laquelle appartient Coco est : Lion

L'espèce à laquelle appartient Dino est : Buffle

L'espèce à laquelle appartient Enzo est : Éléphant

## Exercice n°2

5 points

### Le prix du \$

FA vaut  $1+6=7$  ; CIL vaut  $3+9+12=24$  et CAFE vaut  $3+1+6+5=15$ .

Soit  $x$  la longueur du côté CA\$

On partage le quadrilatère en deux triangles rectangles de même hypoténuse et on applique la relation de Pythagore.

On obtient successivement :

$$15^2 + x^2 = 7^2 + 24^2$$

$$x^2 = 49 + 576 - 225$$

$$x^2 = 400$$

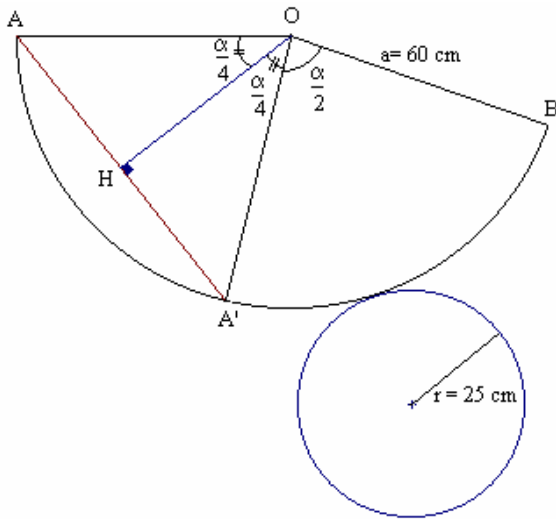
Donc  $x = 20$  et la lettre \$ vaut 20-3-1 c'est à dire 16.

**La lettre remplacée par \$ est P.**

### Exercice n°3

### De quoi en baver !

8 points



$$\text{Soit } \widehat{AOB} = \alpha = \frac{r \times 360}{a} = \frac{25 \times 360}{60} = 150^\circ$$

L'angle au sommet du patron est de  $150^\circ$ .

La longueur de la trace est celle du segment [AA'] tel que l'angle  $\widehat{AOA'} = 75^\circ$ .

$$AA' = 2 \times AH = 2 \times \sin 37,5^\circ \times 60$$

$$AA' \approx 73,1 \text{ cm.}$$

### Exercice n°4

### Grille cartésienne

5 points

- a) La réponse est HMSHHSATMMAATSHTMS MSHHHS HMATAHTATSHHTSHMATMS  
b) le message est : ON EST BIEN EN AUTOMNE
- Le mot clé était : RAYON

### Exercice n°5

### Joe's walk

8 points

Après avoir effectué une première suite de déplacements, Joe se trouve à l'intersection de la 35<sup>ème</sup> avenue et de la Rue H en regardant en direction du sud.

Après la deuxième séquence de déplacements, Joe est à l'angle de la 35<sup>ème</sup> avenue et de la Rue I en direction de l'ouest.

La troisième suite de déplacements amène Joe à l'intersection de la 36<sup>ème</sup> avenue et de la Rue I en direction du nord.

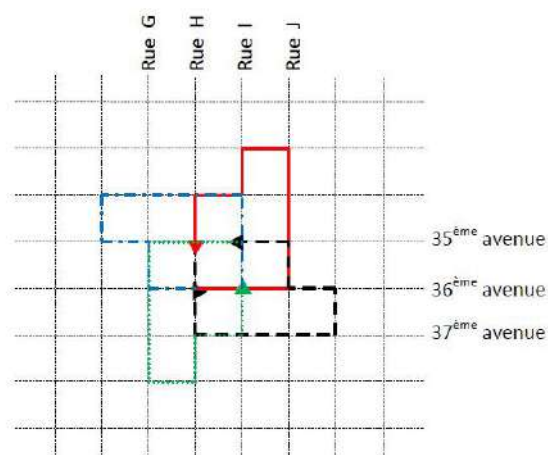
La quatrième suite de déplacements amène Joe à l'intersection de la 36<sup>ème</sup> avenue et de la Rue H en direction du l'est : Joe est revenu au point de départ dans la même direction.

Lorsque Joe effectue 4 suites de déplacements, il revient à la situation initiale.

Il effectue au total 2012 suites de déplacements.

2012 est un multiple de 4 car  $2012 = 4 \times 503$  donc au bout des 2012 suites de déplacements, Joe est à l'intersection de la 36<sup>ème</sup> avenue et de la Rue H.

- 1<sup>ère</sup> suite de déplacements ————
- 2<sup>ème</sup> suite de déplacements - - - - -
- 3<sup>ème</sup> suite de déplacements ..... (points)
- 4<sup>ème</sup> suite de déplacements - . - . - .



### Exercice n°6

8 points

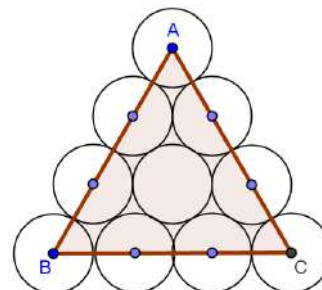
### Les bigoudis

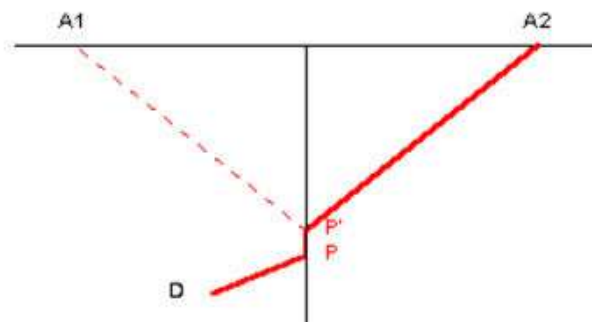
Le triangle ABC formé par les bigoudis est un triangle équilatéral dont le côté mesure 12 cm.

Sa hauteur est donc égale à  $12\text{cm} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$  c'est-à-dire  $6\sqrt{3}$  cm.

Soit  $h$  la hauteur de la pile de bigoudis.

$h = 6\sqrt{3}\text{ cm} + 2\text{ cm} + 2\text{ cm} = 6\sqrt{3}\text{ cm} + 4\text{ cm} \approx 14,4\text{ cm}$ .



**Exercice n°7****Réfléchir avant de foncer****8 points**

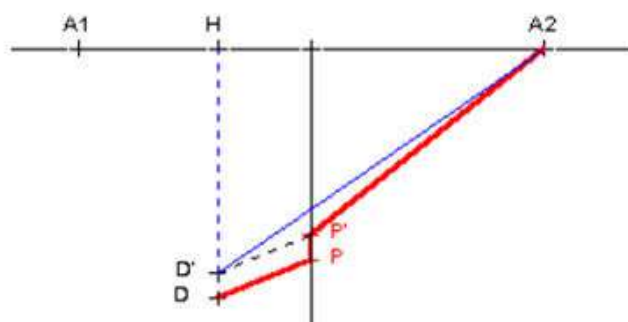
Sur la figure ci-dessus, on a représenté en rouge le trajet d'un concurrent qui a rejoint la piste en P et a parcouru 500 m sur celle-ci jusqu'en P'.

La piste cyclable représente la médiatrice du segment  $[A_1A_2]$ .

A partir de P', rejoindre A<sub>1</sub> ou A<sub>2</sub> donne la même longueur de parcours.

Le choix du point d'arrivée n'influe donc pas sur la longueur du trajet.

Cherchons la position de P' qui rend le trajet de D jusqu'à A<sub>2</sub> le plus court possible.



Le trajet du concurrent a pour longueur :  $\ell = DP + PP' + P'A_2$ .

Le concurrent doit obligatoirement faire 500 m sur la piste cyclable  $[PP']$ .

Traçons le parallélogramme  $DD'P'P$ . Alors  $DD' = PP' = 500$  (m).

Donc  $\ell = 500 + D'P' + P'A_2$ .

Ce trajet de longueur  $\ell$  sera minimum lorsque D', P' et A<sub>2</sub> seront alignés.

Dans ce cas,  $\ell = 500 + D'A_2$ .

La distance  $D'A_2$  se calcule aisément avec la relation de Pythagore dans le triangle  $D'HA_2$ .

$HA_2 = 2000 + 5000 = 7000$  m et  $HD' = 5400 - 500 = 4900$  m.

On obtient  $D'HA_2 = 8\,545$  m.

Dans ce cas,  $\ell = 8\,545 + 500 = 9045$  m (arrondi au mètre près).

**Exercice n°8****Le logo du mécène****8 points**

1. Lorsque  $BM = 1$  m, on a  $AM = 3,2$  m.

La propriété de Thalès permet de trouver  $MN = \frac{1}{4,2} \times 1,8 = \frac{3}{7}$  m.

L'aire du rectangle  $AMNP$  est alors  $A = AM \times MN = 3,2 \times \frac{3}{7} \approx 1,37$  m<sup>2</sup>

2. Lorsque  $BM = 3$  m, on trouve de même  $AM = 1,2$  m et  $MN = \frac{3}{4,2} \times 1,8 = \frac{9}{7}$  m.

L'aire du rectangle  $AMNP$  est alors  $A = AM \times MN = 1,2 \times \frac{9}{7} \approx 1,54$  m<sup>2</sup>.

3. En posant  $BM = x$  m, on trouve  $AM = 4,2 - x$  et  $MN = \frac{x}{4,2} \times 1,8 = \frac{3x}{7}$  m.

L'aire du rectangle  $AMNP$  est alors  $A(x) = (4,2 - x) \times \frac{3x}{7} = \frac{-3x^2 + 12,6x}{7}$

A l'aide de la calculatrice, on peut conjecturer que  $A(x)$  est maximum lorsque  $x = 2,1$  m et  $A_{\max} = 1,89$  m<sup>2</sup>.

On peut démontrer cette conjecture :

- $A(2,1) = (4,2 - 2,1) \times \frac{3 \times 2,1}{7} = 1,89$

- Pour tout  $x \in [0; 4,2]$ ,

$$1,89 - A(x) = 1,89 - \frac{-3x^2 + 12,6x}{7} = \frac{3(x^2 - 4,2x + 4,41)}{7} = \frac{3(x - 2,1)^2}{7} \geq 0.$$

Donc pour tout  $x \in [0; 4,2]$ ,  $1,89 - A(x) \geq 0$ , donc  $1,89 \geq A(x)$ .

Le maximum de  $A$  est bien 1,89, atteint pour  $x = 2,1$ .

Dans ce cas,  $AM = 4,2 - x = 4,2 - 2,1 = 2,1$  m et  $MN = \frac{3x}{7} = \frac{3 \times 2,1}{7} = 0,9$  m.

**Conclusion :** Pour que le logo ait une aire maximale, il faut que  $AM = 2,1$  m et  $MN = 0,9$  m.

# Rallye mathématique du Centre et du Congo

## Éléments de correction de l'épreuve officielle 2012

### Exercice n°1

### Formez les rangs !

5 points

•

Après 1, la plus petite solution est  $36 : 36 = 6^2$  et  $36 = 1 + 2 + 3 + \dots + 8$ .  
Il y avait 36 légionnaires romains à cet entraînement.

•

$1225 = 1 + 2 + 3 + \dots + 48 + 49$  et  
 $1225 = 35^2$

L'historien a raison 1225 hommes pouvaient se mettre en formation carrée aussi bien qu'en formation triangulaire.

### Exercice n°2

### Quand Cupidon s'emmêle...

12 points

• Calcul de OS

On calcule d'abord la longueur de la génératrice grâce à la relation de Pythagore dans le triangle rectangle OHU ou OHP.

$$OU^2 = OP^2 = 30^2 + 10^2 = 1000$$

$$OU = OP = \sqrt{1000} \text{ cm} \approx 31,6 \text{ cm}$$

$$S \in [OU] \text{ donc } OS = OU - US \approx 31,6 \text{ cm} - 8 \text{ cm} \approx 23,6 \text{ cm}$$

• Calcul de OE

(HO) et (RE) sont parallèles, E appartient à [OP] et R appartient à [HP]

Donc d'après le théorème de Thalès

$$\frac{PE}{PO} = \frac{PR}{PH} = \frac{ER}{HO}$$

donc

$$\frac{PE}{\sqrt{1000}} = \frac{25}{30}$$

$$\text{donc } PE \approx 26,4 \text{ cm}$$

$$E \in [PO] \text{ donc } OE = OP - EP \approx 31,6 \text{ cm} - 26,4 \text{ cm} \approx 5,2 \text{ cm}$$

• Réalisation du patron du chapeau

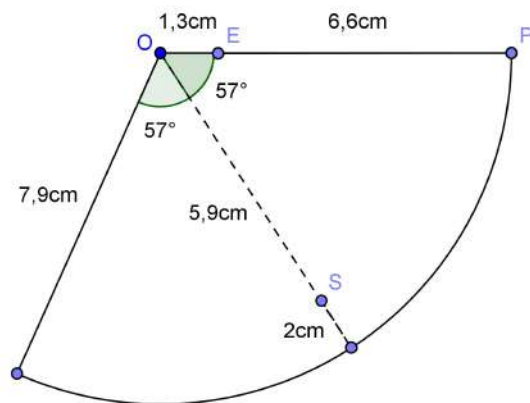
Grâce à la proportionnalité, on peut calculer l'angle  $\alpha$  qu'il faut connaître pour réaliser le patron.

| $360^\circ$                       | $\alpha$                 |
|-----------------------------------|--------------------------|
| $2 \times \pi \times \sqrt{1000}$ | $2 \times \pi \times 10$ |

Le tableau ci-dessus est un tableau de proportionnalité donc  $\alpha \approx 114^\circ$ .

Toutes les longueurs nécessaires à la réalisation du patron sont déjà connues.

Il ne reste plus qu'à tracer le patron en divisant toutes les longueurs par 4.



### Exercice n°3

### Cinq colonnes à la une

8 points

- 2012 étant pair, il ne se situe pas dans les colonnes b et d.  
Divisible par 4, 2012 est donc dans la colonne c. (ligne 503) soit  $(2012/4) = 503$

Les nombres M de la colonne c se trouve sur la ligne  $(M)/4 \Rightarrow$  2012 (c ; 503)

- 1002 étant pair, il ne se situe pas dans les colonnes b et d.  
Non divisible par 4, il n'est donc pas dans la colonne c.  
Il est donc dans la colonne a ou e.

|                                                                                                |                                                                                                              |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Les nombres de la colonne a sont de la forme $2 + 8x$ .<br>$2 + 8x = 1002 \Rightarrow x = 125$ | Les nombres de la colonne e sont de la forme $6 + 8x$ .<br>$6 + 8x = 1002 \Rightarrow x = 124,5$ non entier. |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

1002 est donc dans la colonne a (ligne 251) soit  $(1002 + 2)/4 = 251$

Les nombres P de la colonne a se trouve sur la ligne  $(P + 2)/4 \Rightarrow$  1002 (a ; 251)

- 747 est soit dans la colonne b soit dans la colonne d.

748 étant dans la colonne c, la conclusion n'est pas immédiate.

746 est-il dans la colonne a ?  $2 + 8x = 746 \Rightarrow x = 93$  oui 746 est dans la colonne a,  
donc 747 est dans la colonne b (ligne 187) soit  $(747 + 1)/4 = 187$

Les nombres N de la colonne b se trouve sur la ligne  $(N + 1)/4 \Rightarrow$  747 (b ; 187)

Les nombres Q de la colonne d se trouve sur la ligne  $(Q + 1)/4$

#### Exercice n°4

#### Le Carré de POLYBE

**5 points**

Le mot important du texte est SESAME On utilise donc les lettres : SEAM en premier puis l'alphabet dans l'ordre alphabétique.

|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | S | E | A | M | B |
| 2 | C | D | F | G | H |
| 3 | I | J | K | L | N |
| 4 | O | P | Q | R | T |
| 5 | U | V | X | Y | Z |

45  $\Rightarrow$  O

15  $\Rightarrow$  B

32  $\Rightarrow$  J

12  $\Rightarrow$  E

21  $\Rightarrow$  C

45  $\Rightarrow$  T ...

**Réponse : OBJECTIF PREMIER DE LA CLASSE**

**Exercice n°5****Le dé qui roule****8 points**

1. Position initiale



1ère étape : La face du dessus indique 6 donc on bascule le dé en direction de C deux fois. On obtient :



2ème étape : La face du dessus indique 1 donc on bascule le dé en direction de A une fois. On obtient :



3ème étape : La face du dessus indique 3 donc on bascule le dé en direction de B une fois. On obtient :



4ème étape : La face du dessus indique 2 donc on bascule le dé en direction de A deux fois. On obtient :



5ème étape : La face du dessus indique 5 donc on bascule le dé en direction de C une fois. On obtient :



6ème étape : La face du dessus indique 6 donc on bascule le dé en direction de C deux fois. On obtient :



7ème étape : La face du dessus indique 1 donc on bascule le dé en direction de A une fois. On obtient :



8ème étape : La face du dessus indique 2 donc on bascule le dé en direction de A deux fois. On obtient :



9ème étape : La face du dessus indique 5 donc on bascule le dé en direction de C une fois. On obtient :



10ème étape : La face du dessus indique 6 donc on bascule le dé en direction de C deux fois. On obtient :



11ème étape : La face du dessus indique 1 donc on bascule le dé en direction de A une fois. On obtient :



12ème étape : La face du dessus indique 2 donc on bascule le dé en direction de A deux fois. On obtient :



On effectue la somme des 13 faces supérieures :  $6 + 1 + 3 + 2 + 5 + 6 + 1 + 2 + 5 + 6 + 1 + 2 + 5 = 45$

2. On s'aperçoit que la position du dé à la 7ème étape est la même que celle de la 3ème étape.  
Donc les positions des 3ème, 4ème, 5ème et 6ème étapes se répètent successivement en boucle.

La somme des nombres indiqués sur les faces supérieures du dé en position initiale et des deux premières étapes est :  $6 + 1 + 3 = 10$

La somme des nombres indiqués sur les faces supérieures du dé lors des 3ème, 4ème, 5ème et 6ème étapes est :  $2 + 5 + 6 + 1 = 14$ .

$$2012 = 10 + 14 \times 143$$

Donc lorsque la somme des nombres indiqués sur les faces intérieures est égale à 2012, on a eu successivement la position initiale, la 1ère étape, le 2ème étape puis 143 boucles (3ème, 4ème, 5ème et 6ème étapes).  
La position du dé est alors :

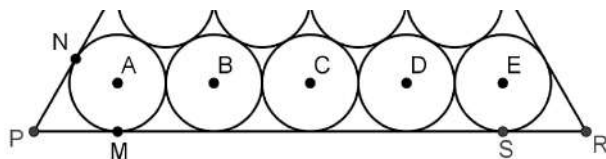


### Exercice n°6

### Good Game !

5 points

Le triangle est clairement équilatéral.

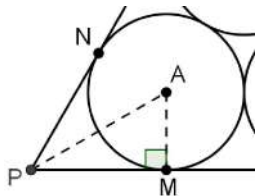


La longueur du côté du triangle est :  $PR = PM + AB + BC + CD + DE + SR$

Les longueurs AB, BC, CD et DE correspondent à des diamètres :  $AB = BC = CD = DE = 57 \text{ mm}$ .

Par symétrie, on a  $PM = SR$ .

Déterminons PM :



Le triangle en bois est équilatéral donc  $\widehat{NPM} = 60^\circ$ .

On en déduit, par symétrie, puisque (AP) est la bissectrice de  $\widehat{NPM}$ , que l'angle  $\widehat{APM}$  mesure  $30^\circ$ .

Le triangle APM étant rectangle en M, on a  $\tan \widehat{APM} = \frac{AM}{PM}$  d'où  $PM = \frac{AM}{\tan \widehat{APM}}$

$$AM = \frac{57}{2} = 28,5 \text{ mm}$$

$$\text{Donc } PM = \frac{28,5}{\tan 30} \approx 49,4 \text{ mm}$$

$$\text{Ainsi : } PR = 2 \times PM + 4 \times AB \approx 2 \times 49,4 + 4 \times 57 \approx 327 \text{ mm}$$

### Exercice n°7

### Au bal masqué, ohé...

5 points

|                  | Déguisements |   |   |   |   |   |
|------------------|--------------|---|---|---|---|---|
| <i>Aristide</i>  | V            | V | P | P | F | F |
| <i>Ben</i>       | P            | F | V | F | V | P |
| <i>Christian</i> | F            | P | F | V | P | V |

Le tableau ci-dessus donne toutes les répartitions possibles de déguisements.

Les possibilités en rouge sont exclues par les affirmations du texte. Il reste donc deux possibilités :

|           |         |
|-----------|---------|
| Aristide  | Pirate  |
| Ben       | Vampire |
| Christian | Fantôme |

|           |         |
|-----------|---------|
| Aristide  | Fantôme |
| Ben       | Vampire |
| Christian | Pirate  |

### Exercice n°8

### Le maître nageur

12 points

Le temps mis pour parcourir un trajet AMB, où M est un point de [HK] est donné par :

$$t = \frac{1}{4}AM + MB, \text{ exprimé en secondes, AM et MB étant exprimé en mètres.}$$

On utilise le théorème de Thalès pour obtenir  $JK = \frac{2}{3}HJ$  ; comme  $HJ + JK = 20$  m, on obtient  $HJ = 12$  m.

On utilise le théorème de Pythagore pour calculer AM et BM connaissant HM et donc MK pour tout point de [HK].

$$1. \text{ trajet AHB : } AH = \sqrt{AK^2 + KH^2} = \sqrt{20^2 + 6^2} = 20,8806. \text{ Alors}$$

$$t = \frac{1}{4}20,8806 + 9 = 14,22 \text{ s}$$

$$\text{trajet AJB : } AJ = \sqrt{AK^2 + KJ^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10. \text{ Alors}$$

$$t = \frac{10}{4} + 15 = 17,5 \text{ s}$$

Il a donc raison.

$$2. \text{ On a } HI = 3 \text{ m ; } AI = \sqrt{17^2 + 6^2} = 18,0278 ; IB = \sqrt{3^2 + 9^2} = 9,4868.$$

Alors

$$t = 13,9938 \text{ s}$$

3. IL faut tester selon les valeurs de  $x = HM$ , à l'aide d'un tableur, d'une calculatrice...

On obtient que pour  $x = 2$  on a  $t = 13,963$  s qui est inférieur au temps mis si  $M = I$ . Si l'on veut poursuivre on verra que pour  $x = 2,2$  on a  $t = 13,961$  s qui est encore plus petit.. mais cela devient de plus en plus imperceptible!

| x   | AM     | MB     | t       |                       |
|-----|--------|--------|---------|-----------------------|
| 1   | 19,925 | 9,055  | 14,037  |                       |
| 2   | 18,974 | 9,220  | 13,963  |                       |
| 3   | 18,028 | 9,487  | 13,994  |                       |
| 4   | 17,088 | 9,849  | 14,121  |                       |
| 5   | 16,155 | 10,296 | 14,335  |                       |
| 6   | 15,232 | 10,817 | 14,625  |                       |
| 7   | 14,318 | 11,402 | 14,981  |                       |
| 8   | 13,416 | 12,042 | 15,396  |                       |
| 9   | 12,530 | 12,728 | 15,860  |                       |
| 10  | 11,662 | 13,454 | 16,369  |                       |
| 11  | 10,817 | 14,213 | 16,917  |                       |
| 12  | 10,000 | 15,000 | 17,500  |                       |
| 13  | 9,220  | 15,811 | 18,116  |                       |
| 14  | 8,485  | 16,643 | 18,765  |                       |
| 15  | 7,810  | 17,493 | 19,445  |                       |
| 16  | 7,211  | 18,358 | 20,160  |                       |
| 17  | 6,708  | 19,235 | 20,912  |                       |
| 18  | 6,325  | 20,125 | 21,706  |                       |
|     |        |        |         |                       |
| 2   | 18,974 | 9,220  | 13,9630 |                       |
| 2,1 | 18,879 | 9,242  | 13,9615 |                       |
| 2,2 | 18,784 | 9,265  | 13,9610 | ← temps le plus court |
| 2,3 | 18,689 | 9,289  | 13,9616 |                       |
| 2,4 | 18,595 | 9,315  | 13,9632 |                       |
| 2,5 | 18,500 | 9,341  | 13,9658 |                       |
| 2,6 | 18,405 | 9,368  | 13,9694 |                       |
| 2,7 | 18,311 | 9,396  | 13,9740 |                       |
| 2,8 | 18,216 | 9,425  | 13,9796 |                       |
| 2,9 | 18,122 | 9,456  | 13,9862 |                       |

# Rallye mathématique du Centre et du Congo

## Éléments de correction de l'épreuve préparatoire - 2° 2012

### Exercice n°1

### Les cubes de son cours

5 points

FACE A:



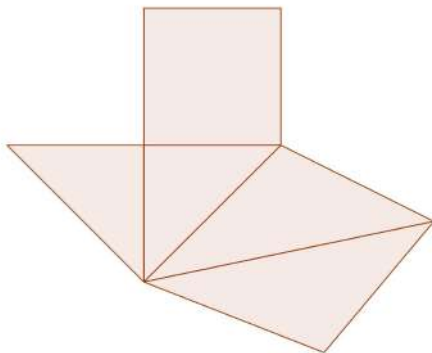
FACE B:



### Exercice n°2

### Empreinte

8 points



**Exercice n°3****Les ascendants****12 points**

1. 123456789

2. Les ascendants à 2 chiffres :

```

12 13 14 15 16 17 18 19
23 24 25 26 27 28 29
34 35 36 37 38 39
45 46 47 48 49
56 57 58 59
67 68 69
78 79
89

```

soit  $1+2+\dots+8 = 36$ 3. 84 ascendants à 3 chiffres ( $84 = 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1$ )

le nombre d'ascendants à 3 chiffres qui commencent par 1 est 28

le nombre d'ascendants à 3 chiffres qui commencent par 2 est 21

le nombre d'ascendants à 3 chiffres qui commencent par 3 est 15 et ainsi de suite.

4. 126 ascendants à 4 chiffres ( $126 = 56+35+20+10+4+1$ ).

Le nombre d'ascendants à 4 chiffres qui commencent par 1 est 56 et ainsi de suite.

5. Il y a autant d'ascendants à 4 chiffres qu'à 5 chiffres :

Pour chaque ascendant à 4 chiffres, on obtient avec les 5 chiffres non utilisés un unique ascendant à 5 chiffres.

6. 511

| Nombre de chiffres  | 1 | 2  | 3  | 4   | 5   | 6  | 7  | 8 | 9 | total |
|---------------------|---|----|----|-----|-----|----|----|---|---|-------|
| Nombre d'ascendants | 9 | 36 | 84 | 126 | 126 | 84 | 36 | 9 | 1 | 511   |

**Exercice n°4****Echecs et maths****8 points**

Question 1 : ce sont les cases C4, C6, D3, D7, F3, F7, G4, G6.

Question 2a : 4, avec par exemple le trajet G4, F6, D5 et F4.

Question 2b : ce sont les cases H8, G7, F4, F8, E7, D6, D8, C1, C3, C5,

C7, B2, B4, B6, A1, A3, A5, A7.

Pour justifier, il suffit d'inscrire sur chaque case le nombre minimum de coups nécessaires pour l'atteindre.

|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 4 | 5 | 4 | 5 | 4 | 5 | 4 | 5 |
| B | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 5 | 4 |
| C | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 5 |
| D | 3 | 2 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 |
| E | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 4 | 3 |
| F | 1 | 2 | 1 | 4 | 3 | 2 | 3 | 4 |
| G | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 3 |
| H | 3 | X | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 4 |

**Exercice n°5****Attention à la marche****5 points**

Les diverses hypothèses concernant la descente de l'escalier 2 marches par 2 marches, 3 marches par 3 marches, etc... jusqu'à 7 par 7 conduisent aux constatations suivantes :  
le nombre de marches est :

1. multiple de 7 ;
2. impair ;
3. et quand on le divise par
  - (a) 3 il reste 2 ;
  - (b) 4 il reste 3 ;
  - (c) 5 il reste 4 ;
  - (d) 6 il reste 5.

En divisant les multiples de 7 impairs inférieurs à 200 par 3, 4, 5 et 6, on constate que seul **119** convient. Ce qui prouve à la fois son existence et son unicité.

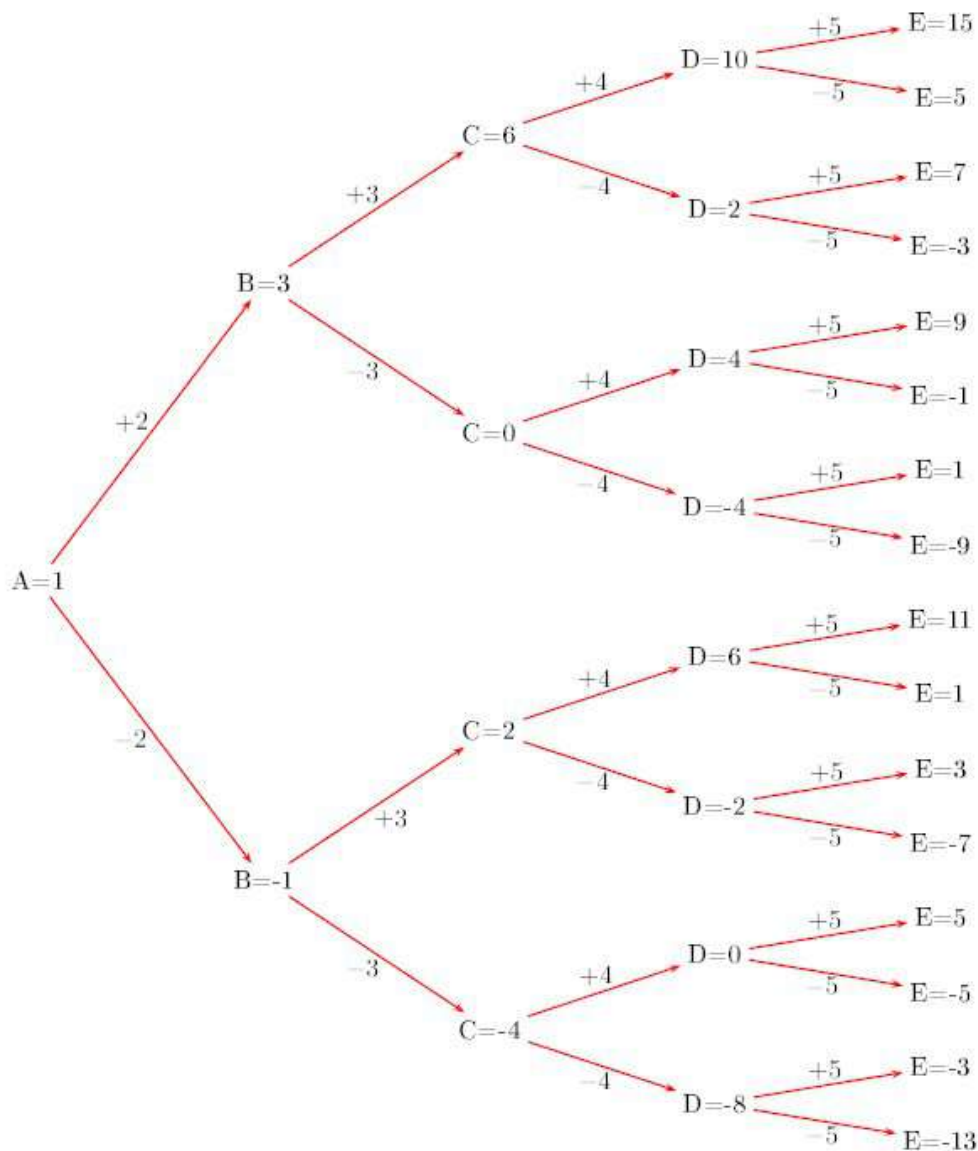
Plus astucieusement : On pourra s'intéresser à un escalier ayant une marche de plus.

**Exercice n°6**

**La farandole des + et des -**

5 points

On peut obtenir toutes les valeurs prises par  $E$  en faisant l'arbre suivant :



- On peut obtenir 5 de deux manières différentes :  
 $E = 1 + 2 + 3 + 4 - 5$  et  $E = 1 - 2 - 3 + 4 + 5$
- $E$  peut prendre treize valeurs différentes :  
 $-13 \quad -9 \quad -7 \quad -5 \quad -3 \quad (2) \quad -1 \quad 1 \quad (2) \quad 3 \quad 5 \quad (2) \quad 7 \quad 9 \quad 11$  et 15
- On a  $F = E \pm 6$ . Pour que  $F$  puisse être égale à 12, il faudrait que  $E$  puisse atteindre la valeur 6 ou la valeur 18, ce qui n'est pas le cas.  
 Donc  $F$  ne peut pas être égal à 12.

### Exercice n°7

### Bien tenté

5 points

1. On applique le théorème de Pythagore pour trouver les dimensions du triangle formant l'entrée de la tente. C'est un triangle isocèle de côté 2,5 m et de hauteur 1. D'où le volume du prisme :  $2,1 \times 1 \times \sqrt{2,5^2 - 1^2} \approx 4,8$ .
2. De même :  $2,1 \times 2 \times \sqrt{2,5^2 - 2^2} \approx 6,3$ .
3. En prenant  $x$  pour hauteur de piquet, avec  $x$  compris entre 0 et 2,5, on trouve que l'aire du triangle d'entrée est donnée par  $2,1x\sqrt{2,5^2 - x^2}$ .  
A l'aide de la calculatrice, par lecture graphique on détermine un maximum de cette fonction sur l'intervalle  $[0 ; 2,5]$ .  
D'où l'aire maximum pour  $x \approx 1,77$ . (valeur exacte  $x = 2,5/\sqrt{2}$ )

On peut utiliser une démonstration géométrique comme celle de l'exercice 1 :

On considère le triangle rectangle "moitié" du triangle isocèle.

La hauteur issue du pied du piquet est toujours inférieure à la médiane et la base correspondante mesure toujours 2,5 m.

Ainsi l'aire du triangle rectangle est maximum lorsque la hauteur coïncide avec la médiane, c'est à dire lorsque le triangle est rectangle isocèle.

En utilisant le théorème de Pythagore, on obtient ainsi :  $2x^2 = 2,5^2$ , ce qui donne la réponse.

### Exercice n°8

### Jeu, sets et maths ...

8 points

Posons  $x$  le nombre de cercles sur la longueur et  $y$  le nombre de cercles sur la largeur ( $x \geq y$ ).

Le nombre total de cercles est  $xy$ .

Le nombre de cercles blancs est  $2x + 2y - 4$ .

Le nombre de cercles rouges est égal à  $\frac{1}{2}xy$ .

On cherche à résoudre l'équation  $\frac{1}{2}xy = 2x + 2y - 4$ , soit  $xy = 4x + 4y - 8$ .

**Méthode experte :**

$$4x + 4y - 8 = xy \iff (x - 4)(y - 4) = 8$$

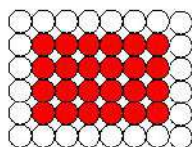
Il y a quatre chemins pour écrire 8 comme produit de deux entiers :  $4 \times 2$  et  $8 \times 1$  qui correspondent aux solutions : les couples  $(x ; y)$  sont  $(8 ; 6)$  et  $(12 ; 5)$ .

**Autre méthode :**

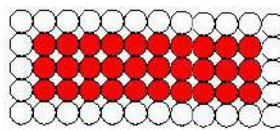
$$4x + 4y - 8 = xy \iff y = \frac{8}{x - 4} + 4.$$

En utilisant le tableur de la calculatrice, on obtient le tableau ci-contre.

| $x$ | $y$   |
|-----|-------|
| 1   | 1.33  |
| 2   | 0     |
| 3   | -4    |
| 4   | ERROR |
| 5   | 12    |
| 6   | 8     |
| 7   | 6.67  |
| 8   | 6     |
| 9   | 5.6   |
| 10  | 5.33  |
| 11  | 5.14  |
| 12  | 5     |
| 13  | 4.89  |
| 14  | 4.8   |



8 × 6



12 × 5

# Rallye mathématique du Centre et du Congo

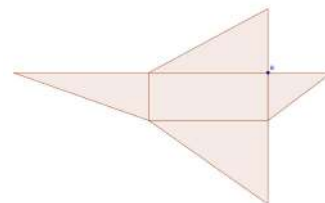
## Éléments de correction de l'épreuve officielle 2013

### Exercice n°1

### A la pêche au moule

8 points

1. Le patron du moule ne peut avoir que la configuration ci-contre (on a positionné deux angles droits au point B) :  
Les calculs des longueurs des cotés se font de proche en proche par application du théorème de Pythagore.

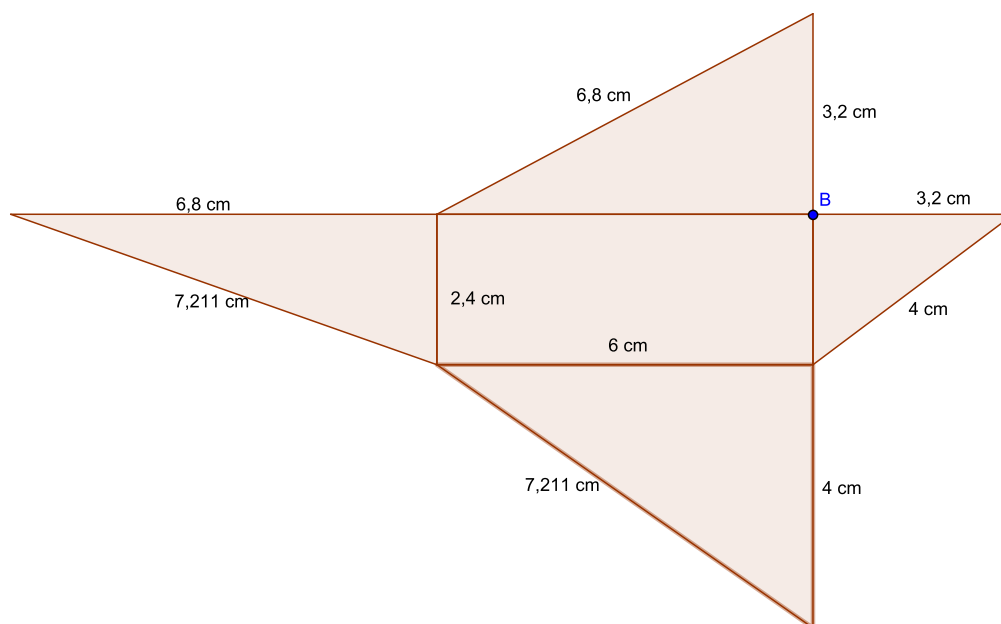


2. On a ainsi la longueur de la tige supplémentaire :  $\sqrt{52}$  cm (soit environ 7,2 cm).
3. Le volume d'un moule est donné par :

$$V = \frac{1}{3} (6 \times 2,4 \times 3,2) = 15,36 \text{ cm}^3$$

soit 15,36 mL.

Pour 100 moules, cela donne 1536 mL



**Exercice n°2****A côté de la plaque****5 points**

1. De CA001 à CA999, il y a 999 numéros d'immatriculation.  
De même, de CB 001 à CB 999, il y a 999 numéros d'immatriculation...  
De A à J, il y a 10 lettres différentes, donc de CA0001 à CJ999, il y a  $10 \times 999$  numéros d'immatriculation, c'est-à-dire 9990.  
De CK001 à CK854, il y a 854 numéros d'immatriculation.  
 $9990 + 854 = 10844$  Il y a 10844 numéros d'immatriculation commençant par C.

2.

| Numéros de plaque     | Nombre de plaque comportant le chiffre 7                                             |
|-----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| De CA001 à CA069      | 7 (une par dizaine)                                                                  |
| De CA070 à CA079      | 10                                                                                   |
| De CA080 à CA099      | 2                                                                                    |
| De CA001 à CA099      | 19 (en sommant ce qui précède)                                                       |
| De CA001 à CA699      | 133 (19 par centaine et 7 centaines)                                                 |
| De CA700 à CA799      | 100                                                                                  |
| De CA800 à CA999      | 38 (19 par centaine et 2 centaines)                                                  |
| Donc de CA001 à CA999 | $133 + 100 + 38 = 271$                                                               |
| De CA001 à CJ999      | 2710 (De A à J, il y a 10 lettres et pour chaque lettre 271 numéros comportant un 7) |
| De CK001 à CK854      | $7 \times 19 + 100 + 5 = 238$                                                        |

$$2710 + 238 = 2948$$

Il y a 2948 véhicules dont le numéro de plaque commence par C et comporte le chiffre 7.

3. 3. De 001 à 999, les palindromes comportant le chiffre 7 sont : 070 ; 171 ; 272 ; 373 ; 474 ; 575 ; 676 ; 707 ; 717 ; 727 ; 737 ; 747 ; 757 ; 767 ; 777 ; 787 ; 797 ; 878 ; 979. Ils sont au nombre de 19.  
De A à J, il y a 10 lettres donc de CA001 à CJ999, il y a 190 numéros de plaque vérifiant toutes conditions données.  
De CK001 à CK854, les palindromes comportant le chiffre 7 sont : 070 ; 171 ; 272 ; 373 ; 474 ; 575 ; 676 ; 707 ; 717 ; 727 ; 737 ; 747 ; 757 ; 767 ; 777 ; 787 ; 797. Ils sont au nombre de 17.  
 $190 + 17 = 207$ . Il y a 207 véhicules dont le numéro de plaque commence par C et dont la partie numérique est palindromique et comporte le chiffre 7.

### Exercice n°3

### Ce n'est pas du cinéma !

5 points

A ce jour, les formules les plus courtes possibles sont :

$$28 = (1 + 2 \times 3) \times 4$$

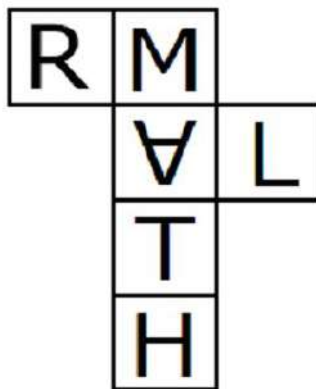
$$468 = (1 \times 2 + 3^4 - 5) \times 6$$

$$2013 = 1 + 2 \times (3 + 4^5 - 6 - 7 - 8)$$

### Exercice n°4

### Les trois vues du cube

5 points



### Exercice n°5

### Jeu du Potkimonte

8 points

1. Compléter ce tableau jusqu'au niveau 20.

| niveau | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7  | 8 | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|--------|---|---|---|---|---|---|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| PV     | 1 | 3 | 0 | 4 | 9 | 3 | 10 | 2 | 11 | 1  | 12 | 0  | 13 | 27 | 12 | 28 | 11 | 29 | 10 | 30 |

2. Combien a-t-il de  $PV$  au niveau 39 ?

Au niveau 39, on aura 0  $PV$ .

3. Que remarque-t-on aux niveaux 3, 12 et 39 ? A quel niveau suivant cela se reproduit-il ?

A ces niveaux on obtient toujours 0.

On remarque que si  $PV_n = 0$  alors  $PV_{n+1} = n + 1$  et  $PV_{n+3} = n$  ;  $PV_{3n+3} = 0$

$$PV_3 = PV_{3 \times (3) + 3} = PV_{12}$$

$$PV_{3 \times (12) + 3} = PV_{39} = 0$$

$$PV_{3 \times (39) + 3} = PV_{120} = 0$$

$$PV_{3 \times (120) + 3} = PV_{363} = 0$$

$$PV_{3 \times (363) + 3} = PV_{1992} = 0$$

4. Au 2009e niveau, le personnage a 635  $PV$ .

$$PV_{2008} = 2644 \quad (2008 + 635 = 2644)$$

$$PV_{2010} = 2645$$

| 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 |
|------|------|------|------|------|------|
| 2644 | 635  | 2645 | 634  | 2646 | 633  |

### Exercice n°6

### In the pocket

5 points

La largeur de l'enveloppe doit être supérieure à la somme de la largeur du livre et de son épaisseur.

La hauteur de l'enveloppe doit être supérieure à la somme de la longueur du livre et de la moitié de son épaisseur.

Les dimensions minimales de l'enveloppe sont donc :

$$l = 125 + 30 = 155 \text{ mm}$$

$$h = 200 + 15 = 215 \text{ mm}$$

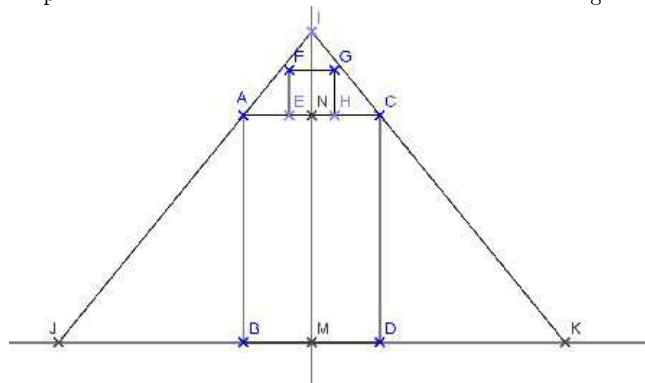
Ainsi, seule l'enveloppe B convient.

### Exercice n°7

### Un parfum de maths

8 points

Le problème revient à chercher l'aire minimale du triangle de la base du prisme.



On pose  $MK = y$  et  $IN = x$  avec  $y > 3$  et  $x > 2$

N appartient à (IN), C appartient à (IK) et (NC) est parallèle à (NK) donc d'après la propriété de Thalès :

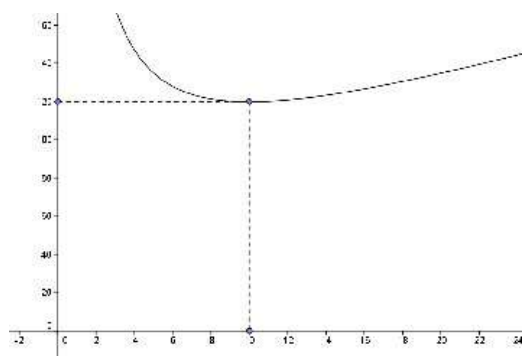
$$\frac{IN}{IM} = \frac{NC}{MK} \text{ donc } \frac{x}{x+10} = \frac{3}{y} \text{ donc } xy = 3(x+10) \text{ donc } y = 3 + \frac{30}{x}$$

$$\text{Aire}(IJK) = \frac{JK \times IM}{2} = \frac{2y \times (10+x)}{2} = (3 + \frac{30}{x}) \times (10+x) = 60 + 3x + \frac{300}{x}$$

Il faut trouver le minimum de la fonction  $f(x) = 60 + 3x + \frac{300}{x}$  en la programmant sur la calculatrice ou en utilisant

GeoGebra pour  $x > 2$ . Le minimum est 120 et il est atteint pour  $x = 10$ .  $f(10) = 120$ .

On peut noter que dans ce cas, A est le milieu de [IJ] et C est le milieu [IK].



Donc le volume minimal du prisme est :

$$V = \text{Base} \times \text{Hauteur} = 120 \times 3 = 360$$

Le volume minimal de la boîte est  $360 \text{ cm}^3$ .

**Exercice n°8****Mais où est donc passée Argine ?****8 points**

Sur les 104 cartes du jeu, 39 ont été distribuées.  
Il y a donc 65 cartes dans la pioche.

1. Quelle est la probabilité que Judith tire une carte lui permettant de faire un carré ?

|                    |                                                                                   |                                                                                   |                                                                 |
|--------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| Cartes favorables  |  |  | 3 cartes sur 65 sont possibles donc :<br><br>$p = \frac{3}{65}$ |
| Cartes disponibles | 1                                                                                 | 2                                                                                 |                                                                 |

2. Quelle est la probabilité que Rachel tire une carte lui permettant de faire une tierce ?

|                    |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                    |                                                                 |
|--------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| Cartes favorables  |  |  |  |  |  |  | 7 cartes sur 65 sont possibles donc :<br><br>$p = \frac{7}{65}$ |
| Cartes disponibles | 1                                                                                 | 2                                                                                 | 1                                                                                 | 0                                                                                 | 1                                                                                 | 2                                                                                  |                                                                 |

3. Quelle est la probabilité que Pallas tire une carte lui permettant de faire une quinte ?

|                    |                                                                                     |                                                                                     |                                                                |
|--------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| Cartes favorables  |  |  | 1 carte sur 65 sont possibles donc :<br><br>$p = \frac{1}{65}$ |
| Cartes disponibles | 1                                                                                   | 0                                                                                   |                                                                |

# Rallye mathématique du Centre et du Congo

## Éléments de correction de l'épreuve préparatoire

Décembre 2013

### Exercice n°1

### Meuble sous toit

5 points

Posons  $BM = x$  et  $AM = h$  (voir figure).

Utilisons le théorème de Thalès dans le triangle  $BMN$

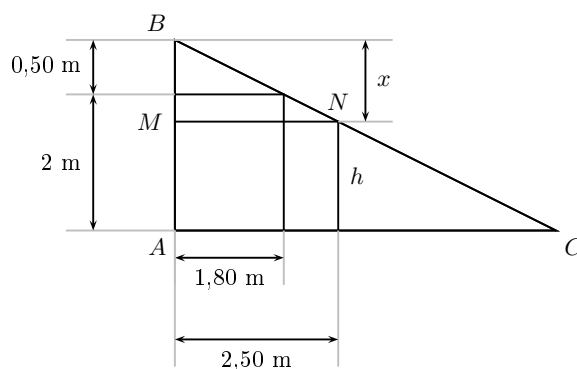
(ou en utilisant  $\tan(\widehat{ABC})$ ) pour écrire :

$$\frac{1,8}{0,5} = \frac{2,5}{x} \quad \text{d'où} \quad x = \frac{2,5 \times 0,5}{1,8} = \frac{25}{36}$$

$$h = 2,5 - \frac{25}{36} \approx 1,8055$$

Le locataire peut donc mettre à la même place le meuble de 1,80 m sur 2,50 m.

Remarque : c'est loin d'être la seule méthode!

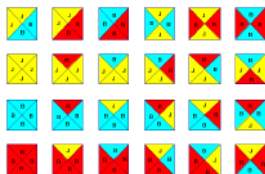


### Exercice n°2

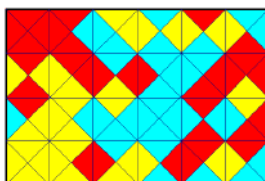
### Couper Coller

8 points

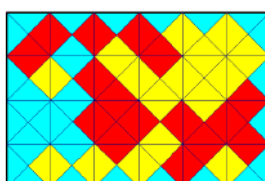
Les 24 pions :



Les côtés en contact de même couleur :



Les côtés en contact de même couleur et les côtés du rectangle d'une seule couleur :



**Exercice n°3****« Epharant ... »****12 points****Situation 1 :**

Les instants d'émission du phare A ont lieu avec un nombre de minutes pair , alors que les instants d'émission du phare B ont lieu avec un nombre de minutes impair.

Il n'y aura donc pas de coïncidence.

**Situation 2 :**

Soit  $t$  l'horaire de la 1ère émission du phare B. 5 h 48 min valent 348 min ;

$t$  est tel que  $348 = n \times 10 + t$  avec  $0 \leq t < 10$  ;  $t$  est le reste de la division de 348 par 10 soit 8.

Le phare B émet pour la première fois à 0 h 08 min.

**Situation 3 :**

Phare A : 0 - 6 - 12 - 18 - **24** - 30 - 36 - 42 - 48 - **54** - ...

Phare B : 4 - 14 - **24** - 34 - 44 - **54** ...

L'heure de la 1ère coïncidence entre les deux phares est 0 h 24 min

Les coïncidences suivantes ont lieu toutes les 30 min (plus petit commun multiple de 6 et 10).

La dixième coïncidence a donc lieu  $9 \times 30$  min après la première, c'est à dire à 4 h 54 min.

On peut compter toutes les 30 min entre 0 h 00 et 07 h 00 à partir de la première coïncidence à 0 h 24.

Ou bien, on recherche le plus grand entier  $n$  tel que  $24 + n \times 30 \leq 7 \times 60$  d'où  $n = 13$  ;

Il y aura donc eu 14 coïncidences entre 0 h et 7 h.

**Situation 4 :**

Soit  $x$  la période d'émission du phare B. 1 h 36 min = 96 min ;

$x$  est tel que  $96 = 5 + n \times x$  et  $2 \leq x \leq 12$  donc  $n \times x = 91 = 7 \times 13$  d'où  $x = 13$ .

La période d'émission du phare B est de 13 minutes.

**Exercice n°4****Le code secret****5 points**

Procédons par ordre : le nombre s'écrit abcd pq.

abcd est de la forme : 1234 ; 2345 ; 3456 ; 4567 ; 5678 ; 6789

Les deux derniers chiffres possibles sont : **10 ; 21 ; 32 ; 43 ; 54 ; 65 ; 76 ; 87 ; 98**

Or le code est un carré parfait. Les carrés ne peuvent se terminer que par : 0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 6 ou 9.

Les deux derniers chiffres ne peuvent être que : **10 ; 21 ; 54 ; 65 ; 76**

|      |    |              |      |    |              |
|------|----|--------------|------|----|--------------|
| 1234 | 10 | pas un carré | 4567 | 10 | pas un carré |
| 1234 | 21 | pas un carré | 4567 | 21 | pas un carré |
| 1234 | 54 | pas un carré | 4567 | 54 | pas un carré |
| 1234 | 65 | pas un carré | 4567 | 65 | pas un carré |
| 1234 | 76 | pas un carré | 4567 | 76 | pas un carré |
| 2345 | 10 | pas un carré | 5678 | 10 | pas un carré |
| 2345 | 21 | pas un carré | 5678 | 21 | pas un carré |
| 2345 | 54 | pas un carré | 5678 | 54 | pas un carré |
| 2345 | 65 | pas un carré | 5678 | 65 | pas un carré |
| 2345 | 76 | pas un carré | 5678 | 76 | pas un carré |
| 3456 | 10 | pas un carré | 6789 | 10 | pas un carré |
| 3456 | 21 | pas un carré | 6789 | 21 | pas un carré |
| 3456 | 54 | pas un carré | 6789 | 54 | pas un carré |
| 3456 | 65 | pas un carré | 6789 | 65 | pas un carré |
| 3456 | 76 | pas un carré | 6789 | 76 | $(824)^2$    |

Le code était donc : **678976**

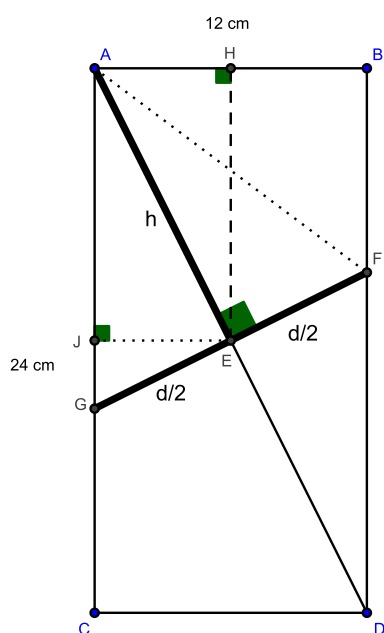
**Exercice n°5****Renversants****5 points**

Voici les 24 nombres "renversants" vérifiant les règles de l'énoncé :

60009 ; 60809 ; 66099 ; 66899 ; 68089 ; 68889 ; 69069 ; 69869  
 80008 ; 80808 ; 86098 ; 86898 ; 88088 ; 88888 ; 89068 ; 89868  
 90006 ; 90806 ; 96096 ; 96896 ; 98086 ; 98886 ; 99066 ; 99866

**Exercice n°6****Le chapeau chinois****8 points**

1. Pour faire le pliage, il faut amener le point D sur le point A. On obtient ainsi le pli indiqué par le segment [GF].
2. Puis en pliant la feuille suivant h, on obtient le pli indiqué par le segment [AD].  
 On obtient donc la figure ci-dessous dans laquelle, pour des raisons de symétrie, E est le centre du rectangle et H et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC].



On remarque que la hauteur  $h$  est égale à la moitié de la longueur de la diagonale [AD].  
 En utilisant la relation de Pythagore dans le triangle rectangle AHE rectangle en E, on a

$$h^2 = 6^2 + 12^2 \text{ donc } h = \sqrt{180} \text{ cm}$$

3. L'aire du pentagone est égale à l'aire totale de la bande à laquelle il faut enlever l'aire du triangle GAF.

Sachant que  $d = h = \sqrt{180}$  cm, on a :

$$A_{\text{pentagone}} = 12 \times 24 - \frac{\sqrt{180} \times \sqrt{180}}{2} = 288 - 90 = 198$$

L'aire du pentagone est de 198 cm<sup>2</sup>.

**Exercice n°7****Le logo du mécène****8 points**

1. Lorsque  $BM = 1$  m, on a  $AM = 3,2$  m.

La propriété de Thalès permet de trouver  $MN = \frac{1}{4,2} \times 1,8 = \frac{3}{7}$  m.

L'aire du rectangle  $AMNP$  est alors  $\mathcal{A} = AM \times MN = 3,2 \times \frac{3}{7} \approx 1,37$  m<sup>2</sup>.

2. En posant  $BM = x$  m, on trouve  $AM = 4,2 - x$  et  $MN = \frac{x}{4,2} \times 1,8 = \frac{3x}{7}$  m.

L'aire du rectangle  $AMNP$  est alors  $\mathcal{A}(x) = (4,2 - x) \times \frac{3x}{7} = \frac{-3x^2 + 12,6x}{7}$ .

A l'aide de la calculatrice, on peut conjecturer que  $\mathcal{A}(x)$  est maximum lorsque  $x = 2,1$  m et  $\mathcal{A}_{max} = 1,89$  m<sup>2</sup>.

On peut démontrer cette conjecture :

- $\mathcal{A}(2,1) = (4,2 - 2,1) \times \frac{3 \times 2,1}{7} = 1,89$

- Pour tout  $x \in [0 ; 4,2]$ ,

$$1,89 - \mathcal{A}(x) = 1,89 - \frac{-3x^2 + 12,6x}{7} = \frac{3x^2 - 12,6x + 13,23}{7} = \frac{3(x^2 - 4,2x + 4,41)}{7} = \frac{3(x - 2,1)^2}{7} \geq 0.$$

Donc pour tout  $x \in [0 ; 4,2]$ ,  $1,89 - \mathcal{A}(x) \geq 0$ , donc  $1,89 \geq \mathcal{A}(x)$ .

Le maximum de  $\mathcal{A}$  est bien 1,89, atteint pour  $x = 2,1$ .

Dans ce cas,  $AM = 4,2 - x = 4,2 - 2,1 = 2,1$  m et  $MN = \frac{3x}{7} = \frac{3 \times 2,1}{7} = 0,9$  m.

**Conclusion :** Pour que le logo ait une aire maximale, il faut que  $AM = 2,1$  m et  $MN = 0,9$  m.

# Exercice n°8

# Touché, coulé !

8 points

1. (a)

Il n'y a a priori pas de difficultés. Un bateau est constitué de 2 cases contiguës. L'expérience aléatoire correspondante consiste à toucher une des cases. Il y a 2 cases favorables sur 100 cases possibles. La probabilité est donc de 2/100, soit **1/50**.

(b)

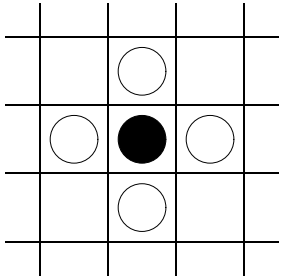
C'est une nouvelle expérience aléatoire. Cette fois, les cases du bateau étant contiguës, et comme on est en E5 (case "standard"), il y a 4 cases favorables pour atteindre la deuxième case du bateau, qui sont **E4, E6, D5 et F5**.

(c)

Il faut de nouveau se placer dans une autre expérience aléatoire, et envisager trois cas distincts, selon la case touchée. On sait que 2 cases sont "favorables".

1er cas :

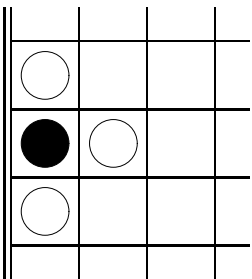
Case "standard"



même cas que la b/  
4 cases sont possibles.

2ème cas :

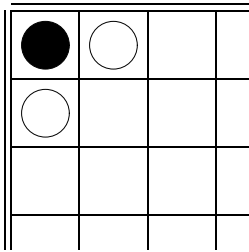
Case touchant un  
bord, mais pas en coin.



3 cases sont possibles.

3ème cas :

coin.



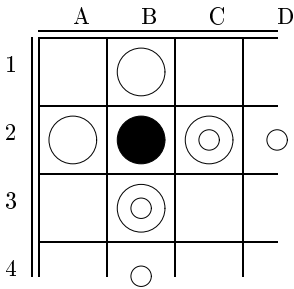
Cette fois, seules 2 cases sont  
possibles.

Seul, le 3ème cas correspond à la description. La position des cases favorables est alors donnée : par exemple, B1 et A2 si Léa a joué en A1.

Les positions possibles de la case touchée du bateau de Pierre sont : **A1, A10, J1, et J10**.

D'où 8 positions possibles du bateau : **(A1,A2) ; (A1,B1) ; (A9,A10) ; (A10,B10) ; (J1,J2) ; (I1,J1) ; (I10,J10) et (J9,J10)**

2. L'expérience consiste à atteindre une deuxième case (et une seule). La disposition des cases favorables se trouve dans le dessin suivant :



On s'aperçoit alors que certaines cases correspondent à deux positions du bateau. Ce sont les cases **B3 et C2** qui donnent le maximum de chance.

# Rallye mathématique du Centre et du Congo

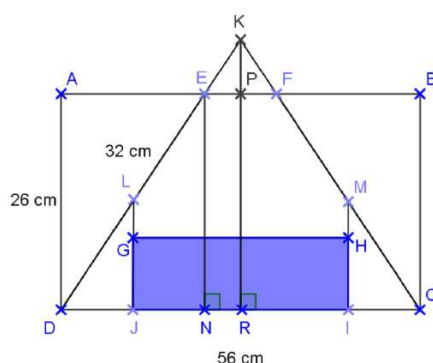
## Éléments de correction de l'épreuve officielle 2014

### Exercice n°1

### Casier judicieux

8 points

Il suffit de regarder si le casier rentre par le côté qui mesure 30 cm car s'il ne rentre pas par ce côté, il ne rentrera pas par le côté qui mesure 45 cm.



#### • 1<sup>re</sup> méthode

On calcule JL et on regarde si c'est plus grand ou plus petit que 17 cm ce qui correspond à la hauteur du casier.

On applique le théorème de Thalès dans le triangle DEN avec  $(LJ) \parallel (EN)$  et on a  $\frac{LJ}{EN} = \frac{DJ}{DN}$ .

On sait que  $EN = 26$  cm.

On calcule DN en utilisant la relation de Pythagore dans le triangle ADN rectangle en N.

On trouve  $DN = 2\sqrt{87}$  cm  $\approx 18,7$  cm.

$IJ = 30$  cm donc  $DJ = \frac{56\text{cm}}{2} - \frac{30\text{cm}}{2} = 13$  cm

Donc  $\frac{LJ}{26} = \frac{13}{18,7}$  donc  $LJ \approx 18,1$  cm.

Donc le casier rentre.

#### • 2<sup>de</sup> méthode

On suppose que LJ mesure 17 cm, on calcule DJ puis on en déduit IJ. Si le segment [IJ] mesure plus de 30cm, le casier rentre.

Dans le triangle DEN rectangle en N :  $\sin \widehat{EDN} = \frac{EN}{DE} = \frac{26}{32}$  donc  $\widehat{EDN} \approx 54^\circ$ .

Dans le triangle rectangle DLJ rectangle en J :  $\tan \widehat{LDJ} = \frac{LJ}{DJ}$  donc  $DJ = \frac{17\text{cm}}{\tan 54^\circ} \approx 12,4$  cm

Donc  $IJ \approx 56$  cm -  $2 \times 12,4$  cm = 31,3 cm

Donc le casier rentre.

**Exercice n°2****L'écart d'heure****5 points**

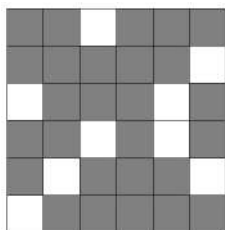
1. Écart de 3 s par heure donc pour avoir 7 minutes, il faut  $\frac{420}{3} = 140$  h soit 5 jours et 20 heures.
2. Au bout de 7 jours soit 168 h, il y aura 168 s de retard sur la première montre et 336 s d'avance sur la seconde.

La première marque ( 8 h - 2 min 48 s ) soit 7 h 57 min 12 s.

La seconde marque ( 8 h + 5 min 36 s ) soit 8 h 5 min 36 s.

**Exercice n°3****Le cache secret, le message se transforme****8 points**

1. Le message que Maxence va envoyer à Sarah est : OASEQ NRDNR OU ?ET RIEER NLECT .
2. Maxence va pouvoir lire : RDVP RESD UCHA TEAU soit rdv près du château.
3. Voici le cache reconstitué.

**Exercice n°4****Jules décode****8 points**

Le code comporte 5 chiffres suivis de la lettre B.

Sachant que le code n'a jamais été changé, que deux touches sont quasiment effacées, qu'une autre touche montre des traces d'usage mais moins que les deux autres et que les autres touches sont comme neuves, on peut en déduire que le code utilise uniquement trois chiffres différents : un chiffre est utilisé deux fois, un autre chiffre est aussi utilisé deux fois et un chiffre est utilisé une seule fois.

Les 4 premiers chiffres forment un carré parfait donc on cherche les nombres de 4 chiffres qui sont des carrés parfaits composés de 3 chiffres différents.

De plus comme le nombre de la combinaison à cinq chiffres est un palindrome, son chiffre des dizaines est le même que celui des unités de mille donc dans la liste des carrés il faut éliminer tous les nombres dont le chiffre des unités n'est pas égal au chiffre des centaines.

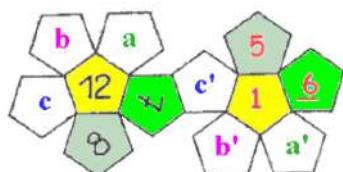
Finalement, il reste comme carrés possibles : 3969, 5929 et 8464.

La combinaison étant un palindrome, il reste comme possibilités : 39693B , 59295B et 84648B.

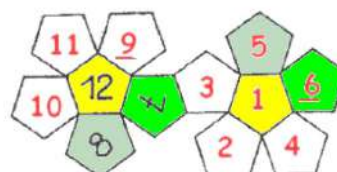
Il n'y a donc que 3 codes possibles donc il est certain de rentrer dans l'immeuble sans bloquer la porte.  
Il a donc raison.

**Exercice n°5****Le dé à Dédé****5 points**

Il y a plusieurs solutions,



En voici une :



avec  $a+a'=13$ ,  $b+b'=13$  et  $c+c'=13$

avec  $(a,a')=(9; 4)$  ;  $(b,b')=( 11; 2)$  et  $(c,c')=(10; 3)$

**Exercice n°6****Deux plis pour trois****8 points**

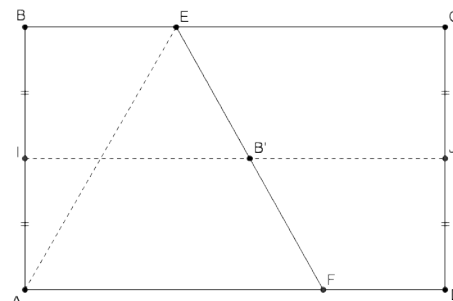
1.  $B'$  est symétrique de  $B$  par rapport à  $(AE)$  donc  $\widehat{BAE} = \widehat{EAB'}$
2. On note  $F$  le point d'intersection de  $(EB')$  et  $(AD)$ .
  - $B'$  est le milieu de  $[EF]$  grâce au théorème de Thalès ;
  - $\widehat{ABE} = \widehat{AB'E}$  par symétrie par rapport à  $(AE)$ .

Dans le triangle  $EAF$ , la droite  $(AB')$  est hauteur et médiane donc bissectrice. On a donc  $\widehat{EAB'} = \widehat{B'AD}$

Les angles  $\widehat{BAE}$ ,  $\widehat{EAB'}$  et  $\widehat{B'AD}$  sont égaux et leur somme vaut  $90^\circ$ .

Finalement  $\widehat{BAE} = \widehat{EAB'} = \widehat{B'AD} = 30^\circ$

3. On a partagé l'angle  $\widehat{BAF}$  en trois.  
L'opération associée s'appelle la trisection ; les droites  $(AE)$  et  $(AB')$  sont appelées trisectrices de l'angle  $\widehat{BAF}$ .



Autre solution plus élégante et concise :

Le triangle  $ABB'$  possède deux axes de symétrie (qui correspondent aux axes des deux pliages opérés : celui qui définit l'axe de la bande : à savoir  $(IJ)$  et celui d'axe  $(AE)$ . Il est donc équilatéral. (soit parce qu'on connaît ce théorème soit parce que la démonstration en est immédiate).

Finalement on réalise sans aucun instrument - mais grâce à la géométrie du pliage - un angle de  $60^\circ$ . Il est bien sûr plus "facile" (quoique...) par deux pliages de réaliser un angle droit.

**Exercice n°7****Des dés****5 points****Première manche**

L'attaquant a obtenu 5.

Le défenseur doit faire 5 ou 6. La probabilité est :  $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ .

**Deuxième manche**

L'attaquant a obtenu 3 et 5.

Le défenseur doit faire 4, 5 ou 6. La probabilité est :  $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ .

**Troisième manche**

L'attaquant a obtenu 3 et 4.

Le défenseur doit faire un des scores non rayés du tableau suivant :

|   | 1            | 2            | 3            | 4            | 5            | 6  |
|---|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|----|
| 1 | <del>2</del> | <del>3</del> | <del>4</del> | <del>5</del> | <del>6</del> | 7  |
| 2 | <del>3</del> | <del>4</del> | <del>5</del> | <del>6</del> | 7            | 8  |
| 3 | <del>4</del> | <del>5</del> | <del>6</del> | 7            | 8            | 9  |
| 4 | <del>5</del> | <del>6</del> | 7            | 8            | 9            | 10 |
| 5 | <del>6</del> | 7            | 8            | 9            | 10           | 11 |
| 6 | 7            | 8            | 9            | 10           | 11           | 12 |

Et on a :  $P = \frac{21}{36} (> \frac{1}{2})$

**Exercice n°8****Des pensées sans trop dépenser****8 points**

Soit  $x$  le petit coté du triangle de pensées de grand coté 60 m (qui est le même que celui de coté 80).

Calculons les surfaces de chaque morceaux.

Tulipes :  $st(x) = (80 - x)(60 - x) = 4800 - 140x + x^2$ .

Pensées :  $sp(x) = \frac{1}{2}(60x + 80x) = 70x$ .

Gazon :  $sg(x) = 60 \times 80 - (4800 - 140x + x^2 + 70x) = 70x - x^2$ .

Pour les prix, on multiplie  $st$  par 8,  $sp$  par 7 et  $sg$  par 4.

Le prix total est alors :  $Pt(x) = 38400 - 350x + 4x^2$ .

Il faut minimiser cette valeur. En utilisant un tableur on obtient le minimum du prix pour  $x$  compris entre 43,7 et 43,8 (en m). Le prix total est alors :  $Pt = 30\,743,76$  euros.

Par calcul, on obtient le minimum pour  $x = \frac{350}{8} = 43,75$ . Le prix est  $Pt = 30\,743,75$  euros.

# Rallye mathématique du Centre et du Congo

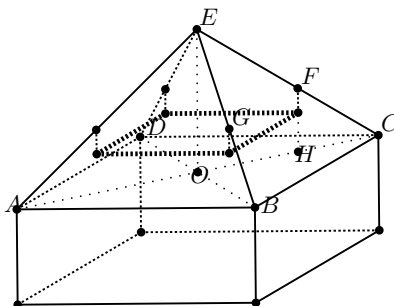
## Éléments de correction de l'épreuve préparatoire

Décembre 2014

Exercice n°1

« Et la lumière fut »

8 points



- En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle  $ABC$  rectangle en  $B$ , on obtient :  
 $AC = 10\sqrt{2}$  m donc  $OC = 5\sqrt{2}$  m.
  - En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle  $EOC$  rectangle en  $O$ , on obtient :  
 $EC = \sqrt{86}$  m.
  - $F$  appartient à  $(EC)$ ,  $G$  appartient à  $(EB)$  et  $(GF)$  est parallèle à  $(BC)$  donc d'après le théorème de Thalès :  
 $\frac{EF}{EC} = \frac{EG}{EB} = \frac{FG}{BC}$  donc  $\frac{EF}{\sqrt{86}} = \frac{7}{10}$  donc  $EF = \frac{7\sqrt{86}}{10}$  m  $\approx 6,5$  m.  
 (et donc  $FC = \sqrt{86} - \frac{7\sqrt{86}}{10} = \frac{3\sqrt{86}}{10}$  m)  
 Les filins sont accrochés à 6,5 m du sommet de la pyramide.
- Soit  $H$  le point de  $[OC]$  tel que  $(FH)$  et  $(OC)$  soient perpendiculaires.
  - $F$  appartient à  $(CE)$ ,  $H$  appartient à  $(CO)$  et  $(FH)$  et  $(EO)$  sont parallèles donc d'après le théorème de Thalès :  
 $\frac{CF}{CE} = \frac{CH}{CO} = \frac{FH}{EO}$  donc  $\frac{0,3 \times \sqrt{86}}{\sqrt{86}} = \frac{FH}{\sqrt{86}}$  donc  $FH = 1,8$  m.
  - $4$  m +  $1,8$  m =  $4,8$  m.  
 Les néons sont à une hauteur du sol de 4,8 m.

**Exercice n°2****Just an average box****5 points**

|   |   |   |    |   |    |
|---|---|---|----|---|----|
| a | b | c | 22 | d | 45 |
|---|---|---|----|---|----|

$$\frac{a+b}{2} = 2 \text{ donc } a+b = 2c$$

$$\text{soit } \frac{22+d}{2} = 45 \text{ donc } d = 68$$

$$\frac{c+22}{2} = 68 \text{ donc } c = 114$$

$$\frac{b+114}{2} = 22 \text{ donc } b = -70$$

$$\frac{a+(-70)}{2} = 114 \text{ donc } a = 298$$

finalement,

|     |     |     |    |    |    |
|-----|-----|-----|----|----|----|
| 298 | -70 | 114 | 22 | 68 | 45 |
|-----|-----|-----|----|----|----|

**Exercice n°3****A côté de la plaque****5 points**

- De CA001 à CA999, il y a 999 numéros d'immatriculation.  
De même, de CB 001 à CB 999, il y a 999 numéros d'immatriculation...  
De A à J, il y a 10 lettres différentes, donc de CA0001 à CJ999, il y a  $10 \times 999$  numéros d'immatriculation, c'est-à-dire 9990.  
De CK001 à CK854, il y a 854 numéros d'immatriculation.  
 $9990 + 854 = 10844$  Il y a 10844 numéros d'immatriculation commençant par C.

2.

| Numéros de plaque     | Nombre de plaque comportant le chiffre 7                                             |
|-----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| De CA001 à CA069      | 7 (une par dizaine)                                                                  |
| De CA070 à CA079      | 10                                                                                   |
| De CA080 à CA099      | 2                                                                                    |
| De CA001 à CA099      | 19 (en sommant ce qui précède)                                                       |
| De CA001 à CA699      | 133 (19 par centaine et 7 centaines)                                                 |
| De CA700 à CA799      | 100                                                                                  |
| De CA800 à CA999      | 38 (19 par centaine et 2 centaines)                                                  |
| Donc de CA001 à CA999 | $133 + 100 + 38 = 271$                                                               |
| De CA001 à CJ999      | 2710 (De A à J, il y a 10 lettres et pour chaque lettre 271 numéros comportant un 7) |
| De CK001 à CK854      | $7 \times 19 + 100 + 5 = 238$                                                        |

$$2710 + 238 = 2948$$

Il y a 2948 véhicules dont le numéro de plaque commence par C et comporte le chiffre 7.

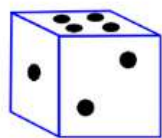
3. De 001 à 999, les palindromes comportant le chiffre 7 sont : 070 ; 171 ; 272 ; 373 ; 474 ; 575 ; 676 ; 707 ; 717 ; 727 ; 737 ; 747 ; 757 ; 767 ; 777 ; 787 ; 797 ; 878 ; 979. Ils sont au nombre de 19.  
De A à J, il y a 10 lettres donc de CA001 à CJ999, il y a 190 numéros de plaque vérifiant toutes conditions données.  
De CK001 à CK854, les palindromes comportant le chiffre 7 sont : 070 ; 171 ; 272 ; 373 ; 474 ; 575 ; 676 ; 707 ; 717 ; 727 ; 737 ; 747 ; 757 ; 767 ; 777 ; 787 ; 797. Ils sont au nombre de 17.  
 $190 + 17 = 207$ . Il y a 207 véhicules dont le numéro de plaque commence par C et dont la partie numérique est palindromique et comporte le chiffre 7.

### Exercice n°4

### La face cachée

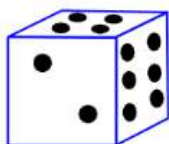
5 points

La somme de deux faces opposées d'un dé étant toujours égale à 7.  
On peut s'amuser à chercher les faces observées par nos quatre amis.



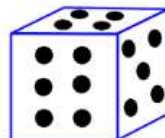
$$7 = 4 + 2 + 1$$

*Une seule solution*



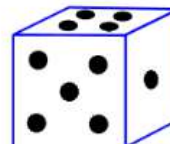
$$12 = 6 + 4 + 2$$

*5 + 4 + 3 et 6 + 5 + 1  
sont impossibles car  
4 + 3 et 6 + 1 font 7*



$$15 = 6 + 4 + 5$$

*La plus grande somme  
possible  
Une seule solution*



$$10 = 5 + 4 + 1$$

*6 + 3 + 1 et 5 + 3 + 2  
sont impossibles car  
6 + 1 et 5 + 2 font 7*

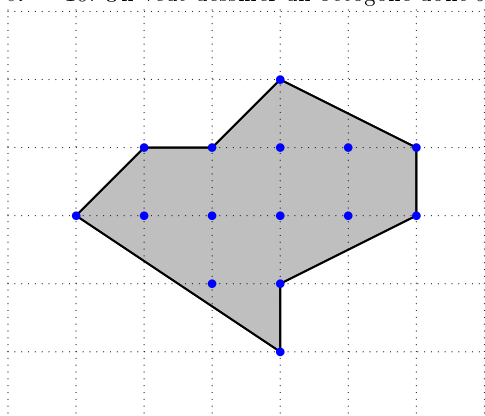
En observant seulement deux dés, ceux dont les sommes sont 7 et 15 ; on voit cinq faces sur les six.  
Sur la face cachée, il y a 3 points noirs

### Exercice n°5

### Pick, l'as des carreaux

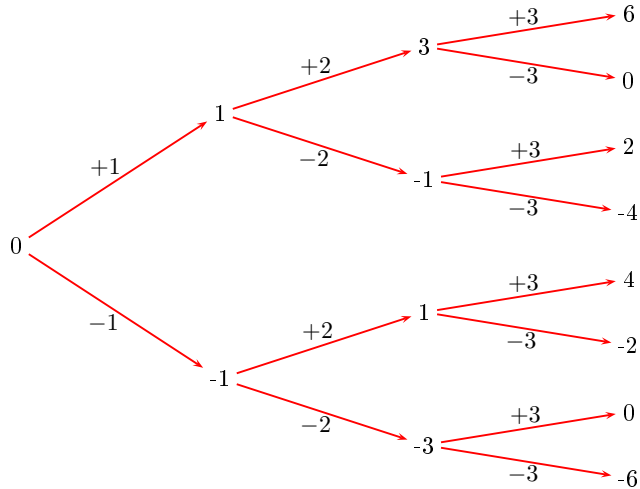
8 points

- (a) 15 unités d'aire  
(b)  $i = 9$ ,  $b = 14$  donc la formule donne le même résultat.
- L'aire du triangle vaut 7 unités d'aires (déterminée grâce à de bons découpages). On a  $i = 6$  et  $b = 4$ , donc la formule fonctionne ici.
- $\mathcal{A} = 10$ . On veut dessiner un octogone donc  $b \geq 8$ . Je prends par exemple  $b = 8$ . Il faut donc  $i = 10 - \frac{8}{2} + 1 = 7$



**Exercice n°6****Les "Cricket Numbers" de la sauterelle****8 points**

1. Pour répondre à ces questions, on peut par exemple dessiner un arbre qui représente tous les chemins possibles pour la sauterelle.



Donc on voit qu'il est impossible pour la sauterelle d'atterrir sur 3 au 3ème bond. 3 n'est pas un "Cricket Number".

On peut atterrir sur 8 au 8ème bond. 8 est un "Cricket Number".

Par exemple :

$$0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{-3} 0 \xrightarrow{+4} 4 \xrightarrow{-5} -1 \xrightarrow{-6} -7 \xrightarrow{+7} 0 \xrightarrow{+8} 8.$$

2. Il y a 3 chemins possibles pour atteindre 5 en 5 bonds.

1er chemin :  $0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{-2} -1 \xrightarrow{-3} -4 \xrightarrow{+4} 0 \xrightarrow{+5} 5;$

2ème chemin :  $0 \xrightarrow{-1} -1 \xrightarrow{+2} 1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{-4} 0 \xrightarrow{+5} 5;$

3ème chemin :  $0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{-4} 2 \xrightarrow{+3} 5;$

3. Pour atteindre 9 en 4 bonds supplémentaires, elle peut faire par exemple :  $0 \xrightarrow{\dots} \dots \xrightarrow{\dots} 5 \xrightarrow{-6} -1 \xrightarrow{-7} -8 \xrightarrow{+8} 0 \xrightarrow{+9} 9;$

4. Si la sauterelle se trouve en  $N$  au  $N$ -ième bond alors :

- En faisant un bond de longueur  $N + 1$  vers l'arrière, elle atterrit en  $-1$ .
- Puis en faisant un bond de longueur  $N + 2$  encore vers l'arrière, elle atterrit en  $-N - 3$ .
- En faisant ensuite un bond de longueur  $N + 3$  vers l'avant, elle atterrit en  $0$ .
- Enfin en faisant un bond de longueur  $N + 4$  vers l'avant, elle atterrit en  $N + 4$ .

$$0 \xrightarrow{\dots} \dots \xrightarrow{\dots} N \xrightarrow{-(N+1)} -1 \xrightarrow{-(N+2)} -N-3 \xrightarrow{+(N+3)} 0 \xrightarrow{+(N+4)} N+4;$$

Donc comme la sauterelle peut atteindre 1 en 1 bond elle peut atteindre 5 puis 9 puis 13 puis 17 ...

Comme la sauterelle peut atteindre 0 en 0 bond elle peut atteindre 4 puis 8 puis 12 puis 16 ...

Les sept premiers "Cricket Numbers" sont 1, 4, 5, 8, 9, 12 et 13.

**Exercice n°7****Un exercice qui ne manque pas de sel****8 points**

En notant par exemple  $x$  et  $y$  les dimensions du rectangle ( $y$  représentant la longueur du côté longé par la mer), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} xy &= 435\,600 \\ 2x + y &= 2\,420 \end{cases}$$

Par substitution,

$$\begin{cases} x(2420 - 2x) &= 435\,600 \\ y &= 2\,420 - 2x \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} 2x^2 - 2420x + 435\,600 &= 0 \\ y &= 2420 - 2x \end{cases}$$

c'est-à-dire, en simplifiant par deux la première ligne,

$$\begin{cases} x^2 - 1210x + 217\,800 &= 0 \\ y &= 2420 - 2x \end{cases}$$

Méthode experte (impossible pour un élève de seconde) :  $\Delta = 592900 = 770^2$  et on trouve deux solutions  $x_1 = 990$  et  $x_2 = 220$

Méthode à l'aide des Tice (au choix : tableur, calculatrice, géogébra ...)

Et enfin, à l'aide de la deuxième équation, on en déduit la valeur de  $y$  correspondante : Pour  $x = 990$  on trouve  $y = 440$  et pour  $x = 220$  on trouve  $y = 1980$

Conclusion : il est donc possible d'entourer 4 356 ares de marais salants avec 2 420 m de clôture et le saunier a deux façons de le faire : un terrain qui longe la mer sur 440 m ( 990 m pour le deuxième côté) ou un terrain qui longe la mer sur 1980 m ( 220 m pour le deuxième côté)

**Exercice n°8****Mais où est donc passée Argine ?****8 points**

Sur les 104 cartes du jeu, 39 ont été distribuées.  
Il y a donc 65 cartes dans la pioche.

1. Quelle est la probabilité que Judith tire une carte lui permettant de faire un carré ?

|                    |                                                                                     |                                                                                     |                                                                 |
|--------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| Cartes favorables  |  |  | 3 cartes sur 65 sont possibles donc :<br><br>$p = \frac{3}{65}$ |
| Cartes disponibles | 1                                                                                   | 2                                                                                   |                                                                 |

2. Quelle est la probabilité que Rachel tire une carte lui permettant de faire une tierce ?

|                    |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                      |                                                                 |
|--------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| Cartes favorables  |  |  |  |  |  |  | 7 cartes sur 65 sont possibles donc :<br><br>$p = \frac{7}{65}$ |
| Cartes disponibles | 1                                                                                   | 2                                                                                   | 1                                                                                   | 0                                                                                   | 1                                                                                   | 2                                                                                    |                                                                 |

3. Quelle est la probabilité que Pallas tire une carte lui permettant de faire une quinte ?

|                    |                                                                                   |                                                                                   |                                      |
|--------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|
| Cartes favorables  |  |  | 1 carte sur 65 sont possibles donc : |
| Cartes disponibles | 1                                                                                 | 0                                                                                 | $p = \frac{1}{65}$                   |

# Rallye mathématique du Centre

## Éléments de correction de l'épreuve officielle 2015

### Exercice n°0

### Questionnaire culturel

12 points

Voir la feuille annexe.

### Exercice n°1

### Le jardin de Jean

12 points

1. Pour répondre à cette question, il faut d'abord calculer : BE, EF, CA, DA,  $\widehat{BF}$  et  $\widehat{DB}$ .

\* BE = ED = EF = rayon du quart de disque = 75 m + 45 m = 120 m donc BE = 120 m et EF = 120 m.

\* En utilisant le théorème de Thalès dans la configuration en « papillon » définie par les droites parallèles (BE) et (DA) et les sécantes (BA) et (DE), on a :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CE} = \frac{DA}{BE} \text{ donc } \frac{CA}{96} = \frac{45}{75} \text{ donc } \underline{CA = 57,6 \text{ m.}}$$

\* Toujours en appliquant Thalès dans la même configuration que précédemment, on a :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CE} = \frac{DA}{BE} \text{ donc } \frac{DA}{120} = \frac{45}{75} \text{ donc } \underline{DA = 72 \text{ m.}}$$

$$* \widehat{BF} = \frac{2 \times \pi \times 120 \text{ m}}{4} \text{ donc } \widehat{BF} \approx 188 \text{ m}$$

\* En utilisant la relation de Pythagore dans DEA rectangle en A, on a EA = 96 m.

$$* \text{ Dans le triangle DEA rectangle en A, on a } \cos \widehat{DEA} = \frac{EA}{ED} \text{ donc } \cos \widehat{DEA} = \frac{96}{120}.$$

Donc  $\widehat{DEA} \approx 37^\circ$ , on en déduit que  $\widehat{BED} \approx 53^\circ$ .

La longueur d'un arc de cercle étant proportionnelle à la mesure de son angle au centre, le tableau ci-dessous est un tableau de proportionnalité.

|                              |                |                           |
|------------------------------|----------------|---------------------------|
| Angle au centre ( $^\circ$ ) | $53^\circ$     | $360^\circ$               |
| Longueur arc (cm)            | $\widehat{DB}$ | $2 \times \pi \times 120$ |

donc  $\widehat{DB} \approx 111 \text{ m}$ .

\* Longueur totale du trajet :

$$120 \text{ m} + 188 \text{ m} + 120 \text{ m} + 120 \text{ m} + 111 \text{ m} + 96 \text{ m} + 58 \text{ m} + 72 \text{ m} + 120 \text{ m} = 1005 \text{ m}$$

Il a parcouru environ 1005 m.

2. Pour répondre à cette question , il faut calculer toutes les longueurs manquantes c'est-à-dire AF et  $\widehat{DF}$ .

\* AF  $\approx$  120 m - 96 m donc AF  $\approx$  24 m .

\*  $\widehat{DF} \approx$  188 m - 111 m donc  $\widehat{DF} \approx 77 \text{ m}$ .

\* Voici un chemin plus court :

$$E \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow E$$

Longueur :

$$120 \text{ m} + 77 \text{ m} + 24 \text{ m} + 72 \text{ m} + 111 \text{ m} + 96 \text{ m} + 58 \text{ m} + 96 \text{ m} + 120 \text{ m} + 120 \text{ m} = 894 \text{ m.}$$

### Exercice n°2

### Boxed Products

5 points

Soit :

|       |       |   |       |       |   |       |       |     |          |          |   |          |          |
|-------|-------|---|-------|-------|---|-------|-------|-----|----------|----------|---|----------|----------|
| $a_1$ | $a_2$ | 2 | $a_4$ | $a_5$ | 4 | $a_7$ | $a_8$ | $x$ | $a_{10}$ | $a_{11}$ | 3 | $a_{13}$ | $a_{14}$ |
|-------|-------|---|-------|-------|---|-------|-------|-----|----------|----------|---|----------|----------|

Comme  $a_1 \times a_2 \times 2 \times a_4 = a_2 \times 2 \times a_4 \times a_5 = 120$  donc  $a_1 = a_5$

De même  $a_2 \times 2 \times a_4 \times a_5 = 2 \times a_4 \times a_5 \times a_6$  donc  $a_2 = a_6 = 4$

De façon générale :  $a_n \times a_{n+1} \times a_{n+2} \times a_{n+3} = a_{n+1} \times a_{n+2} \times a_{n+3} \times a_{n+4}$  donc  $a_n = a_{n+4}$

On peut utiliser cette information et le grille devient :

|     |   |   |   |     |   |   |   |     |   |   |   |     |   |
|-----|---|---|---|-----|---|---|---|-----|---|---|---|-----|---|
| $x$ | 4 | 2 | 3 | $x$ | 4 | 2 | 3 | $x$ | 4 | 2 | 3 | $x$ | 4 |
|-----|---|---|---|-----|---|---|---|-----|---|---|---|-----|---|

$$x \times 4 \times 2 \times 3 = 120 \Rightarrow x = 5$$

Soit finalement :

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 2 | 3 | 5 | 4 | 2 | 3 | 5 | 4 | 2 | 3 | 5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

### Exercice n°3

### Le cryptex

8 points

A chaque fois qu'il tourne le second rouleau, John a tourné 26 fois le premier .

A chaque fois qu'il tourne le troisième rouleau, John a tourné le second 26 fois. C'est-à-dire  $26^2$  essais.

A chaque fois qu'il tourne le quatrième rouleau, John a tourné le troisième 26 fois. C'est-à-dire  $26^3$  essais.

A chaque fois qu'il tourne le cinquième rouleau, John a tourné le quatrième 26 fois. C'est-à-dire  $26^4$  essais.

Pour obtenir EULER :

$$E (4 \times 26^4) + U (20 \times 26^3) + L(11 \times 26^2) + E (4 \times 26) + R (18).$$

$$\text{donc : } 4 \times 26^4 + 20 \times 26^3 + 11 \times 26^2 + 4 \times 26 + 17 + 1 = 2\,186\,982 \text{ essais.}$$

Chaque essai prend 2 secondes. Le temps nécessaire est donc de 4 373 964 secondes.

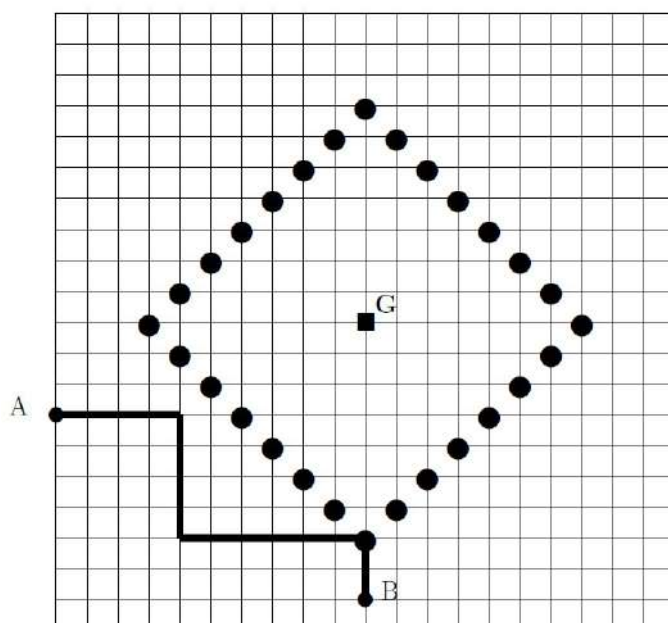
Il faudra à John : 50 jours 14 heures 59 min 24 s sans s'arrêter ni dormir ni ...

### Exercice n°4

### La distance du taxi

5 points

Voici le résultat :



Remarque :

les points marqués sont en fait sur un cercle de centre G et de rayon 7, mais un cercle lié à cette distance du taxi ! Qui s'appelle aussi (en statistique) la distance de Manhattan.

## Exercice n°5

## Solidarité avec le Congo

5 points

•Solution à l'aide du tableur

|    | C2    |   | f_x        |
|----|-------|---|------------|
|    | A     | B | C          |
| 1  | pneus |   | chambres   |
| 2  | 1     |   | 142,555556 |
| 3  | 2     |   | 140,111111 |
| 4  | 3     |   | 137,666667 |
| 5  | 4     |   | 135,222222 |
| 6  | 5     |   | 132,777778 |
| 7  | 6     |   | 130,333333 |
| 8  | 7     |   | 127,888889 |
| 9  | 8     |   | 125,444444 |
| 10 | 9     |   | 123        |
| 11 | 10    |   | 120,555556 |
| 12 | 11    |   | 118,111111 |
| 18 | 17    |   | 103,444444 |
| 19 | 18    |   | 101        |
| 20 | 19    |   | 98,555556  |
| 27 | 26    |   | 81,444444  |
| 28 | 27    |   | 79         |
| 29 | 28    |   | 76,555556  |
| 36 | 35    |   | 59,444444  |
| 37 | 36    |   | 57         |
| 38 | 37    |   | 54,555556  |
| 39 | 38    |   | 52,111111  |
| 40 | 39    |   | 49,666667  |
| 41 | 40    |   | 47,222222  |
| 42 | 41    |   | 44,777778  |
| 43 | 42    |   | 42,333333  |
| 44 | 43    |   | 39,888889  |
| 45 | 44    |   | 37,444444  |
| 46 | 45    |   | 35         |
| 47 | 46    |   | 32,555556  |
| 48 | 47    |   | 30,111111  |

Soit  $x$  le prix d'un pneu et  $y$  le prix d'une chambre à air, on a :

$$22x + 9y = 1305$$

1305 n'est pas divisible par  $(22 + 9) = 31$ .  $31 \times 42 + 3 = 1305$  ;

On voit que :

9 pneus et 123 chambres font 1305 € ( 9 roues complètes)

18 pneus et 101 chambres font 1305 € ( 18 roues complètes)

36 pneus et 57 chambres font 1305 € ( 36 roues complètes)

45 pneus et 35 chambres font 1305 € ( 35 roues complètes)

La bonne solution est :

36 pneus et 57 chambres font 1305 €

Soit 36 roues complètes et 21 chambres à air supplémentaires.

•Solution à l'aide d'un raisonnement arithmétique

$22 + 9 = 31$  , une roue complète vaut 31 €.

$1305 = 42 \times 31 + 3$  , le nombre maximum de roues complètes est de 42 mais il reste alors 3 €.

Diminuons progressivement le nombre de roues complètes afin de pouvoir dépenser toute la somme.

On s'arrête dès lors que le reste est un multiple de 9 ou 22.

$$1305 = 41 \times 31 + 34$$

$$1305 = 40 \times 31 + 65$$

$$1305 = 39 \times 31 + 96$$

$$1305 = 38 \times 31 + 127$$

$$1305 = 37 \times 31 + 158$$

$$1305 = 36 \times 31 + 189 \text{ or } 189 = 21 \times 9.$$

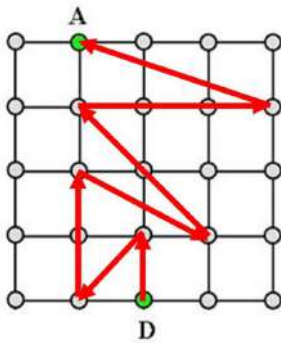
Soit 36 roues complètes et 21 chambres à air supplémentaires.

### Exercice n°6

Le trajet s'enracine

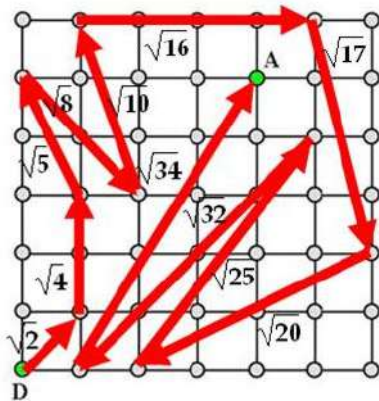
8 points

1. La longueur du trajet représenté sur la *fig b* est :  $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{8} + \sqrt{9}$ .
2. Le trajet représenté sur la *fig c* ci-dessous a pour longueur :  $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{8} + \sqrt{9} + \sqrt{10}$ .



3. La longueur du trajet représenté sur la *fig d* ci-dessous est :

$$\sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{8} + \sqrt{10} + \sqrt{16} + \sqrt{17} + \sqrt{20} + \sqrt{25} + \sqrt{32} + \sqrt{34} \approx 40,724.$$



### Exercice n°7

**A voir la dalle**

8 points

1. Les dimensions de la dalle rectangulaire du nouveau téléviseur sont 100 cm sur 61 cm.  
Soit  $d$  la diagonale de la dalle de l'écran du nouveau téléviseur.  
En utilisant le théorème de Pythagore il vient :  
$$d^2 = 100^2 + 61^2$$
$$d^2 = 10000 + 3721$$
$$d^2 = 13721 \text{ soit } d = \sqrt{13721}$$
d' où  $d = 117$  cm arrondi à 1 cm près
2. Soit  $x$  la largeur du bord du cadre qui entourait l'ancien téléviseur de Jean-Pierre.  
On obtient de la même façon :  $(102 - 2x)^2 + (60 - 2x)^2 = 104^2$ 
$$10404 - 408x + 4x^2 + 3969 - 252x + 4x^2 = 10816$$
d' où  $8x^2 - 660x + 3557 = 0$   
Par essais successifs, par étude de la fonction à l'aide de la calculatrice (graphique ou tableau de valeur), on trouve :  $x \approx 5,8$  ou  $x \approx 76,7$   
Seule la première solution convient.

**Exercice n°8****Ne jetons pas les pions !****8 points**

- Il y a 32 cases libres et sur ces 32 cases, 8 cases le font perdre.  
La probabilité de perdre est donc de  $\frac{8}{32}$  soit  $\frac{1}{4}$ .
- Le joueur perd s'il tire un pion jaune. Il reste 7 pions jaunes sur les 31 pions restants dans le 2<sup>e</sup> sac.  
La probabilité de perdre est donc de  $\frac{7}{31}$ .
- Si le joueur choisit l'option 1 :  
**Avec la couleur bleue** : quelque soit le numéro de case tirée, il perd.  
**Avec la couleur rouge** : il y a 4 cases (E3, D4, E4, F5) sur les 12 restantes pour lesquelles il ne perd pas.  
La probabilité de ne pas perdre est de  $\frac{4}{12}$  soit  $\frac{1}{3}$ .  
**Avec la couleur verte** : il ne peut pas choisir de pion vert car ils sont tous posés.  
**Avec la couleur jaune** : il y a 3 cases (A3, A6, C6) sur les 12 restantes pour lesquelles il ne perd pas.  
La probabilité de ne pas perdre est de  $\frac{3}{12}$  soit  $\frac{1}{4}$ .

Si le joueur choisit l'option 2 :

**Avec la case A3** : il doit tirer un pion jaune. Il en reste 4 sur les 12 pions restants.La probabilité de ne pas perdre est de  $\frac{4}{12}$  soit  $\frac{1}{3}$ .**Avec la case A6** : il doit tirer un pion jaune. Il en reste 4 sur les 12 pions restants.La probabilité de ne pas perdre est de  $\frac{4}{12}$  soit  $\frac{1}{3}$ .**Avec la case B3** : il perd quelque soit la couleur du pion tiré.**Avec la case B4** : il perd quelque soit la couleur du pion tiré.**Avec la case C3** : il perd quelque soit la couleur du pion tiré.**Avec la case C5** : il perd quelque soit la couleur du pion tiré.**Avec la case C6** : il doit tirer un pion jaune. Il en reste 4 sur les 12 pions restants.La probabilité de ne pas perdre est de  $\frac{4}{12}$  soit  $\frac{1}{3}$ .**Avec la case D4** : il doit tirer un pion rouge. Il en reste 2 sur les 12 pions restants. La probabilité de ne pas perdre est de  $\frac{2}{12}$  soit  $\frac{1}{6}$ .**Avec la case E1** : il perd quelque soit la couleur du pion tiré.**Avec la case E3** : il doit tirer un pion rouge. Il en reste 2 sur les 12 pions restants.La probabilité de ne pas perdre est de  $\frac{2}{12}$  soit  $\frac{1}{6}$ .**Avec la case E4** : il doit tirer un pion rouge. Il en reste 2 sur les 12 pions restants.La probabilité de ne pas perdre est de  $\frac{2}{12}$  soit  $\frac{1}{6}$ .**Avec la case F5** : il doit tirer un pion rouge. Il en reste 2 sur les 12 pions restants.La probabilité de ne pas perdre est de  $\frac{2}{12}$  soit  $\frac{1}{6}$ .

Donc soit il choisit l'option 1 avec la couleur rouge, soit il choisit l'option 2 avec les cases A3 ou A6 ou C6.

Dans chaque cas la probabilité de ne pas perdre est de  $\frac{1}{3}$ .

# Rallye mathématique du Centre

## Correction de l'épreuve préparatoire décembre 2015

### Exercice n°1

**Ça ne tourne pas rond !**

**5 points**

- Quand on écrit la spirale jusqu'au nombre  $3^2$  :

Ce nombre est dans la case située 1 case à droite de 1 et 1 case plus haut que 1.  $\left(\frac{3-1}{2} = 1\right)$

Il y a les 2 entiers qui le précèdent écrits dessous.  $(3-1=2)$

- Quand on écrit la spirale jusqu'au nombre  $5^2$  :

Ce nombre est dans la case située 2 cases à droite de 1 et 2 cases plus haut que 1.  $\left(\frac{5-1}{2} = 2\right)$

Il y a les 4 entiers qui le précèdent écrits dessous.  $(5-1=4)$

- Quand on écrit la spirale jusqu'au nombre  $7^2$  :

Ce nombre est dans la case située 3 cases à droite de 1 et 3 cases plus haut que 1.  $\left(\frac{7-1}{2} = 3\right)$

Il y a les 6 entiers qui le précèdent écrits dessous.  $(7-1=6)$

Or  $44^2 < 2015 < 45^2$

- Quand on écrit la spirale jusqu'au nombre  $45^2$  :

Ce nombre est dans la case située 22 cases à droite de 1 et 22 cases plus haut que 1.  $\left(\frac{45-1}{2} = 22\right)$

Il y a les 44 entiers qui le précèdent écrits dessous.  $(45-1=44)$

$45^2 = 2025$  donc 2015 est situé 10 cases sous  $45^2$ .

Donc 2015 est dans la case située 22 cases à droite de 1 et 12 cases plus haut que 1.

### Exercice n°2

**Le Carré de POLYBE**

**5 points**

Le mot important du texte est SESAME On utilise donc les lettres : SEAM en premier puis l'alphabet dans l'ordre alphabétique.

|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | S | E | A | M | B |
| 2 | C | D | F | G | H |
| 3 | I | J | K | L | N |
| 4 | O | P | Q | R | T |
| 5 | U | V | X | Y | Z |

$45 \Rightarrow O$

$15 \Rightarrow B$

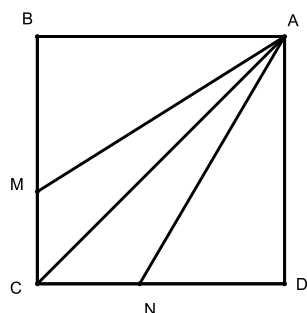
$32 \Rightarrow J$

$12 \Rightarrow E$

$21 \Rightarrow C$

$45 \Rightarrow T \dots$

**Réponse : OBJECTIF PREMIER DE LA CLASSE**

**Exercice n°3****Un puits pour trois****8 points**

(AC) est un axe de symétrie ; donc il faut que BM soit égal à DN pour que les aires des triangles ABM et ADN soient égales.

L'aire de la parcelle AMCN est le double de celle du triangle AMC.

On doit donc avoir  $\frac{AB \times BM}{2} = MC \times AB$  d'où  $MC = \frac{BM}{2}$

- M est sur [BC] tel que  $BM = \frac{2}{3} BC$
- N est sur [DC] tel que  $DN = \frac{2}{3} DC$

En utilisant le théorème de Pythagore on obtient :

- Périmètre(ABM) = Périmètre (ADN) =  $40(5 + \sqrt{13})$  m
- Périmètre(AMCN) =  $80(1 + \sqrt{13}) = 40(2 + 2\sqrt{13})$  m

D'où Périmètre(AMCN) > Périmètre(ABM)

**Exercice n°4****Quitte ou double****8 points**

19 → 38 → 76 → 152 → 15 → 30 → 3 → 6 → 12 → 1 → 2 → Fin

29 → 58 → 116 → 232 → 23 → 46 → 92 → 9 → 18 → 36 → 72 → 7 → 14 → 28 → 56 → 112 → 11 → 22 → 2 → Fin

43 → 86 → 172 → 17 → 34 → 68 → 136 → 272 → 27 → 54 → 108 → 216 → 432 → **43** (on retrouve le nombre de départ)

Tous les nombres inférieurs à 100 sont « attirés » par 2 sauf 17, 27, 34, 43, 54, 67, 68, 84, 85 et 86.

**Exercice n°5****Un exercice bien ciblé****5 points**

- (a) On ne peut pas obtenir 21, par contre on peut obtenir 44 :  $44 = 5 \times 7 + 9$

- (b) La réponse est 31.

Justification : Commençons par écrire les nombres possibles :

5, 9, 10, 14, 15, 18, 19, 20, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, ...

À partir du moment où on a obtenu 5 scores qui se suivent (de 32 à 36), on peut ajouter 5 et on aura tous les suivants.

- Non. Si on avait 6 et 8, tous les nombres impairs seraient impossibles à atteindre.
- Si au lieu de 5 et 9, on avait 2 et 3, le plus grand nombre impossible à atteindre serait 1.

**Exercice n°6****De quoi prendre de la hauteur****12 points**

Soit  $O$  le centre de la base. On peut schématiser la situation par les deux figures ci-dessous.



1. • On calcule d'abord  $IE$  :

Comme les 4 triangles sont superposables et reforment la base, ce sont tous des triangles rectangles isocèles en  $E, F, G$  et  $H$ . Donc  $E$  et  $S$  sont sur la médiatrice de  $[AB]$  et donc  $(ES)$  est la médiatrice de  $[AB]$ . Donc comme  $I$  est le milieu de l'hypoténuse du triangle rectangle  $ABE$ ,  $I$  est équidistant des 3 sommets et donc  $IE = 2$  cm.

Autre possibilité pour calculer  $IE$  :

Comme les 4 triangles reforment la base, ce sont tous des triangles rectangles isocèles en  $E, F, G$  et  $H$ .

Donc  $AB^2 = AE^2 + BE^2$  donc  $4^2 = 2 \times AE^2$  donc  $AE = 2\sqrt{2}$  cm.

En appliquant la propriété de Pythagore dans le triangle rectangle  $IEA$ , on a :

$$(2\sqrt{2})^2 = 2^2 + IE^2 \quad \text{donc} \quad IE = 2 \text{ cm.}$$

- On applique la propriété de Thalès dans le plan  $(SMI)$  :

$$\frac{SK}{SO} = \frac{SE}{SI} = \frac{KE}{OI} \quad \text{donc} \quad \frac{SK}{SO} = \frac{SE}{SI} = \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad \frac{SK}{SO} = \frac{SE}{SE+2} = \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad SE = 2 \text{ cm.}$$

- Donc  $SI = SE + EI = 2 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$ .

La hauteur du triangle  $SAB$  est de 4 cm.

2. La construction du patron ne présente pas de difficulté particulière.

$$SA = SB = SC = SD = \sqrt{2^2 + 4^2} \text{ cm soit environ } 4,5 \text{ cm.}$$

3. Il faut appliquer la propriété de Pythagore dans le triangle rectangle  $SOI$ .

$$4^2 = 2^2 + SO^2 \quad \text{donc} \quad SO^2 = 12 \quad \text{donc} \quad SO = 2\sqrt{3} \text{ cm.}$$

La hauteur de la pyramide est  $2\sqrt{3}$  cm.

**Exercice n°7****Can you light my lantern ?****5 points**

La position dans laquelle les trois bougies blanches sont adjacentes correspond à celle où les deux bougies bleues le sont aussi. Ainsi, si une bougie bleue est placée alors 2 positions sur les 4 restantes conviennent pour la seconde bougie bleue.

La probabilité que deux bougies bleues soient adjacentes est donc de  $\frac{1}{2}$ .

**Exercice n°8****A la recherche du blé pas cher !****8 points**

Soit  $x$  la "largeur" du terrain et  $y$  sa "longueur".

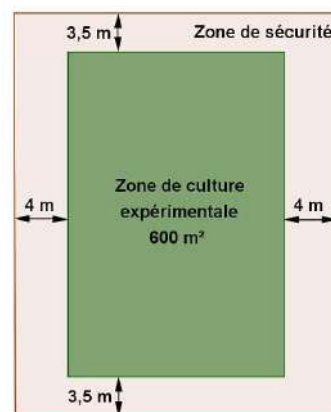
L'aire de la zone de culture étant de  $600 \text{ m}^2$ , on obtient :

$$(x-8)(y-7) = 600 \text{ avec } x > 8 \text{ et } y > 7$$

$$\text{d'où } y = 7 + \frac{600}{x-8}$$

$$\text{Soit } A \text{ l'aire du terrain acheté : } A(x) = xy = x\left(7 + \frac{600}{x-8}\right) = \frac{7x^2 + 544x}{x-8}$$

A l'aide d'un tableur, d'une calculatrice, d'un logiciel traceur-grapheur ... on détermine que l'aire  $A$  est minimale lorsque  $x \approx 34,2 \text{ m}$  d'où  $y \approx 29,9 \text{ m}$ .



# Rallye mathématique du Centre

## Éléments de correction de l'épreuve officielle 2016

### Exercice n°0

### Questionnaire culturel

10 points

Compléter la feuille annexe à rendre avec les feuilles réponses.

### Exercice n°1

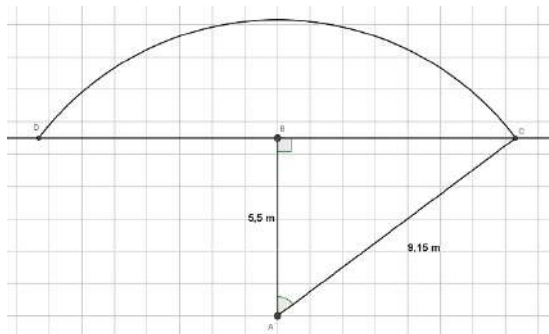
### Les lignes du terrain

12 points

1.

2.

- Longueur du rond central :  $2 \times \pi \times 9,15 \text{ m} = 18,3 \pi \text{ m}$
- Longueur du petit arc de cercle devant la surface de réparation :



Dans le triangle ABC rectangle en B :

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{5,5}{9,15} \text{ donc } \widehat{BAC} \approx 53^\circ$$

Donc  $\widehat{DAC} \approx 106^\circ$

Donc longueur arc de cercle :

$$\frac{106^\circ \times 2 \times \pi \times 9,15 \text{ m}}{360^\circ} \approx \frac{3233}{600} \pi \text{ m}$$

- Longueur des 4 arcs de cercle au niveau des poteaux de corner :  $4 \times \frac{2 \times \pi \times 1}{4} = 2\pi \text{ m}$

Donc longueur totale des lignes :

$$3 \times 90 + 2 \times 120 + (5,5 + 5,5 + 7,32 + 5,5 + 5,5) \times 2 + (16,5 + 16,5 + 7,32 + 16,5 + 16,5) \times 2 + 18,3 \pi + 2\pi + 2 \times \frac{3233}{600} \pi \approx 812,9$$

La longueur totale des lignes est d'environ 812,9 m.

3.

En 3ème : Grâce à GéoGébra, on peut conjecturer que la distance minimale parcourue par le ballon est d'environ 115,9 m. Le joueur B est alors à environ 70,5 m du poteau de corner adverse.

En 2nde : On appelle  $x$  la distance entre le joueur B et le poteau de corner qui se trouve dans le camp du joueur C et sur la même ligne que B.

La distance  $d$  parcourue par le ballon en fonction de  $x$  est égale à :

$$d(x) = \sqrt{(45 - 16,5 - 7,32 : 2)^2 + (120 - 16,5 - x)^2} + \sqrt{45^2 + (x - 11)^2}$$

$$d(x) = \sqrt{24,84^2 + (103,5 - x)^2} + \sqrt{45^2 + (x - 11)^2}$$

En étudiant cette fonction avec la calculatrice ou un tableur, on trouve que la distance minimale parcourue par le ballon est atteinte pour  $x$  compris entre 70 m et 71 m.

Dans ce cas, la distance parcourue par le ballon est d'environ 115,9 m.

Le joueur B doit donc se trouver à environ 70,5 m du poteau de corner adverse.

N.B : Une solution plus élégante est l'introduction du symétrique  $C'$  de C par rapport à la ligne de touche qui amène, grâce au théorème de Thalès, à un même résultat de 70,5 m environ.

**Exercice n°2****C'est une grille en somme****6 points**

1. Réponse :

|    |    |    |
|----|----|----|
| 7  | 5  | 3  |
| 12 | 10 | 8  |
| 17 | 15 | 13 |

2. Mettons des lettres dans le tableau :

|   |    |   |
|---|----|---|
| a | 9  | b |
| c | 17 | d |
| e | 25 | f |

On sait que :  $a + b = 18$ ;  $c + d = 34$ ;  $e + f = 50$ . Donc :somme des 9 nombres =  $18 + 34 + 50 + 9 + 17 + 25 = 153$ .

3.

On a le tableau :

|   |   |    |
|---|---|----|
| x | 7 | y  |
| 9 | t | v  |
| z | u | 20 |

On peut former un système de 6 équations à 6 inconnues!!

Mais, en remarquant que :

 $x + 20 = 2t$ ,  $x = 2t - 20$  : **x est pair**.De même pour **y** et pour **z**, qui sont pairs aussi. On va donc envisager tous les cas, un par un (il n'y en a pas beaucoup).**Avec x = 2**, on obtient :  $y = 12$  et  $z = 16$ . Soit le tableau :

|    |    |    |
|----|----|----|
| 2  | 7  | 12 |
| 9  | ?? | 16 |
| 16 | 18 | 20 |

Ne convient pas!

**Avec x = 4**, on obtient  $y = 10$  et  $z = 14$ . Soit :

|    |    |    |
|----|----|----|
| 4  | 7  | 10 |
| 9  | 12 | 15 |
| 14 | 17 | 20 |

**Convient !****Avec x = 6**, on a  $y = 8$  et  $z = 12$ ; soit :

|    |    |    |
|----|----|----|
| 6  | 7  | 8  |
| 9  | ?? | 14 |
| 12 | 16 | 20 |

Ne convient pas!

Et de même pour **x = 8**, **x = 10** et **x = 12** (ainsi que  $x = 0$  et  $x = 14$ ). Les tableaux obtenus ne conviennent pas.**Une seule solution !****Exercice n°3****Les aventuriers de  $\rho\lambda$** **5 points**Soit  $x$  la quantité de riz quotidienne que pourra manger un candidat.

Il vient :

$$16 \times 3 \times x + 15 \times 3 \times x + 14 \times 3 \times x + 13 \times 3 \times x + \dots + 2 \times 3 \times x = 12000 \text{ g}$$

Remarque : La durée du jeu est de  $15 \times 3 = 45$  joursOn obtient :  $3x[16 + 15 + 14 + \dots + 2] = 12000 \text{ g}$ soit  $3x \times 135 = 12000 \text{ g}$  d'où  $x = \frac{4000}{135} \text{ g}$ 

La quantité de riz quotidienne que pourra manger un candidat est d'environ 29,6 g de riz par jour.

**Exercice n°4****Qui a raison ?****12 points**

Il faut d'abord calculer le volume de la grande pyramide formée par le flacon donc il faut commencer par calculer la hauteur OH de cette pyramide.

Ensuite, il faut calculer le volume de la pyramide vide sans le parfum donc il faut calculer la hauteur OM de cette pyramide.

- D'après le théorème de Thalès dans OBF :  
 $\frac{OA}{OB} = \frac{AG}{BF}$  donc  $\frac{OA}{OA+3} = \frac{5}{7}$  donc  $OA = 7,5$  cm

Donc  $OB = 7,5$  cm +  $3$  cm =  $10,5$  cm

- D'après la relation de Pythagore dans le triangle BEF rectangle en F :

$$BE^2 = BF^2 + FE^2$$

donc  $BE = \sqrt{7^2 + 7^2}$  cm =  $\sqrt{98}$  cm =  $7\sqrt{2}$  cm

donc  $BH = \frac{7\sqrt{2}}{2}$  cm

- D'après la relation de Pythagore dans le triangle BHO rectangle en H :

$$OH^2 = BO^2 - BH^2$$

donc  $OH = \sqrt{10,5^2 - (3,5\sqrt{2})^2}$  cm =  $\sqrt{87,5}$  cm =  $\frac{7\sqrt{7}}{2}$  cm

Donc  $OH = \frac{7\sqrt{7}}{2}$  cm

- D'après le théorème de Thalès dans OBH :

$$\frac{OM}{OH} = \frac{OA}{OB} \text{ donc } \frac{OM}{\frac{7\sqrt{7}}{2}} = \frac{7,5}{10,5} \text{ donc } OM = \frac{5}{2}\sqrt{7} \text{ cm}$$

- Volume grande pyramide OBFEG =  $(7 \text{ cm} \times 7 \text{ cm} \times \frac{7\sqrt{7}}{2} \text{ cm}) : 3 = \frac{343\sqrt{7}}{6} \text{ cm}^3$

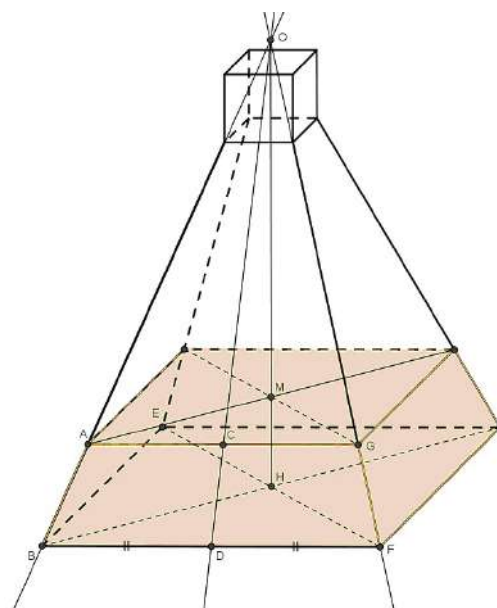
- Volume pyramide vide OAHIJ =  $(5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} \times \frac{5\sqrt{7}}{2} \text{ cm}) : 3 = \frac{125\sqrt{7}}{6} \text{ cm}^3$

- Volume parfum =  $\frac{343}{6}\sqrt{7} \text{ cm}^3 - \frac{125\sqrt{7}}{6} \text{ cm}^3 = \frac{109\sqrt{7}}{3} \text{ cm}^3 \approx 96,129 \text{ cm}^3$

- Volume de parfum en mL :  $96,129 \text{ cm}^3 = 0,096 129 \text{ dm}^3 = 0,096 129 \text{ L} = 96,129 \text{ mL}$

$$\frac{96,129 \text{ mL}}{0,07 \text{ mL}} \approx 1373 \quad \text{Il y a encore de quoi faire 1373 pulvérisations de parfum. } \frac{1373}{4} = 343,25$$

Donc il n'y a pas assez de parfum pour se parfumer pendant un an à raison de quatre pulvérisations par jour.  
Donc Laetitia a raison.

**Exercice n°5****Le codage Fairplay de Playfair****9 points**

1. Maëlle code le message en : PC XT PK SC PV IF IT RO MH XN OM

2. Mathilde a envoyé en réponse : JE DOIS FAIRE MES DEVOIRS

3. La grille de codage utilisée par Mathilde est :

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| R | F | Z | U | S |
| X | T | Q | D | E |
| L | N | B | I | A |
| O | C | M | Y | K |
| H | P | G | V | J |

**Exercice n°6****Du rouge au vert****5 points**

Stratégie : on cherche pour avant-dernier coup à obtenir 3 rouges en équerre, le reste étant vert.

1. Le niveau 1 se joue sur un rectangle composé de 4 cases. Par raison de symétrie on peut commencer en a.  
Solutions en 4 coups :  $[a \rightarrow d \rightarrow b \rightarrow c]$   
et aussi  $[a \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow b]$   
Les solutions en 3 coups partant de a échouent toutes. Le minimum de coups est 4.
2. Le niveau 2 se joue sur un rectangle composé de 9 cases.  
Avec la stratégie décrite, on trouve des solutions en 5 coups :  
\* En partant d'un coin :  $[a \rightarrow c \rightarrow e \rightarrow g \rightarrow i]$   
\* En partant du centre :  $[e \rightarrow a \rightarrow c \rightarrow i \rightarrow g]$

**Exercice n°7****Le jeu des cavaliers****6 points**

1. Les 6 nombres solutions avec une grille de 8 colonnes et 4 rangées sont :  
42 324 311, 41 134 232, 34 232 411, 11 423 243, 23 243 114, 11 342 324.
2. Les 10 nombres solutions avec une grille de 10 colonnes et 5 rangées sont :  
5 242 354 311, 5 113 453 242, 4 511 435 232, 3 523 245 114, 3 453 242 511, 1 152 423 543, 4 115 423 253,  
2 325 341 154, 2 423 543 115, 1 134 532 425.

**Exercice n°8****De dé en dé****9 points**

1. Une façon simple est de lister tous les cas possibles, comme dans le tableau ci-dessous (les sommes sont à l'intersection des lignes et des colonnes) :

| les dés | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  |
|---------|---|---|---|----|----|----|
| 1       | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  |
| 2       | 3 | 4 | 5 | 6  | 7  | 8  |
| 3       | 4 | 5 | 6 | 7  | 8  | 9  |
| 4       | 5 | 6 | 7 | 8  | 9  | 10 |
| 5       | 6 | 7 | 8 | 9  | 10 | 11 |
| 6       | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Il suffit alors de faire les décomptes. Les probabilités sont :

| somme | proba (sur 36) |
|-------|----------------|
| 2     | 1              |
| 3     | 2              |
| 4     | 3              |
| 5     | 4              |
| 6     | 5              |
| 7     | 6              |
| 8     | 5              |
| 9     | 4              |
| 10    | 3              |
| 11    | 2              |
| 12    | 1              |

2. On reprend le tableau précédent, en modifiant les nombres affichés par le premier dé; puis, ligne par ligne, on indique les nombres de l'autre dé de façon à obtenir les sommes voulues. Cela donne :

| autre dé \ premier dé | 1 | 2  | 2  | 3  | 3  | 4  |
|-----------------------|---|----|----|----|----|----|
| 1                     | 2 | 3  | 3  | 4  | 4  | 5  |
| 3                     | 4 | 5  | 5  | 6  | 6  | 7  |
| 4                     | 5 | 6  | 6  | 7  | 7  | 8  |
| 5                     | 6 | 7  | 7  | 8  | 8  | 9  |
| 6                     | 7 | 8  | 8  | 9  | 9  | 10 |
| 8                     | 9 | 10 | 10 | 11 | 11 | 12 |

L'autre dé portait donc les nombres **1, 3, 4, 5, 6 et 8**.

# Rallye mathématique du Centre

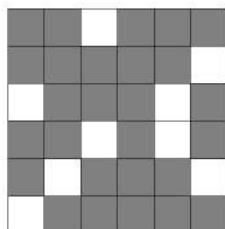
## Correction de l'épreuve préparatoire décembre 2016

### Exercice n°1

### Le cache secret, le message se transforme

8 points

1. Le message que Maxence va envoyer à Sarah est : OASEQ NRDNR OU ?ET RIEER NLECT .
2. Maxence va pouvoir lire : RDVP RESD UCHA TEAU soit rdv près du château.
3. Voici le cache reconstitué.



### Exercice n°2

### Les âges

5 points

$31^2 = 961$  et  $32^2 = 1024$  donc 32 est le premier entier dont le carré est à 4 chiffres

$99^2 = 9801$  et  $100^2 = 10000$  donc 99 est le dernier nombre entier dont le carré est à 4 chiffres.

On utilise le tableur pour trouver rapidement la réponse :

- A1 => 32
  - A2 => =A1 + 1 puis on « copie-colle » cette formule sur 68 lignes (c-à-d de 32 à 99)
  - B1 => =A1<sup>2</sup> puis on « copie-colle » cette formule jusque B68 pour avoir le carré des nb entiers entre 32 et 99
  - C1 => =B1 + 3131 puis on « copie-colle » cette formule jusque C51 (inutile d'aller plus loin car après on obtient un nombre à 5 chiffres) pour respecter la contrainte du texte sur les 31 ans
- Enfin, il reste à comparer les colles B et C : le seul nombre à 4 chiffres qui apparaît dans ces 2 colonnes est 4356.

Conclusion :

Marie et Bruno ont 12 et 25 ans car :

- $1225 = 35^2$
- $12 + 31 = 43$ ;  $25 + 31 = 56$  et  $4356 = 66^2$

En comparant tous les résultats, on voit qu'il n'y a qu'une possibilité à ce problème.

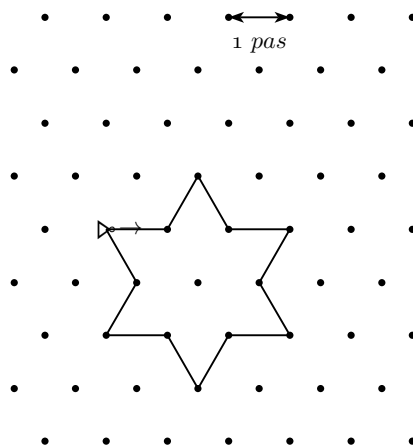
| C1 |    | fx   |      | =B1+3131 |   |
|----|----|------|------|----------|---|
|    | A  | B    | C    | D        | E |
| 1  | 32 | 1024 | 4155 |          |   |
| 2  | 33 | 1089 | 4220 |          |   |
| 3  | 34 | 1156 | 4287 |          |   |
| 4  | 35 | 1225 | 4356 |          |   |
| 5  | 36 | 1296 | 4427 |          |   |
| 6  | 37 | 1369 | 4500 |          |   |
| 7  | 38 | 1444 | 4575 |          |   |
| 8  | 39 | 1521 | 4652 |          |   |
| 9  | 40 | 1600 | 4731 |          |   |
| 10 | 41 | 1681 | 4812 |          |   |
| 11 | 42 | 1764 | 4895 |          |   |
| 12 | 43 | 1849 | 4980 |          |   |
| 13 | 44 | 1936 | 5067 |          |   |
| 14 | 45 | 2025 | 5156 |          |   |
| 15 | 46 | 2116 | 5247 |          |   |
| 16 | 47 | 2209 | 5340 |          |   |
| 17 | 48 | 2304 | 5435 |          |   |
| 18 | 49 | 2401 | 5532 |          |   |
| 19 | 50 | 2500 | 5631 |          |   |
| 20 | 51 | 2601 | 5732 |          |   |
| 21 | 52 | 2704 | 5835 |          |   |
| 22 | 53 | 2809 | 5940 |          |   |
| 23 | 54 | 2916 | 6047 |          |   |
| 24 | 55 | 3025 | 6156 |          |   |
| 25 | 56 | 3136 | 6267 |          |   |
| 26 | 57 | 3249 | 6380 |          |   |
| 27 | 58 | 3364 | 6495 |          |   |
| 28 | 59 | 3481 | 6612 |          |   |
| 29 | 60 | 3600 | 6731 |          |   |
| 30 | 61 | 3721 | 6852 |          |   |
| 31 | 62 | 3844 | 6975 |          |   |
| 32 | 63 | 3969 | 7100 |          |   |
| 33 | 64 | 4096 | 7227 |          |   |
| 34 | 65 | 4225 | 7356 |          |   |
| 35 | 66 | 4356 | 7487 |          |   |
| 36 | 67 | 4489 | 7620 |          |   |
| 37 | 68 | 4624 | 7755 |          |   |

### Exercice n°3

### Nono le robot

5 points

1. C'est le programme n°2 qui permet à nono de rejoindre l'étoile.
- 2.



### Exercice n°4

### In the pocket

5 points

La largeur de l'enveloppe doit être supérieure à la somme de la largeur du livre et de son épaisseur.  
 La hauteur de l'enveloppe doit être supérieure à la somme de la longueur du livre et de la moitié de son épaisseur.  
 Les dimensions minimales de l'enveloppe sont donc :  
 $l = 125 + 30 = 155 \text{ mm}$   
 $h = 200 + 15 = 215 \text{ mm}$

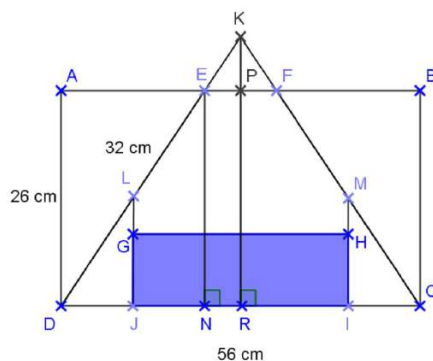
Ainsi, seule l'enveloppe B convient.

### Exercice n°5

### Casier judiciaire

8 points

Il suffit de regarder si le casier rentre par le côté qui mesure 30 cm car s'il ne rentre pas par ce côté, il ne rentrera pas par le côté qui mesure 45 cm.



• 1<sup>e</sup> méthode

On calcule JL et on regarde si c'est plus grand ou plus petit que 17 cm ce qui correspond à la hauteur du casier.

On applique le théorème de Thalès dans le triangle DEN avec (LJ) // (EN) et on a  $\frac{LJ}{EN} = \frac{DJ}{DN}$ .

On sait que EN = 26 cm.

On calcule DN en utilisant la relation de Pythagore dans le triangle ADN rectangle en N.

On trouve DN =  $2\sqrt{87}$  cm  $\approx 18,7$  cm.

IJ = 30 cm donc DJ =  $\frac{56\text{cm}}{2} - \frac{30\text{cm}}{2} = 13$  cm

Donc  $\frac{LJ}{26} = \frac{13}{18,7}$  donc LJ  $\approx 18,1$  cm .

Donc le casier rentre.

• 2<sup>de</sup> méthode

On suppose que LJ mesure 17 cm, on calcule DJ puis on en déduit IJ. Si le segment [IJ] mesure plus de 30cm, le casier rentre.

Dans le triangle DEN rectangle en N :  $\sin \widehat{EDN} = \frac{EN}{DE} = \frac{26}{32}$  donc  $\widehat{EDN} \approx 54^\circ$ .

Dans le triangle rectangle DLJ rectangle en J :  $\tan \widehat{LDJ} = \frac{LJ}{DJ}$  donc DJ =  $\frac{17\text{cm}}{\tan 54^\circ} \approx 12,4$  cm

Donc IJ  $\approx 56$  cm -  $2 \times 12,4$  cm = 31,3 cm

Donc le casier rentre.

**Exercice n°6**

**Jours fériés bien placés !**

5 points

1. 2002 est une année ordinaire

|                 | 1er janvier | 1er mai  | 8 mai    | 15 août | 1er novembre | 11 novembre | 25 décembre |
|-----------------|-------------|----------|----------|---------|--------------|-------------|-------------|
| Année ordinaire | mardi       | mercredi | mercredi | jeudi   | vendredi     | lundi       | mercredi    |

2. 2024 est une année bissextile. On examine le cas où le premier janvier est un lundi :

|                  | 1er janvier | 1er mai  | 8 mai    | 15 août | 1er novembre | 11 novembre | 25 décembre |
|------------------|-------------|----------|----------|---------|--------------|-------------|-------------|
| Année bissextile | lundi       | mercredi | mercredi | jeudi   | vendredi     | lundi       | mercredi    |

On décale ensuite les jours : il y a des années au cours desquelles aucun des jours fériés précédemment mentionnés ne tombe un samedi ou un dimanche. C'est n'est le cas que si le 1er janvier d'une année ordinaire tombe un mardi, le 1er mai, le 8 mai et le 25 décembre tombent un mercredi, le 15 août un jeudi, le 1er novembre un vendredi et le 11 novembre un lundi. S'agissant des années bissextiles, il faut que le 1er jour de l'année soit un lundi.

**Exercice n°7****Bûche, ô ma bûche !****8 points**

$$\text{volume} = 0,5 \times x \times y = 1$$

Soit  $l$  la longueur de tubes métalliques nécessaires.

1. • Si  $x = 1$  alors  $l = 16 + 2\sqrt{5} \approx 20,47\text{m}$

• Si  $x = 2$  alors  $l = 15 + 2\sqrt{5} \approx 19,47\text{m}$

2.  $l(x, y) = 10 \times 0,5 + 3x + 4y + 2\sqrt{x^2 + y^2}$

$$l(x, y) = 5 + 3x + 4y + 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

or  $0,5xy = 1$  d'où  $y = \frac{2}{x}$

$$\text{Ainsi } l(x) = 5 + 3x + \frac{8}{x} + 2\sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}}$$

En utilisant la calculatrice, le tableur ou par lecture graphique on obtient une valeur minimale de longueur de tubes de 18,84 m (valeur arrondie au cm près) pour  $x = 1,53$  m (valeur arrondie au cm près).

**Exercice n°8****Le cube lâche le bouillon****8 points**

1. La hauteur de l'eau dans le cube posé à l'horizontal est 30,5 cm. Le bord de l'ouverture est, une fois le cube basculé, situé à 30 cm ( 50 cm - 20 cm) du sol. **Le liquide va donc déborder.**

2. Calculons le volume maximal contenu dans le cube en position inclinée. Cette situation correspond à évaluer le volume d'un prisme droit de hauteur 1 m et de surface de base le triangle  $AIJ$  rectangle en  $A$  et tel que

$AI = 0,3$  m,  $\widehat{IJA} = 60$  degrés. La longueur  $AJ$  vaut :  $\frac{\sqrt{3}}{3} \times AI = \frac{\sqrt{3}}{10}$  m, d'où l'aire du triangle est égale à

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{10} \times \frac{\sqrt{3}}{10} = \frac{3\sqrt{3}}{200} \text{ m}^2, \text{ et le volume correspondant est environ } 29,98 \text{ L.}$$

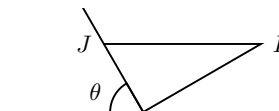


La hauteur de l'eau une fois le cube revenu dans sa position initiale  $\frac{3\sqrt{3}}{200} \text{ m} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm} \approx 2,60 \text{ cm}$ .

3. Soit  $\theta$  l'angle d'inclinaison. Le triangle  $AIJ$  est rectangle en  $A$ ,  $AI = 0,3$  m et  $\widehat{AJI} = \theta$ .

On a alors :  $AJ = \frac{1}{\tan(\theta)} \times AI = \frac{0,3}{\tan(\theta)}$ . Puisqu'il reste 100 L, l'aire du triangle  $AIJ$  est  $0,1 \text{ m}^2$ .

$$\text{De là, } \frac{1}{2} \times AI \times AJ = 0,1 \text{ donc } \tan(\theta) = \frac{0,3^2}{0,2} = 0,45, \text{ et } \theta \approx 24 \text{ degrés.}$$



# Rallye mathématique du Centre

## Éléments de correction de l'épreuve officielle 2017

### Exercice n°0

### Questionnaire culturel

12 points

- Pierre de Fermat et son grand théorème arithmétique : Voir la feuille réponse annexe.
- Théorème de Fermat et triplets Pythagoriciens
  1. On peut faire fonctionner l'algorithme « à la main », à l'aide d'un logiciel (Scratch, Algobox,..) ou encore avec un tableur en mettant des formules différentes suivant la parité de A.

|    | A  | B   | C   | D | E       | F          | G |
|----|----|-----|-----|---|---------|------------|---|
| 1  | A  | B   | C   |   | A < B ? | C²-A²-B² = |   |
| 2  | 1  | 0   | 1   |   |         | 0          |   |
| 3  | 2  | 0   | 2   |   |         | 0          |   |
| 4  | 3  | 4   | 5   |   | OUI     | 0          |   |
| 5  | 4  | 3   | 5   |   |         | 0          |   |
| 6  | 5  | 12  | 13  |   | OUI     | 0          |   |
| 7  | 6  | 8   | 10  |   | OUI     | 0          |   |
| 8  | 7  | 24  | 25  |   | OUI     | 0          |   |
| 9  | 8  | 15  | 17  |   | OUI     | 0          |   |
| 10 | 9  | 40  | 41  |   | OUI     | 0          |   |
| 11 | 10 | 24  | 26  |   | OUI     | 0          |   |
| 12 | 11 | 60  | 61  |   | OUI     | 0          |   |
| 13 | 12 | 35  | 37  |   | OUI     | 0          |   |
| 14 | 13 | 84  | 85  |   | OUI     | 0          |   |
| 15 | 14 | 48  | 50  |   | OUI     | 0          |   |
| 16 | 15 | 112 | 113 |   | OUI     | 0          |   |
| 17 | 16 | 63  | 65  |   | OUI     | 0          |   |
| 18 | 17 | 144 | 145 |   | OUI     | 0          |   |
| 19 | 18 | 80  | 82  |   | OUI     | 0          |   |
| 20 | 19 | 180 | 181 |   | OUI     | 0          |   |
| 21 | 20 | 99  | 101 |   | OUI     | 0          |   |
| 22 |    |     |     |   |         |            |   |

On trouve alors 17 triplets.

2. Un exemple de solution « oubliée » par cet algorithme est : ( 9 ; 12 ; 15 ).

### Exercice n°1

### Gare à la « Catcher car »

6 points

1. A 15 h 30 soit 2 h 30 après le départ des coureurs la voiture a roulé pendant 2h.  
La première heure elle a parcouru 15 km et la deuxième heure elle a parcouru 16 km.  
Donc à 15 h 30 , la voiture a parcouru 31 km.

|                                              | A 14h30                   | A 15h00              | A 15h30                   |
|----------------------------------------------|---------------------------|----------------------|---------------------------|
| 2. distance parcourue par le coureur (en km) | $12,5 \times 1,5 = 18,75$ | $12,5 \times 2 = 25$ | $12,5 \times 2,5 = 31,25$ |
| distance parcourue par la voiture (en km)    | 15                        | $15 + 16/2 = 23$     | $15 + 16 = 31$            |

A 15 h 30 le coureur a encore 250 m d'avance. Donc il a été rattrapé après 15 h 30.  
On appelle t la durée écoulée entre 15 h 30 et le moment où le coureur est rattrapé.

$$17 \times t = 12,5 \times t + 0,25 \text{ d'où } 4,5 \times t = 0,25$$

$$\text{Ainsi } t = \frac{0,25}{4,5} = \frac{1}{18} h \text{ soit } 200 \text{ secondes.}$$

Le coureur a été rattrapé à 15 h 33 min 20 s.

|    |                                           |           |              |              |
|----|-------------------------------------------|-----------|--------------|--------------|
| 3. |                                           | A 16 h 30 | A 17 h 30    | A 18 h 30    |
|    | distance parcourue par la voiture (en km) | 31+17=48  | 48 + 20 = 68 | 68 + 20 = 88 |

Il reste à trouver la durée mise par la voiture pour parcourir 0,44 km en roulant à 35 km/h.

$$t = \frac{d}{v} = \frac{0,44}{35} = \frac{11}{875}h \text{ soit environ } 45 \text{ s.}$$

La voiture a rattrapé le coureur à 18 h 30 min 45 s.

Exercice n°2

Argh ! Tu parles...

6 points

1. Phrase d'un cri : « argh », « irgh » et « orgh »

Phrases de deux cris :

« argh argh », « argh irgh », « argh orgh »  
 « irgh argh », « irgh irgh », « irgh orgh »  
 « orgh argh », « orgh orgh », « orgh orgh »

$$3 + 3^2 + 3^3 = 39$$

2.  $4 + 4^2 + 4^3 = 84$

3. Des phrases d'au plus 15 cris suffisent :

|    | A             | B                 |
|----|---------------|-------------------|
| 1  | Taille phrase | Nombre de phrases |
| 2  | 3             | 84                |
| 3  | 4             | 340               |
| 4  | 5             | 1364              |
| 5  | 6             | 5460              |
| 6  | 7             | 21844             |
| 7  | 8             | 87380             |
| 8  | 9             | 349524            |
| 9  | 10            | 1398100           |
| 10 | 11            | 5592404           |
| 11 | 12            | 22369620          |
| 12 | 13            | 89478484          |
| 13 | 14            | 357913940         |
| 14 | 15            | 1431655764        |

Exercice n°3

Vaillant Michel !

5 points

1. Par 4 sauts, Michel a grimpé de  $1 + 2 + 3 + 4 = 10$  marches

$$73 = 4 \times 18 + 1, 18 \times 10 + 1 = 181$$

Il arrive à la 181<sup>e</sup> marche.

2.  $2017 = 10 \times 201 + 7$

201  $\times 4 = 804$  sauts : 2010<sup>e</sup> marche

805 sauts : 2011<sup>e</sup> marche

806 sauts : 2013<sup>e</sup> marche

807 sauts : 2016<sup>e</sup> marche

808 sauts : 2020<sup>e</sup> marche

Il ne posera pas le pied sur la 2017<sup>e</sup> marche.

**Exercice n°4****MATHKRYPT for ever**

12 points

- 1.(a) Le message : QZP /-12 0-2 33 02 1-2 3-2 20 2-2 -12 32 est décodé en : 14 MARS 2017.  
(b) La phrase : A NOUS LA VICTOIRE est codée en :  
02 12 21 0-1 3-2 23 02 40 22 -10 3-1 21 22 1-2 11.
2. Attention : Nous sommes désolés mais une erreur s'est glissée dans l'énoncé concernant la 2ème réponse départementale.

Le message :

GZA/ -24 11 -10 14 -21 13 -20 -33 01 -43 -23 13 14 10 11 0-1 -21 13 -31 -2-1 01 14 -3-1  
est traduit en : POUR LE 18 A VIERZON LE 4 MARS

Le message :

1UL/ 04 31 10 34 01 33 12 -13 21 13 14 21 22 33 21 10 -22 10 2-1 01 33 00 -10 0-1 21 34 -1-1  
est en fait :

1UL/ 04 31 10 34 01 33 12 -13 21 13 14 21 22 33 21 10 -22 10 2-1 01 33 00 02 0-1 21 34 -1-1  
est traduit en : POUR LE 28 A CHATEAUDUN LE 13 MARS

Le message :

5S7/ 25 52 31 55 22 54 23 05 42 24 10 10 52 31 03 31 40 22 54 12 20 42 55 10  
est traduit en : POUR LE 36 A ISSOUDUN LE 4 MARS

Le message :

UGF/ -14 21 00 24 -11 23 -21 -10 11 -20 -11 21 -13 -2-1 -11 23 -10 -10 -1-1 11 24 -2-1  
est traduit en : POUR LE 41 A BLOIS LE 11 MARS

Le message :

9EW/ -21 1-2 -1-3 11 -2-2 10 -2-1 -4-3 0-2 0-1 1-2 -1-3 11 -3-4 -2-2 10 -1-1 -2-4 0-2 11 -3-4  
est traduit en : POUR LE 37 A TOURS LE 2 MARS

Le message :

2TC/ -12 2-1 0-2 22 -1-1 21 -2-1 -3-3 1-1 -12 -11 10 02 -11 -31 -11 21 22 -2-3 -1-1 21 -3-2 -1-3 1-1  
22 -2-3  
est traduit en : POUR LE 45 A PITHIVIERS LE 7 MARS

Le message :

XNU/ -10 12 13 05 -32 25 23 -15 13 12 -21 -12 22 -14 -20 -12 24 -13 -25 -10 12 25 -20  
est traduit en : MATHKRYPT A BLOIS LE 30 MARS

Il y a donc deux possibilités pour la grille de décodage :

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 0 | P | H | W | R |
| V | 8 | I | C | 9 | E |
| D | J | 3 | 2 | T | Y |
| K | 4 | L | F | A | O |
| 7 | B | 1 | U | G | Z |
| 5 | S | M | X | N | Q |

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 0 | P | H | W | R |
| V | 8 | I | C | 9 | E |
| D | Q | 3 | 2 | T | Y |
| K | 4 | L | F | A | O |
| 7 | B | 1 | U | G | Z |
| 5 | S | M | X | N | J |

Exercice n°5

Ça passe ou pas ?

8 points

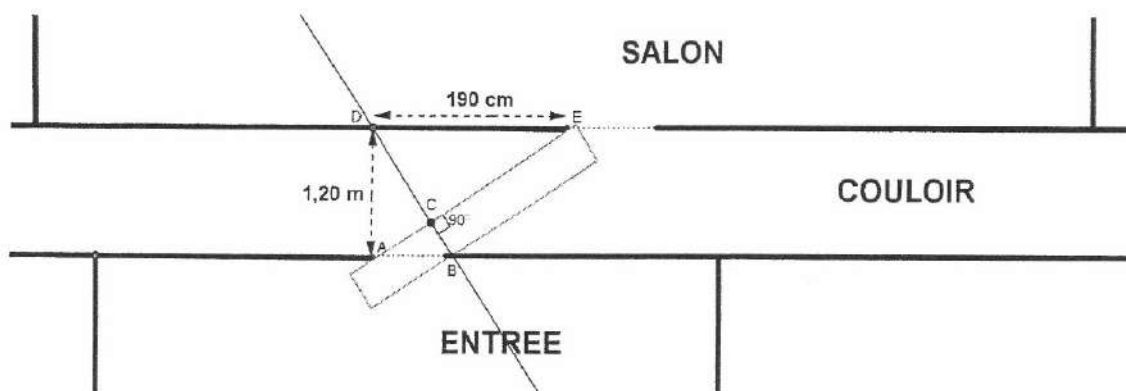
Pour espérer faire passer le meuble par les deux portes il faut le coller le long de (AE).

Dans le triangle DAE rectangle en D :  $\tan(\widehat{DAE}) = \frac{190}{120}$  donc  $\widehat{DAE} \approx 58^\circ$

Donc  $\widehat{CAB} \approx 32^\circ$

Dans le triangle ACB rectangle en C :  $\sin(\widehat{CAB}) = \frac{CB}{AB}$  donc  $\sin 32^\circ = \frac{40}{AB}$  donc  $AB = \frac{40}{\sin 32^\circ}$   
Donc  $AB \approx 75$  cm

Donc le meuble ne passe pas car c'est plus large que la porte.



Exercice n°6

La chasse d'Olaf le pirate

9 points

1. Voir feuille annexe

2. On note R1, R2, R3 les trois positions prises par la goélette au bout des 3 premières demi-heures et de même G1, G2, G3 les positions correspondantes du galion.

En utilisant le théorème de Pythagore puis celui de Thalès on calcule les coordonnées de R1 et R2 :

R1 ( 6,078 ; 0,784 ) et R2 ( 2,189 ; 2,842 ).

On en déduit que  $R2G3 = 3,837 < 4,84 = R2R3$  (en milles)

Olaf navigue à 9,68 nœuds donc il parcourt les 3,837 milles en 0,3964 heures soit 23,78 minutes. La galion navigue à 4 nœuds soit 2 milles en 30 minutes, donc en 23,78 minutes il parcourt 1,586 milles. Cette position est notée G2'.

Olaf arrive donc en G3 avant le galion en le précédant en ce point de 23,78 minutes ce qui a permis au galion de parcourir 1,586 milles depuis G2.

Quand Olaf est en G3 où il coupe la route du galion, il a parcouru 3,837 milles et se trouve à 0,414 mille de celui-ci.

12 points

1. Stratégie : On considère que le vase est vide. On pose un cube sur le fond. On calcule le volume d'eau qu'il faudrait ajouter dans le vase pour que l'eau arrive juste à la hauteur du cube. Si le volume d'eau à ajouter est inférieur à  $500 \text{ cm}^3$  alors le cube est sous l'eau sinon il dépasse du niveau de l'eau.

$$1\text{cm} \times 11\text{cm} \times 11\text{cm} - (1\text{cm})^3 = 120\text{cm}^3$$

$$2\text{cm} \times 11\text{cm} \times 11\text{cm} - (2\text{cm})^3 = 234\text{cm}^3$$

$$3\text{cm} \times 11\text{cm} \times 11\text{cm} - (3\text{cm})^3 = 336\text{cm}^3$$

$$4\text{cm} \times 11\text{cm} \times 11\text{cm} - (4\text{cm})^3 = 420\text{cm}^3$$

$$5\text{cm} \times 11\text{cm} \times 11\text{cm} - (5\text{cm})^3 = 480\text{cm}^3$$

$$6\text{cm} \times 11\text{cm} \times 11\text{cm} - (6\text{cm})^3 = 510\text{cm}^3$$

$$7\text{cm} \times 11\text{cm} \times 11\text{cm} - (7\text{cm})^3 = 504\text{cm}^3$$

$$8\text{cm} \times 11\text{cm} \times 11\text{cm} - (8\text{cm})^3 = 456\text{cm}^3$$

$$9\text{cm} \times 11\text{cm} \times 11\text{cm} - (9\text{cm})^3 = 360\text{cm}^3$$

$$10\text{cm} \times 11\text{cm} \times 11\text{cm} - (10\text{cm})^3 = 210\text{cm}^3$$

Donc le cube d'arête 6 cm et le cube d'arête 7 cm dépasse du niveau de l'eau.

2. D'abord on regarde quelles sont les combinaisons de cubes qui peuvent tenir dans le vase en regardant les dimensions des cubes commençant par le plus gros cube sans s'occuper de savoir s'ils vont être sous l'eau.

n°10 et n°1

n°9, n°2 et n°1

n°8, n°3, n°2, n°1

n°7, n°4, n°3, n°2, n°1

n°6, n°5, n°4, n°3, n°2, n°1

n°5, n°4, n°3, n°2, n°1

et ainsi de suite.

La plus grande combinaison est donc la suivante : n°6, n°5, n°4, n°3, n°2, n°1

On regarde s'ils sont sous le niveau de l'eau.

Le cube le plus grand mesure 6 cm d'arête on va donc calculer la quantité d'eau à ajouter dans le vase pour que l'eau ait une hauteur de 6 cm.

$$6\text{cm} \times 11\text{cm} \times 11\text{cm} - [(6\text{cm})^3 + (5\text{cm})^3 + (4\text{cm})^3 + (3\text{cm})^3 + (2\text{cm})^3 + (1\text{cm})^3] = 285\text{cm}^3$$

Donc les cubes sont bien sous l'eau.

3. Pour faire mieux il faut ajouter au moins un cube par rapport aux 6 de la question d'avant. Donc il faut au moins 7 cubes. D'abord on regarde quelles sont les combinaisons de 7 cubes ou plus qui peuvent tenir dans le vase sachant que le vase a des dimensions de  $11 \text{ cm} \times 11 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$ , un volume disponibles de  $2420 \text{ cm}^3 - 500 \text{ cm}^3$ .

On sait déjà que les cubes n°1 à n°6 tiennent tous sur le fond. On peut ajouter au-dessus le cube n°7 ou n°8 ou n°9 ou n°10.

n°10, n°6, n°5, n°4, n°3, n°2, n°1

n°9, n°6, n°5, n°4, n°3, n°2, n°1

n°8, n°6, n°5, n°4, n°3, n°2, n°1

n°7, n°6, n°5, n°4, n°3, n°2, n°1

Il n'y a pas de combinaisons de 8 cubes qui tiennent dans le vase.

Dans chaque cas, on calcule la quantité d'eau à ajouter pour que le niveau de l'eau au niveau du cube le plus haut.

$$16\text{cm} \times 11\text{cm} \times 11\text{cm} - [(10\text{cm})^3 + (6\text{cm})^3 + (5\text{cm})^3 + (4\text{cm})^3 + (3\text{cm})^3 + (2\text{cm})^3 + (1\text{cm})^3] = 495\text{cm}^3$$

$$15\text{cm} \times 11\text{cm} \times 11\text{cm} - [(9\text{cm})^3 + (6\text{cm})^3 + (5\text{cm})^3 + (4\text{cm})^3 + (3\text{cm})^3 + (2\text{cm})^3 + (1\text{cm})^3] = 645\text{cm}^3$$

$$14\text{cm} \times 11\text{cm} \times 11\text{cm} - [(8\text{cm})^3 + (6\text{cm})^3 + (5\text{cm})^3 + (4\text{cm})^3 + (3\text{cm})^3 + (2\text{cm})^3 + (1\text{cm})^3] = 741\text{cm}^3$$

$$13\text{cm} \times 11\text{cm} \times 11\text{cm} - [(7\text{cm})^3 + (6\text{cm})^3 + (5\text{cm})^3 + (4\text{cm})^3 + (3\text{cm})^3 + (2\text{cm})^3 + (1\text{cm})^3] = 789\text{cm}^3$$

Donc les cubes n°10, n°6, n°5, n°4, n°3, n°2, n°1 sont bien sous l'eau.

**Exercice n°8****A l'eau la bouée****6 points****Soient :** $r$  le rayon du cercle de base de la bouée $2h$  la hauteur de la bouée $V$  le volume de la bouée

$$\text{On a } V = \frac{2\pi r^2 h}{3} = \frac{2\pi}{3}(80^2 - h^2)h = \frac{2\pi}{3}(6400h - h^3)$$

|        |                  |        |
|--------|------------------|--------|
| Volume | 1 m <sup>3</sup> | V      |
| Masse  | 110 kg           | 1716 g |

**On en déduit :**  $V = 15,6 \text{ dm}^3 = 15600 \text{ cm}^3$ .**Le problème se traduit par l'équation :**

$$\frac{2\pi}{3}(6400h - h^3) = 15600 \text{ soit } \pi h^3 - 6400\pi h + 23400 = 0$$

**On peut alors utiliser la calculatrice, Géogébra ou le tableur pour obtenir une valeur approchée de  $h$ .****On obtient  $h \approx -80,57$  ou  $h \approx 79,41$  ou  $h \approx 1,16$ .****On retiendra raisonnablement  $h \approx 79,41 \text{ cm}$ .**

# Rallye mathématique du Centre

## Correction de l'épreuve préparatoire décembre 2017

### Exercice n°1

### Les nombres de Friedman

8 points

Il n'y a pas toujours unicité.

|                                  |                             |
|----------------------------------|-----------------------------|
| $25 = 5^2$                       | $121 = 11^2$                |
| $125 = 5^{1+2}$                  | $126 = 6 \times 21$         |
| $127 = -1 + 2^7$                 | $128 = 2^{8-1}$             |
| $153 = 3 \times 51$              | $216 = 6^{2+1}$             |
| $289 = (8+9)^2$                  | $343 = (3+4)^3$             |
| $347 = 7^3 + 4$                  | $625 = 5^{6-2}$             |
| $688 = 8 \times 86$              | $736 = 7 + 3^6$             |
| $1022 = 2^{10} - 2$              | $1024 = (4-2)^{10}$         |
| $1206 = 6 \times 201$            | $1255 = 5 \times 251$       |
| $1260 = 6 \times 210$            | $1285 = (1+2^8) \times 5$   |
| $1296 = 6^{(9-1)/2}$             | $1395 = 15 \times 93$       |
| $1435 = 35 \times 41$            | $1503 = 3 \times 501$       |
| $1530 = 3 \times 510$            | $1792 = 7 \times 2^{9-1}$   |
| $1827 = 21 \times 87$            | $2048 = 8^4/2 + 0$          |
| $2187 = (2+1^8)^7$               | $2349 = 29 \times 3^4$      |
| $2500 = 50^2 + 0$                | $2501 = 50^2 + 1$           |
| $2502 = 2 + 50^2$                | $2503 = 50^2 + 3$           |
| $2504 = 50^2 + 4$                | $2505 = 50^2 + 5$           |
| $2506 = 50^2 + 6$                | $2507 = 50^2 + 7$           |
| $2508 = 50^2 + 8$                | $2509 = 50^2 + 9$           |
| $2592 = 2^5 \times 9^2$          | $2737 = (2 \times 7)^3 - 7$ |
| $2916 = (1 \times 6 \times 9)^2$ | $3125 = (3 + 1 \times 2)^5$ |
| $3159 = 9 \times 351$            | $3281 = (3^8 + 1)/2$        |
| $3375 = (3 + 5 + 7)^3$           | $3378 = (7 + 8)^3 + 3$      |
| $3685 = (3^6 + 8) \times 5$      | $3784 = 8 \times 473$       |
| $3864 = 3 \times (-8 + 6^4)$     | $3972 = 3 + (9 \times 7)^2$ |
| $4088 = 8^4 - 8 - 0$             | $4096 = (4 + 0 \times 9)^6$ |
| $4106 = 4^6 + 10$                | $4167 = 4^6 + 71$           |
| $4536 = 56 \times 3^4$           | $4624 = (64 + 4)^2$         |
| $4628 = 68^2 + 4$                | $5120 = 5 \times 2^{10}$    |
| $5776 = 76^{7-5}$                | $5832 = (2 \times 5 + 8)^3$ |
| $6144 = 6 \times 4^{4+1}$        | $6145 = 6 \times 4^5 + 1$   |
| $6455 = (6^4 - 5) \times 5$      | $6880 = 8 \times 860$       |
| $7928 = 89^2 - 7$                | $8092 = 90^2 - 8$           |
| $8192 = 8 \times 2^{9+1}$        | $9025 = 95^2 + 0$           |
| $9216 = 1 \times 96^2$           | $9261 = 21^{9-6}$           |

### Exercice n°2

### Code secret

5 points

- (a) La réponse est HMSHHSATMMAATSHTMS MSHHHS HMATAHTATSHHTSHMATMS  
(b) le message est : ON EST BIEN EN AUTOMNE
- Le mot clé était : RAYON

**Exercice n°3****L'écart d'heure****5 points**

- Écart de 3 s par heure donc pour avoir 7 minutes, il faut  $\frac{420}{3} = 140$  h soit 5 jours et 20 heures.
- Au bout de 7 jours soit 168 h, il y aura 168 s de retard sur la première montre et 336 s d'avance sur la seconde.

La première marque ( 8 h - 2 min 48 s ) soit 7 h 57 min 12 s.

La seconde marque ( 8 h + 5 min 36 s ) soit 8 h 5 min 36 s.

**Exercice n°4****La brique de lait****5 points**

Calculons le volume maximum de lait contenu dans la brique :

$$V_{max} = (9,5 - 2) \times 17 \times 6,4$$

$$V_{max} = 816 \text{ cm}^3$$

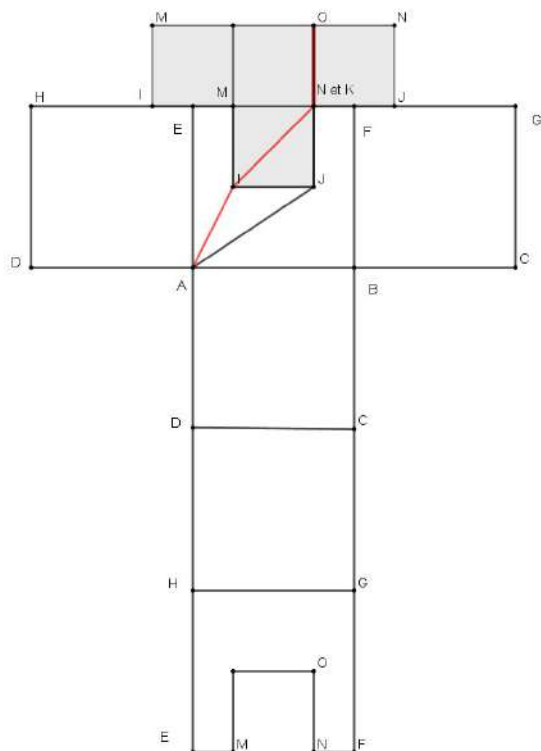
Nous obtenons ainsi la hauteur maximale de lait dans la brique lorsqu'elle placée verticalement :

$$h_{max} = \frac{816}{9,5 \times 6,4} \text{ cm}$$

$$\text{d'où } h_{max} \approx 13,4 \text{ cm}$$

**Exercice n°5****Deux fourmis sur un cube « écubé »****8 points**

- Voici un patron de ce cube évidé.



2. En appliquant le théorème de Pythagore à de judicieux triangles rectangles, on obtient :

**Pour le trajet AIKO (en rouge) :**

$AI = \sqrt{5}$  cm et  $IK = 2\sqrt{2}$  cm d'où la longueur du chemin AIKO.

$$AIKO = AI + IK + KO$$

$$AIKO = \sqrt{5} + 2\sqrt{2} + 2 \text{ cm}$$

$$AIKO \approx 7,1 \text{ cm}$$

**Pour le trajet AJKO (en noir) :**

$AJ = \sqrt{13}$  cm d'où la longueur du chemin AJKO.

$$AJKO = AJ + JK + KO$$

$$AJKO = \sqrt{13} + 2 + 2 \text{ cm}$$

$$AJKO \approx 7,6 \text{ cm}$$

Donc le trajet le plus court est **AIKO**.

3. Calculons la longueur du **trajet AJO** (en vert) :

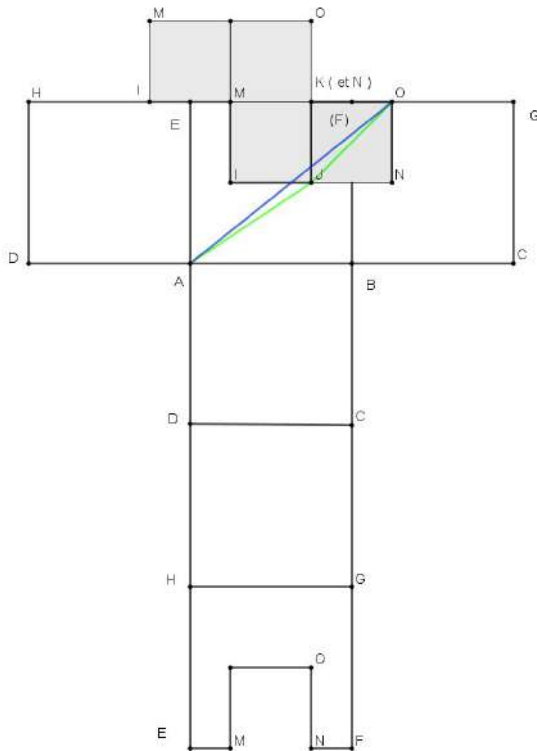
$AJ = \sqrt{13}$  cm et  $JO = IK = 2\sqrt{2}$  cm d'où la longueur du chemin AJO.

$$AJO = AJ + JO$$

$$AJO = \sqrt{13} + 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$AJO \approx 6,4 \text{ cm}$$

Donc le trajet **AJO** est un trajet plus court que ceux de la question 2).



#### Addendum :

Toujours en circulant sur les parties planes du solide, il est possible d'emprunter un chemin encore plus court pour rejoindre O en partant de A (**trajet en bleu**).

En utilisant un autre développement de la partie écubée. On utilise le théorème de Pythagore pour calculer la longueur du segment [AO].

$$AO = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} \text{ cm}$$

or  $\sqrt{41} < \sqrt{13} + 2\sqrt{2}$  donc ce trajet est encore plus court.

**Exercice n°6****Qui perd double !****5 points**

On note A, B et C les trois joueurs :

|                            | A       | B       | C       |
|----------------------------|---------|---------|---------|
| Avoir après la 3ème partie | 16      | 16      | 16      |
| 3ème partie                | gagnant | gagnant | perdant |
| Avoir avant la 3ème partie | 8       | 8       | 32      |
| 2ème partie                | perdant | gagnant | gagnant |
| Avoir avant la 2ème partie | 28      | 4       | 16      |
| 1ère partie                | gagnant | perdant | gagnant |
| Avoir avant la 1ère partie | 14      | 26      | 8       |

**Exercice n°7****Des pensées sans trop dépenser****8 points**Soit  $x$  le petit côté du triangle de pensées de grand côté 60 m (qui est le même que celui de côté 80).

Calculons les surfaces de chaque morceaux.

Tulipes :  $st(x) = (80 - x)(60 - x) = 4800 - 140x + x^2$ .Pensées :  $sp(x) = \frac{1}{2}(60x + 80x) = 70x$ .Gazon :  $sg(x) = 60 \times 80 - (4800 - 140x + x^2 + 70x) = 70x - x^2$ .Pour les prix, on multiplie  $st$  par 8,  $sp$  par 7 et  $sg$  par 4.Le prix total est alors :  $Pt(x) = 38400 - 350x + 4x^2$ .Il faut minimiser cette valeur. En utilisant un tableur on obtient le minimum du prix pour  $x$  compris entre 43,7 et 43,8 (en m). Le prix total est alors :  $Pt = 30\,743,76$  euros.Par calcul, on obtient le minimum pour  $x = \frac{350}{8} = 43,75$ . Le prix est  $Pt = 30\,743,75$  euros.**Exercice n°8****Ne jetons pas les pions !****8 points**

1. Il y a 32 cases libres et sur ces 32 cases, 8 cases le font perdre.

La probabilité de perdre est donc de  $\frac{8}{32}$  soit  $\frac{1}{4}$ .

2. Le joueur perd s'il tire un pion jaune. Il reste 7 pions jaunes sur les 31 pions restants dans le 2
- <sup>e</sup>
- sac.

La probabilité de perdre est donc de  $\frac{7}{31}$ .

3. Si le joueur choisit l'option 1 :

**Avec la couleur bleue** : quelle que soit le numéro de case tirée, il perd.**Avec la couleur rouge** : il y a 4 cases (E3, D4, E4, F5) sur les 12 restantes pour lesquelles il ne perd pas.La probabilité de ne pas perdre est de  $\frac{4}{12}$  soit  $\frac{1}{3}$ .**Avec la couleur verte** : il ne peut pas choisir de pion vert car ils sont tous posés.**Avec la couleur jaune** : il y a 3 cases (A3, A6, C6) sur les 12 restantes pour lesquelles il ne perd pas.La probabilité de ne pas perdre est de  $\frac{3}{12}$  soit  $\frac{1}{4}$ .

Si le joueur choisit l'option 2 :

**Avec la case A3** : il doit tirer un pion jaune. Il en reste 4 sur les 12 pions restants.La probabilité de ne pas perdre est de  $\frac{4}{12}$  soit  $\frac{1}{3}$ .**Avec la case A6** : il doit tirer un pion jaune. Il en reste 4 sur les 12 pions restants.La probabilité de ne pas perdre est de  $\frac{4}{12}$  soit  $\frac{1}{3}$ .**Avec la case B3** : il perd quelle que soit la couleur du pion tiré.

**Avec la case B4 :** il perd quelle que soit la couleur du pion tiré.

**Avec la case C3 :** il perd quelle que soit la couleur du pion tiré.

**Avec la case C5 :** il perd quelle que soit la couleur du pion tiré.

**Avec la case C6 :** il doit tirer un pion jaune. Il en reste 4 sur les 12 pions restants.

La probabilité de ne pas perdre est de  $\frac{4}{12}$  soit  $\frac{1}{3}$ .

**Avec la case D4 :** il doit tirer un pion rouge. Il en reste 2 sur les 12 pions restants. La probabilité de ne pas perdre est de  $\frac{2}{12}$  soit  $\frac{1}{6}$ .

**Avec la case E1 :** il perd quelque soit la couleur du pion tiré.

**Avec la case E3 :** il doit tirer un pion rouge. Il en reste 2 sur les 12 pions restants.

La probabilité de ne pas perdre est de  $\frac{2}{12}$  soit  $\frac{1}{6}$ .

**Avec la case E4 :** il doit tirer un pion rouge. Il en reste 2 sur les 12 pions restants.

La probabilité de ne pas perdre est de  $\frac{2}{12}$  soit  $\frac{1}{6}$ .

**Avec la case F5 :** il doit tirer un pion rouge. Il en reste 2 sur les 12 pions restants.

La probabilité de ne pas perdre est de  $\frac{2}{12}$  soit  $\frac{1}{6}$ .

Donc soit il choisit l'option 1 avec la couleur rouge, soit il choisit l'option 2 avec les cases A3 ou A6 ou C6. Dans chaque cas la probabilité de ne pas perdre est de  $\frac{1}{3}$ .

# Rallye mathématique du Centre

## Éléments de correction de l'épreuve officielle 2018

### Exercice n°1

### Nombres Harshad

8 points

- 11 est le plus petit nombre qui n'est pas Harshad.
- Voici la liste de tous les nombres Harshad inférieurs à 200 :  
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 18, 20, 21, 24, 27, 30, 36, 40, 42, 45, 48, 50, 54, 60, 63, 70, 72, 80, 81, 84, 90, 100, 102, 108, 110, 111, 112, 114, 117, 120, 126, 132, 133, 135, 140, 144, 150, 152, 153, 156, 162, 171, 180, 190, 192, 195, 198, 200.
- $10^{32}$  est un nombre Harshad s'écrivant avec 33 chiffres.
- $10^{23} + 2$  est un nombre Harshad s'écrivant avec 24 chiffres et se terminant par 2.
- Non, il n'existe pas de nombre Harshad premier strictement supérieur à 7.  
En effet, si un tel nombre  $N$  existait, il serait :
  - divisible par la somme de ses chiffres
  - supérieur à 10 (car le plus petit nombre premier strictement supérieur à 7 est 11).En observant que la somme des chiffres d'un entier supérieur à 10 est toujours strictement inférieure à cet entier, il vient :
  - si la somme des chiffres vaut 1 alors le nombre vaut 1 qui est inférieur à 7 ou il est une puissance de 10 et n'est donc pas premier.
  - sinon, la somme de ses chiffres est alors un diviseur de  $N$  compris entre 1 et  $N$ , ce qui est impossible car  $N$  est premier.c.q.f.d

### Exercice n°2

### Éteindre le feu

5 points

- Un canadien transporte 6 000 L d'eau soit 6 m<sup>3</sup>.  
Durée de l'écopage :  $t = \frac{6}{0,5} = 12$  s.  
Distance parcourue :  $d = 110 \times \frac{12}{3600} \approx 0,367$  km  
Pendant l'écopage le canadien parcourt 367 m.
- $4h = 240$  min ;  $\frac{240}{3} = 80$   
Les avions ont fait 80 largages chacun.  
 $80 \times 4 \times 6000 = 1\,920\,000$  L  
Les canadiens ont largué le 26 juillet 1920 m<sup>3</sup>.

### Exercice n°3

### Quand le cube fait sa somme

5 points

Les 6 conditions imposées amènent au système suivant qui leur équivaut :

$$\begin{cases} a = 6 - b \\ e = 11 - b \\ c = 7 - b \\ d = 2b - 3 \end{cases}$$

où a,b,c,d et e sont des nombres entiers positifs.

b joue le rôle d'un paramètre et l'on a :

$$\begin{cases} b \geq 2 \text{ car } d \geq 0 \\ b \leq 6 \text{ car } a \geq 0 \end{cases}$$

On a donc 5 solutions pour (a,b,c,d,e).

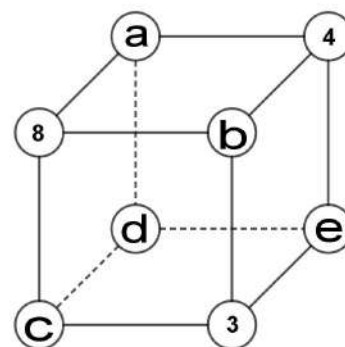
Pour b=2, (4,2,5,1,9)

Pour b=3, (3,3,4,3,8)

Pour b=4, (2,4,3,5,7)

Pour b=5, (1,5,2,7,6)

Pour b=6, (0,6,1,9,5)



### Exercice n°4

### Un problème renversant

6 points



1. Il faut calculer BC et comparer avec la hauteur du verre.

On peut raisonner sur les égalités d'aires car le volume est proportionnel à l'aire.

Les deux aires coloriées sont égales et elles font  $63 \text{ cm}^2$  car  $7 \text{ cm} \times 9 \text{ cm} = 63 \text{ cm}^2$

Or  $\text{Aire}(\text{ABC}) = \frac{AB \times BC}{2}$  donc  $\frac{7 \times BC}{2} = 63$  donc  $BC = 18 \text{ cm}$ .

2. On peut aussi calculer l'aire de ABC d'une autre façon :

$\text{Aire}(\text{ABC}) = \frac{AH \times AC}{2}$ . Or  $AH = 7 \times \sin \alpha$

Pour calculer AC on peut appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABC.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = 7^2 + 18^2 \text{ donc } AC = \sqrt{373}$$

Ainsi

$$\text{Aire}(\text{ABC}) = \frac{AH \times AC}{2} = \frac{7 \times \sin \alpha \times \sqrt{373}}{2} = 63$$

On obtient  $\alpha \approx 69^\circ$ , il faut incliner le verre de  $69^\circ$ .

Autre méthode :

On a  $\alpha = \widehat{BAC}$  car ils sont alternes-internes. Ainsi  $\tan \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{18}{7}$  d'où  $\alpha \approx 69^\circ$

**Exercice n°5****Les courses des robots R2 et D2**

6 points

**• Robot R2 :**

On note que si M et N sont deux points du parcours qui ne sont ni sur une horizontale, ni sur une verticale, les chemins les plus courts sur le quadrillage sont ceux dont la longueur est le demi-périmètre du rectangle de sommets M et N et dont les côtés sont horizontaux ou verticaux.

Il en est ainsi pour les parcours les plus courts des robots si les surfaces de stockage laissent libre au moins un parcours du type précédent. Dans le cas contraire, il faut contourner l'obstacle par le chemin le plus court.

Pour le robot R2 les étapes sont fixées. Seuls les parcours BC et FG sont dans le dernier cas .

On note  $\Omega$  le point de départ et  $\Phi$  le point d'arrivée.

On trouve pour parcours d'étape les plus courts (en mètres) :

$\Omega A = 19$  ;  $AB = 6$  ;  $BC = 8$  ;  $CD = 10$  ;  $DE = 9$  ;  $EF = 9$  ;  $FG = 12$  ;  $G\Phi = 16$  .

Les chemins les plus courts pour R2 mesurent 79 m.

**• Robot D2 :**

Il faut désormais choisir les étapes pour minimiser le parcours.

On adopte la stratégie suivante :

- . on choisit les points étapes pour avoir le moins de retours en arrière ;
- . on choisit pour chaque étape un parcours de longueur minimale.

Pour minimiser le nombre de retour en arrière on note que  $\Omega$ , D et G sont sous l'horizontale passant par  $\Phi$  et que A et E sont au dessus de l'horizontale passant par F, B et C .

On interdit les retours dans le sens horizontal qui seraient trop nombreux !

On dégage deux séries de points d'étape :

a)  $\Omega$  , G , D , F , A , B , E , C ,  $\Phi$  ;

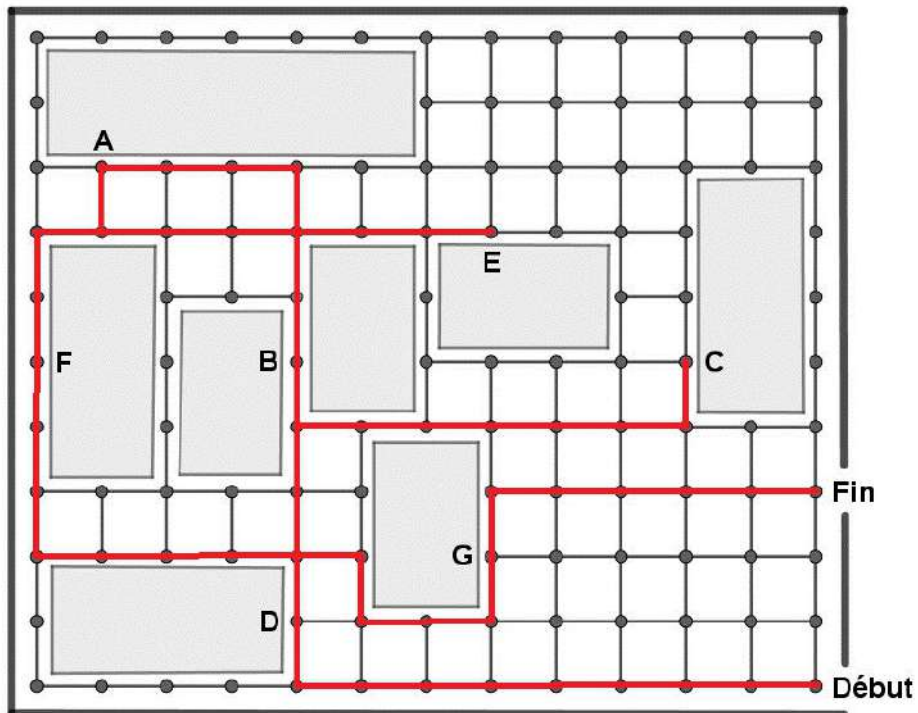
b)  $\Omega$  , G , D , B , F , A , E , C ,  $\Phi$  ;

On trouve la même longueur dans chacun des cas : 43 m.

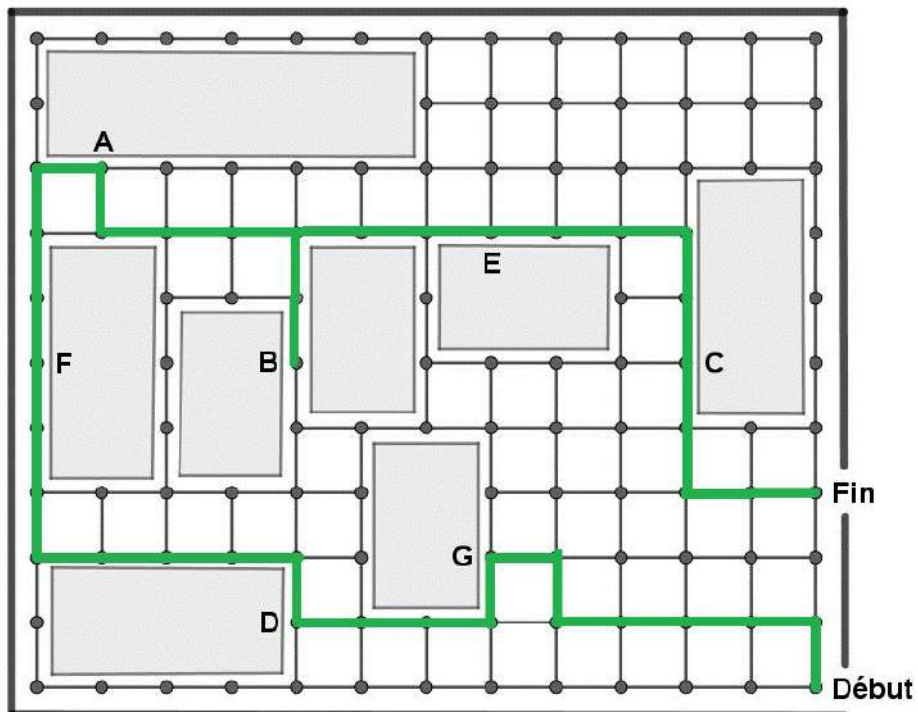
Détail du parcours a) : (avec les longueurs en mètres)

$\Omega G = 7$  ;  $GD = 4$  ;  $DF = 8$  ;  $FA = 4$  ;  $AB = 6$  ;  $BE = 5$  ;  $EC = 5$  ;  $C\Phi = 4$  .

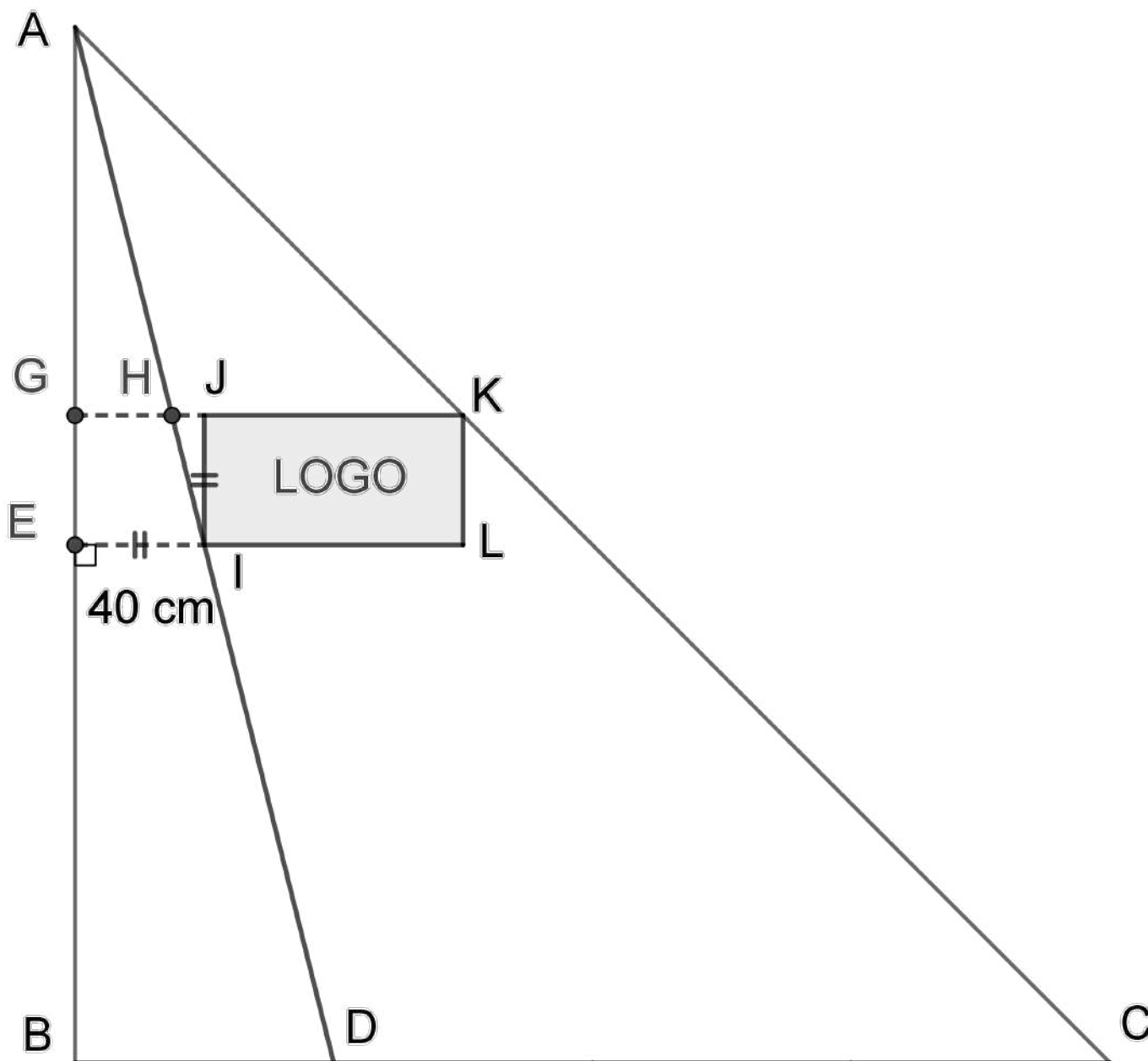
Exemple de trajet de longueur minimale pour R2.



Exemple de trajet de longueur minimale pour D2.



6 points



1. Voir ci-dessus

2. On utilise le théorème de Thalès :

- $(IL) \parallel (BC)$  donne  $\frac{1}{4} = \frac{BD}{BC} = \frac{BD}{AB} = \frac{GH}{AG}$
- $(IJ) \parallel (AB)$  donne  $\frac{GH}{AG} = \frac{HJ}{IJ}$

Donc  $\frac{HJ}{IJ} = \frac{1}{4}$  et  $HJ = 10$  cm. Ainsi  $GH = 30$  cm.

- Donc  $\frac{AG}{AB} = \frac{GH}{BD} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$  d'où  $AG = \frac{AB}{3} = 12$  dm.

Comme ABC est rectangle isocèle et que  $(GK) \parallel (BC)$  on a AGK triangle rectangle isocèle

d'où  $GK=12$  dm.

• Finalement  $JK=GK-GJ=(12-4)\text{dm}=8$  dm.

Aire(logo)=  $(8 \times 4) \text{ dm}^2= 32 \text{ dm}^2$ .

### Exercice n°7

### La vache en cubes

8 points

1. Pour le premier cube pris au hasard :

Il y a une chance sur 5 de le mettre dans le bon emplacement

Il y a une chance sur 6 pour que ce soit la bonne face qui apparaisse

Il y a une chance sur 4 de le mettre dans le bon sens.

$$\frac{1}{5} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{120}$$

Donc il y a une chance sur 120 que le cube soit correctement placé.

2.  $\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{120}$

Donc il y a une chance sur 120 que les 5 cubes soient à leur place.

3.  $\frac{1}{5} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{955514880}$

Donc il y a bien environ une chance sur un milliard de terminer le puzzle de la vache.

### Exercice n°8

### La fontaine tient tout juste

7 points

Les dimensions de l'étoile sont déterminées dès que l'on connaît la longueur du côté du carré.

1. L'aire de l'étoile égale  $x^2 + 4 \times \frac{x \times (10 - x)}{4} = (10x) \text{ m}^2$ .

Quand cette aire est égale au cinquième de l'aire du patio,  $x = 2$  m

2. Dans ce cas, l'aire de la zone blanche est égale à  $(10x - \frac{\pi x^2}{4}) \text{ m}^2$ .

Quand cette aire est égale au cinquième de l'aire du patio,  $x$  est solution de l'équation :

$$(10x - \frac{\pi x^2}{4}) = 20 \text{ soit } \pi x^2 - 40x + 80 = 0.$$

A l'aide de la calculatrice on trouve que cette équation à deux solutions  $x_1 \approx 2,4850$  et  $x_2 \approx 10,2473$

Comme  $x \leq 10$  on ne retient que :  $x_1 \approx 2,49$ .

### Exercice Informatique-Algorithmique

### A-t-il eu le un ?

8 points

1. On obtient :

Etape 1 : (5 1 6 2 4 3)

Etape 2 : (4 1 6 2 5 3)

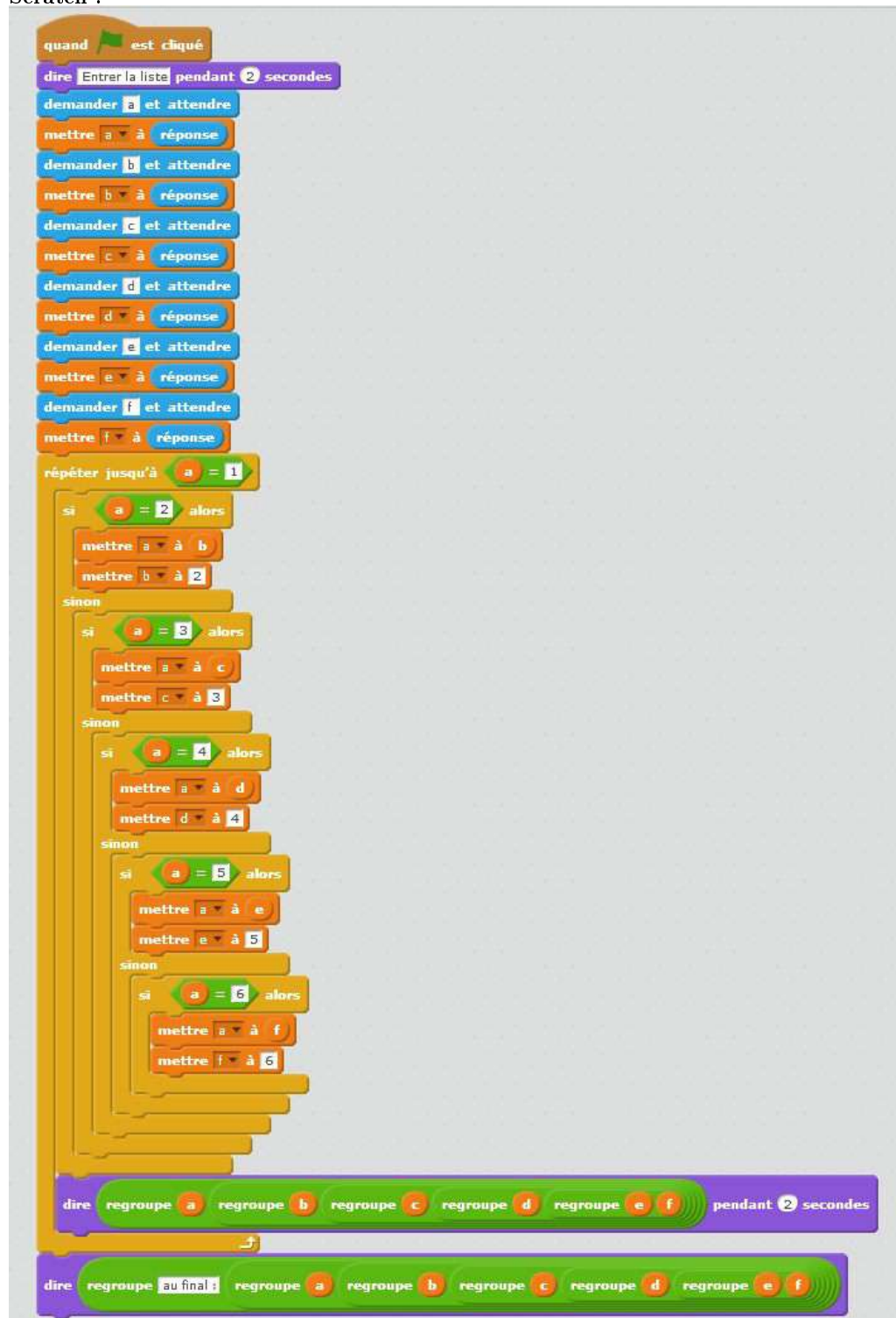
Etape 3 : (2 1 6 4 5 3)

Etape 4 : (1 2 6 4 5 3)

2. L'algorithme s'arrête lorsque l'ordre des nombres ne change plus, cela se produit lorsque le nombre 1 est en première position.

3. Voici deux programmes, le premier en Scratch et le second en Python, répondant à la consigne.

Scratch :



## Python :

```
1 a=int(input("entrer la valeur du premier nombre"))
2 b=int(input("entrer la valeur du deuxième nombre"))
3 c=int(input("entrer la valeur du troisième nombre"))
4 d=int(input("entrer la valeur du quatrième nombre"))
5 e=int(input("entrer la valeur du cinquième nombre"))
6 f=int(input("entrer la valeur du sixième nombre"))
7 while a!=1 :
8     if a==2:
9         a=b
10        b=2
11    else:
12        if a==3:
13            a=c
14            c=3
15        else:
16            if a==4:
17                a=d
18                d=4
19            else:
20                if a==5:
21                    a=e
22                    e=5
23                else:
24                    if a==6:
25                        a=f
26                        f=6
27    print(a,b,c,d,e,f)
28 print("le résultat final est : ",a,b,c,d,e,f)
```

# Rallye mathématique du Centre

## Correction de l'épreuve préparatoire décembre 2018

### Exercice n°1

### Paul ou Virginie

5 points

Temps mis par Paul et Virginie pour se rejoindre :  $\frac{1}{3}$  h. (car  $v = 3$  km/h)  
 Distance parcourue par Médor lorsque Paul et Virginie se rencontrent :

$$d = t \times V_{\text{medor}}$$

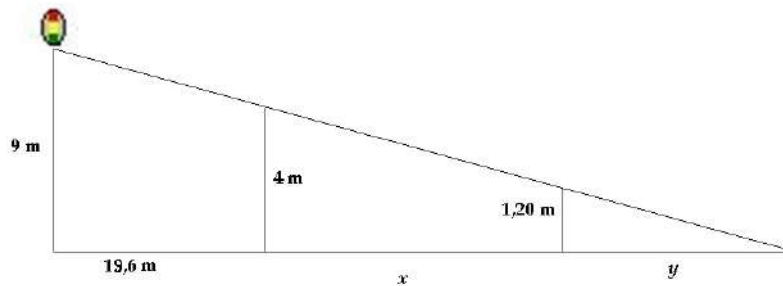
$$d = \frac{8}{3} \text{ km}$$

Médor aura parcouru environ 2,666 km lorsque Paul et Virginie se rencontreront.

### Exercice n°2

### Verra verra pas

5 points



Configuration de Thalès :

$$\frac{1,2}{y} = \frac{4}{x+y} = \frac{9}{19,6+x+y}$$

$$\frac{1,2}{y} = \frac{4}{x+y} \quad \text{donne} \quad 1,2x + 1,2y = 4y \quad \text{d'où} \quad 1,2x - 2,8y = 0$$

$$\frac{1,2}{y} = \frac{9}{19,6+x+y} \quad \text{donne} \quad 23,52 + 1,2x + 1,2y = 9y \quad \text{d'où} \quad 1,2x - 7,8y = -23,52$$

Il faut donc résoudre le système :

$$\begin{cases} 1,2x - 2,8y = 0 \\ 1,2x - 7,8y = -23,52 \end{cases}$$

On trouve  $x = 10,98$  m et  $y = 4,7$  m.

Le conducteur doit être arrêté à presque 11 m derrière la remorque du camion.

En raisonnant plus astucieusement, en retirant 1,2 m à toutes les hauteurs, on peut appliquer directement le théorème de Thalès.

$$\text{Il vient alors } \frac{2,8}{7,8} = \frac{x}{19,6+x} \quad \text{ce qui donne } 7,8x = 2,8x + 19,6 \times 2,8.$$

$$\text{d'où } x = \frac{54,88}{5} = 10,98.$$

### Exercice n°3

### Décortiquer la graine...

8 points

Il suffit de tester les différentes possibilités pour la graine, à savoir : 1, 2, 4, 5, 10 et 20. Seule la graine 4 convient.

|   |    |               |   |      |
|---|----|---------------|---|------|
| W | 23 | $23 - 1 = 22$ | V |      |
| H | 8  | $8 - 22 + 26$ | L |      |
| N | 14 |               |   | STOP |
| D | 4  |               |   |      |
| E | 5  |               |   |      |
| A | 1  |               |   |      |
| N | 14 |               |   |      |
| V | 22 |               |   |      |
| B | 2  |               |   |      |

|   |    |                    |   |      |
|---|----|--------------------|---|------|
| W | 23 | $23 - 1 = 22$      | V |      |
| H | 8  | $8 - 22 + 26 = 12$ | L |      |
| N | 14 |                    |   | STOP |
| D | 4  |                    |   |      |
| E | 5  |                    |   |      |
| A | 1  |                    |   |      |
| N | 14 |                    |   |      |
| V | 22 |                    |   |      |
| B | 2  |                    |   |      |

|   |    |                    |   |      |
|---|----|--------------------|---|------|
| W | 23 | $23 - 2 = 21$      | U |      |
| H | 8  | $8 - 21 + 26 = 13$ | M |      |
| N | 14 |                    |   | STOP |
| D | 4  |                    |   |      |
| E | 5  |                    |   |      |
| A | 1  |                    |   |      |
| N | 14 |                    |   |      |
| V | 22 |                    |   |      |
| B | 2  |                    |   |      |

|   |    |                     |   |  |
|---|----|---------------------|---|--|
| W | 23 | $23 - 4 = 19$       | S |  |
| H | 8  | $8 - 19 + 26 = 15$  | O |  |
| N | 14 | $14 - 15 + 26 = 25$ | Y |  |
| D | 4  | $4 - 25 + 26 = 5$   | E |  |
| E | 5  | $5 - 5 + 26 = 26$   | Z |  |
| A | 1  | $1 + 26 - 26 = 1$   | A |  |
| N | 14 | $14 - 1 = 13$       | M |  |
| V | 22 | $22 - 13 = 9$       | I |  |
| B | 2  | $2 - 9 + 26 = 19$   | S |  |

WHNDE ANVB est SOYEZ AMIS

### Exercice n°4

### Somme toute

8 points

- 1, 9, 7, 17, 33, 57, 107, 197.
- 7, 4, 2, 13, 19, 34, 66, 119, 219, 404, 742. On retrouve 742.
- Les nombres cherchés sont les suivants : 14, 19, 28, 47, 61 et 75.

### Exercice n°5

### Coktail multicolore

8 points

Pour obtenir les couleurs mélangées, il reste  $2,2 \text{ m}^2$  de bleu,  $2,4 \text{ m}^2$  de rouge et  $2,1 \text{ m}^2$  de jaune.

Ensuite, on teste les différentes possibilités et on trouve que les surfaces à peindre en vert, orange et violet sont respectivement de  $0,9 \text{ m}^2$ ,  $2 \text{ m}^2$  et  $3,8 \text{ m}^2$ .

### Exercice n°6

On ne peut pas tout faire !

12 points

Zigzag  $L = 20\sqrt{10} + 3 + 30 \approx 96,25$  cm  
 Directe  $L = 10\sqrt{10} + 10 \times 3 + \sqrt{109} + 30 \approx 102,06$  cm  
 Rapide  $L = 10\sqrt{10} + 9 \times 3 + 2\sqrt{34} + 30 \approx 100,28$  cm  
 Collet Français  $L = 2\sqrt{10} + 10 \times 3 + 9\sqrt{13} + 30 \approx 98,77$  cm  
 Semi-direct  $L = 8\sqrt{10} + 10 \times 3 + \sqrt{13} + 2\sqrt{34} + 30 \approx 100,57$  cm  
 Créneau  $L = 10 \times 3 + 10 + \sqrt{109} + 30 \approx 80,44$  cm

Maud peut utiliser le zigzag, le collet français et le créneau.

### Exercice n°7

Un problème de Mahavira

5 points

Soit  $n$  le nombre de chameaux du troupeau, on obtient :  $\frac{1}{4} \times n + 2\sqrt{n} + 15 = n$   
 d'où  $\frac{-3}{4} \times n + 2\sqrt{n} + 15 = 0$

On utilise le tableur ou la calculatrice pour déterminer l'entier  $n$  qui vérifie la relation précédente.

|    | $(-0,75)*A1+2*\text{Racine}(A1)+15$ |
|----|-------------------------------------|
| 1  | 16,25                               |
| 2  | 16,32842712                         |
| 3  | 16,21410162                         |
| 4  | 16                                  |
| 5  | 15,72213595                         |
| 6  | 15,39897949                         |
| 7  | 15,04150262                         |
| 8  | 14,65685425                         |
| 9  | 14,25                               |
| 10 | 13,82455532                         |
| 11 | 13,38324958                         |
| 12 | 12,92820323                         |
| 13 | 12,46110255                         |
| 14 | 11,98331477                         |
| 15 | 11,49596669                         |
| 16 | 11                                  |
| 17 | 10,49621125                         |
| 18 | 9,985281374                         |
| 19 | 9,467797887                         |
| 20 | 8,94427191                          |
| 21 | 8,41515139                          |
| 22 | 7,88083152                          |
| 23 | 7,341663047                         |
| 24 | 6,797958971                         |
| 25 | 6,25                                |
| 26 | 5,698039027                         |
| 27 | 5,142304845                         |
| 28 | 4,583005244                         |
| 29 | 4,020329614                         |
| 30 | 3,45445115                          |
| 31 | 2,885528726                         |
| 32 | 2,313708499                         |
| 33 | 1,739125293                         |
| 34 | 1,16190379                          |
| 35 | 0,582159566                         |
| 36 | 0                                   |
| 37 | -0,584474939                        |
| 38 | -1,171171994                        |

Le troupeau contient 36 chameaux.

# Exercice n°8

# Touché, coulé !

8 points

1. (a)

Il n'y a a priori pas de difficultés. Un bateau est constitué de 2 cases contiguës. L'expérience aléatoire correspondante consiste à toucher une des cases. Il y a 2 cases favorables sur 100 cases possibles. La probabilité est donc de  $2/100$ , soit  $1/50$ .

(b)

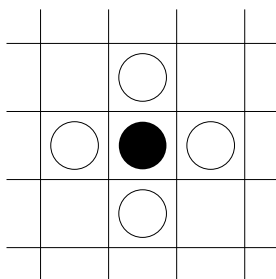
C'est une nouvelle expérience aléatoire. Cette fois, les cases du bateau étant contiguës, et comme on est en E5 (case "standard"), il y a 4 cases favorables pour atteindre la deuxième case du bateau, qui sont **E4**, **E6**, **D5** et **F5**.

(c)

Il faut de nouveau se placer dans une autre expérience aléatoire, et envisager trois cas distincts, selon la case touchée. On sait que 2 cases sont "favorables".

1er cas :

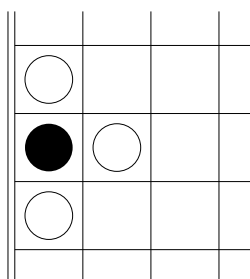
Case "standard"



même cas que la b/  
4 cases sont possibles.

2ème cas :

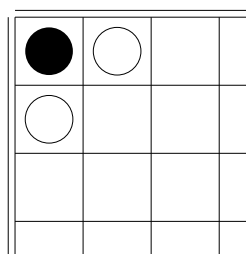
Case touchant un  
bord, mais pas en coin.



3 cases sont possibles.

3ème cas :

coin.



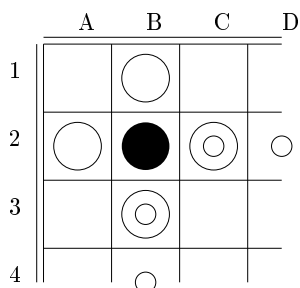
Cette fois, seules 2 cases sont  
possibles.

Seul, le 3ème cas correspond à la description. La position des cases favorables est alors donnée : par exemple, B1 et A2 si Léa a joué en A1.

Les positions possibles de la case touchée du bateau de Pierre sont : **A1**, **A10**, **J1**, et **J10**.

D'où 8 positions possibles du bateau : **(A1,A2)** ; **(A1,B1)** ; **(A9,A10)** ; **(A10,B10)** ; **(J1,J2)** ; **(I1,J1)** ; **(I10,J10)** et **(J9,J10)**

2. L'expérience consiste à atteindre une deuxième case (et une seule). La disposition des cases favorables se trouve dans le dessin suivant :

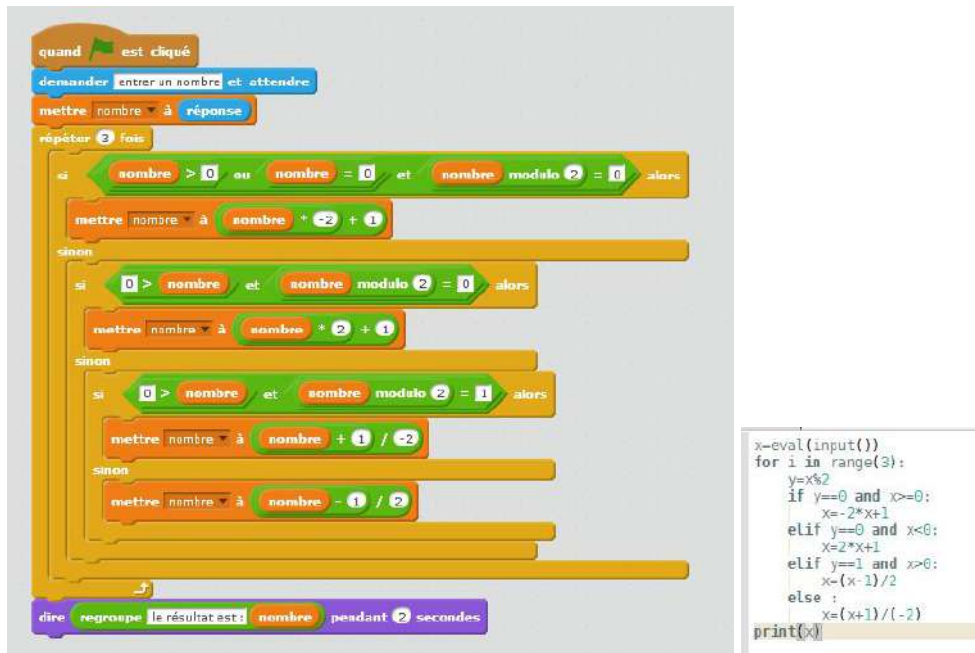


On s'aperçoit alors que certaines cases correspondent à deux positions du bateau. Ce sont les cases **B3** et **C2** qui donnent le maximum de chance.

12 points

1.
  - $n = 0 \rightarrow n = 1 \rightarrow n = 0 \rightarrow n = 1$
  - $n = -1 \rightarrow n = 0 \rightarrow n = 1 \rightarrow n = 0$
  - $n = 14 \rightarrow n = -27 \rightarrow n = 13 \rightarrow n = 6$
  - $n = -16 \rightarrow n = -31 \rightarrow n = 15 \rightarrow n = 7$
  - $n = 2011 \rightarrow n = 1005 \rightarrow n = 502 \rightarrow n = -1003$

2.



The image shows a Scratch script on the left and its equivalent Python code on the right. The Scratch script starts with a 'when clicked' event, followed by a 'ask for number and wait' block, then a 'set number to response' block. A 'repeat 3 times' loop contains three conditional blocks. The first block checks if 'number > 0 or number = 0 and number modulo 2 = 0', and if true, sets 'number' to 'number + -2 + 1'. The second block checks if '0 > number and number modulo 2 = 0', and if true, sets 'number' to 'number + 2 + 1'. The third block checks if '0 > number and number modulo 2 = 1', and if true, sets 'number' to 'number + 1 / -2'. After the loop, a 'say regroup le résultat est: number pendant 2 secondes' block is executed. The Python code on the right implements the same logic: it takes an input, loops 3 times, and applies the same conditional transformations to a variable 'x'.

```

x=eval(input())
for i in range(3):
    y=x%2
    if y==0 and x>=0:
        x=-2*x+1
    elif y==0 and x<0:
        x=2*x+1
    elif y==1 and x>0:
        x=(x-1)/2
    else:
        x=(x+1)/(-2)
print(x)

```

3. Si l'on fait fonctionner ce programme avec un entier pair supérieur ou égal à 2, on obtient la moitié du nombre moins 1.
4. Les nombres qui donnent 2019 comme affichage final sont : 16159, -16159, 4040, -4040, 4041 et -4041.

# Rallye mathématique du Centre

## Éléments de correction de l'épreuve officielle 2019

Exercice n°1

Au bonheur, l'escape game !

**6 points**

- L'heure de l'horloge de la pièce centrale est un entier parmi : 2, 3, 5, 7 et 11.

- Les heures des trois autres pièces sont trois entiers consécutifs compris entre 1 et 12.

Soit :

- 1, 2, 3 avec 6 possibilités de répartitions des heures sur les 3 horloges à savoir (1, 2, 3) ; (1, 3, 2) ; (2, 1, 3) ; (2, 3, 1) ; (3, 1, 2) et (3, 2, 1)

- 2, 3, 4 avec de la même façon 6 possibilités de répartitions des heures sur les 3 horloges

- 3, 4, 5 avec de la même façon 6 possibilités de répartitions des heures sur les 3 horloges

- 4, 5, 6 avec de la même façon 6 possibilités de répartitions des heures sur les 3 horloges

- 5, 6, 7 avec de la même façon 6 possibilités de répartitions des heures sur les 3 horloges

- 6, 7, 8 avec de la même façon 6 possibilités de répartitions des heures sur les 3 horloges

- 7, 8, 9 avec de la même façon 6 possibilités de répartitions des heures sur les 3 horloges

- 8, 9, 10 avec de la même façon 6 possibilités de répartitions des heures sur les 3 horloges

- 9, 10, 11 avec de la même façon 6 possibilités de répartitions des heures sur les 3 horloges

- 10, 11, 12 avec de la même façon 6 possibilités de répartitions des heures sur les 3 horloges

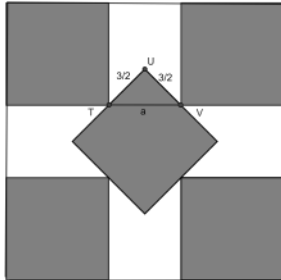
Ce qui donne  $10 \times 6 = 60$  possibilités pour chacun des nombres 2, 3, 5, 7 et 11.

Au total, il y a donc au maximum 300 combinaisons possibles à tester, à raison de 3 secondes par combinaison cela fait 900 secondes soit 15 minutes.

Tiphaine a donc raison, ils n'ont pas assez de temps pour être sûr de pouvoir sortir.

**Exercice n°2****5 chocolats<sup>3</sup> en boîte<sup>2</sup>****8 points**• Projet de Yann

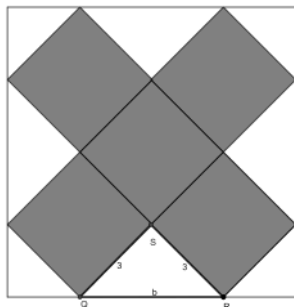
La base de la boîte est un carré de 9 cm de côté.

• Projet de Catherine

En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle TUV, il vient :

$$a^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \text{ d'où } a = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

La base de la boîte est un carré de  $6 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$  cm de côté.

• Projet de Jérôme

En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle QRS, il vient :  $b^2 = 9 + 9$  d'où  $b = 3\sqrt{2}$

La base de la boîte est un carré de  $6\sqrt{2}$  cm de côté.

Conclusion

$6 + \frac{3\sqrt{2}}{2} < 6\sqrt{2} < 9$ . C'est donc le projet de Catherine qui est le plus économique.

**Exercice n°3****Il faut qu'un tiroir soit ouvert ou fermé****8 points**

1. Un tiroir sera fermé s'il possède un nombre pair de diviseurs, il sera ouvert sinon.  
Il faut donc lister les diviseurs de 12 : 1,2,3,4,6,12 soit 6 diviseurs donc le tiroir 12 est fermé.
2. Donner la position finale des 20 premiers tiroirs.  
Les tiroirs 1,4,9,16 sont ouverts, les autres fermés.
3. De façon générale, les nombres qui ont un nombre impair de diviseurs sont les carrés parfaits ; tous les autres ont un nombre pair de diviseurs. Les tiroirs ouverts après le passage de la 300<sup>eme</sup> personne sont les numéros :  
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289.  
Il y a 17 tiroirs ouverts en tout ( $18^2=324$ ).

**Exercice n°4****Le peintre 10 traits****6 points**

|    |         |         |               |               |       |         |           |
|----|---------|---------|---------------|---------------|-------|---------|-----------|
| 1. | couleur | on veut | première fois | deuxième fois | total | il faut | on ajoute |
|    | blanc   | 1       | 1             | 2             | 3     | 3       | rien      |
|    | rose    | 4       | 5             | 2             | 7     | 12      | 5         |

Il faut 4 fois plus de rose que de blanc, donc avec 3 parts de blanc, il faut 12 parts de rose.

|    |         |         |      |         |           |
|----|---------|---------|------|---------|-----------|
| 2. | couleur | on veut | on a | il faut | on ajoute |
|    | blanc   | 6       | 2    | 36      | 34        |
|    | violet  | 2       | 1    | 12      | 11        |
|    | bleu    | 1       | 6    | 6       | rien      |

**Exercice n°5****La belle échappée !****6 points**

Distance parcourue par Florence à 42 km/h en 10 min :

donc  $d = 42 \text{ km/h} \times 10/60 \text{ h} = 7 \text{ km}$

Distance parcourue par Olivier à 24 km/h en 10 min :

donc  $d = 24 \text{ km/h} \times 10/60 \text{ h} = 4 \text{ km}$

Donc quand Florence fait demi-tour, les deux cyclistes sont séparés de 3 km.

Florence roule à 36 km/h alors que Olivier roule à 24 km/h.

En 1 min, Florence parcourt :  $d = v \times t$  donc  $d = 36 \text{ km/h} \times 1/60 \text{ h} = 0,6 \text{ km}$

En 1 min, Olivier parcourt :  $d = v \times t$  donc  $d = 24 \text{ km/h} \times 1/60 \text{ h} = 0,4 \text{ km}$

Donc en 3 min, Florence aura parcouru 1,8 km et Olivier aura parcouru 1,2 km et donc ils se retrouveront à ce moment-là puisque  $1,8 \text{ km} + 1,2 \text{ km} = 3 \text{ km}$ .

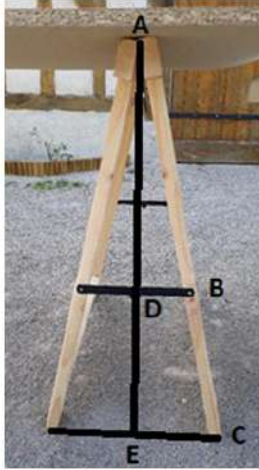
Donc au final Florence aura parcouru 8,8 km toute seule et Olivier aura parcouru 5,2 km tout seul.

## Exercice n°6

### (i) Les tréteaux pour mettre la table

9 points

1<sup>ère</sup> option :



On cherche à calculer DB sachant que  $AB = 41$  cm.

Hauteur totale table en plastique :  $65 \text{ cm} + 5 \text{ cm} = 70$  cm

$70 \text{ cm} - 2 \text{ cm} = 68$  cm donc [AE] doit mesurer 68 cm.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AEC rectangle en E :

$$CE^2 = 76^2 - 68^2 = 1152 \text{ donc } CE \approx 34 \text{ cm.}$$

(DB) // (EC) donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{CE} \text{ donc } \frac{41}{76} = \frac{DB}{34} \text{ donc } DB \approx 18,3 \text{ cm.}$$

Donc la longueur de la barre métallique doit être d'environ 36,6 cm.

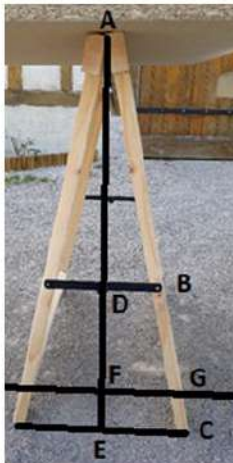
2<sup>ème</sup> option :

Cette fois on cherche à calculer AB sachant que  $DB = 10$  cm.

Toujours d'après le théorème de Thalès,  $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{CE}$  donc  $\frac{AB}{76} = \frac{10}{34}$  donc  $AB \approx 22,4$  cm

Il faut fixer la barre à 22,4 cm du sommet A du tréteau.

3<sup>ème</sup> option :



On cherche à calculer AG sachant que  $AF = 68$  cm.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ADB rectangle en D :

$$DA^2 = 41^2 - 10^2 = 1581 \text{ donc } DA \approx 39,8 \text{ cm}$$

(DB) // (FG) donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AD}{AF} = \frac{AB}{AG} \text{ donc } \frac{39,8}{68} = \frac{41}{AG} \text{ donc } AG \approx 70 \text{ cm}$$

Donc il faut couper 6 cm à chaque pied des tréteaux.

# Exercice n°7

# Mise en boîte de la pâte

8 points

Il faut d'abord calculer la surface du petit triangle équilatéral, découpé à partir du grand en enlevant les coins grisés. Soit  $h$  la hauteur de la boîte. Un « coin » est formé de deux triangles rectangles dont un des petits côtés est  $h$ , et les angles ont pour mesure 30 et 60 degrés. Donc le côté qu'il faut enlever (deux fois) au côté (10 cm) du grand triangle n'est autre que la hauteur d'un triangle équilatéral de côté  $2h$ . Soit  $h\sqrt{3}$ . Le petit triangle équilatéral a donc pour côté (en cm) :  $10 - 2h\sqrt{3}$ .

Comme un côté est positif, ceci implique que  $10 - 2h\sqrt{3} \geq 0$  donc  $h \leq \frac{5}{\sqrt{3}}$ . Soit  $h < 2,9$ .

Sa surface est :

$$S = (10 - 2h\sqrt{3})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \cdot (5 - h\sqrt{3})^2$$

Et le volume de la boîte est :

$$V = h \cdot (5 - h\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}$$

$$V = \sqrt{3} \cdot (25h - 10h^2\sqrt{3} + 3h^3)$$

Dans un tableur (  $0 < h < 2,9$  ), le maximum est atteint pour  $h = 0,96$  cm (approximativement).

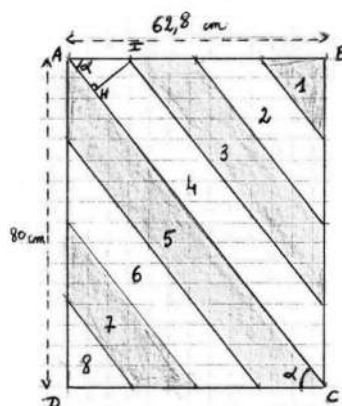
|  |     |            |      |            |
|--|-----|------------|------|------------|
|  | 0   | 0          |      |            |
|  | 0,1 | 4,03532317 |      |            |
|  | 0,2 | 7,50182326 |      |            |
|  | 0,3 | 10,4306772 |      |            |
|  | 0,4 | 12,8530618 |      |            |
|  | 0,5 | 14,8001541 |      |            |
|  | 0,6 | 16,303131  |      |            |
|  | 0,7 | 17,3931694 |      |            |
|  | 0,8 | 18,1014462 | 0,91 | 18,4708256 |
|  | 0,9 | 18,4591383 | 0,92 | 18,4913501 |
|  | 1   | 18,4674226 | 0,93 | 18,5027429 |
|  | 1,1 | 18,2474761 | 0,94 | 18,511035  |
|  | 1,2 | 17,7404756 | 0,95 | 18,5162579 |
|  | 1,3 | 17,0075981 | 0,96 | 18,5184425 |
|  | 1,4 | 16,0800205 | 0,97 | 18,5176201 |
|  | 1,5 | 14,9889107 | 0,98 | 18,5138219 |
|  | 1,6 | 13,7654726 | 0,99 | 18,507079  |
|  | 1,7 | 12,4408562 | 1    | 18,4974226 |
|  | 1,8 | 11,0462473 | 1,01 | 18,4848839 |
|  | 1,9 | 9,61282283 | 1,02 | 18,4694941 |
|  | 2   | 8,17175976 |      |            |
|  | 2,1 | 6,75423498 |      |            |
|  | 2,2 | 5,39142541 |      |            |
|  | 2,3 | 4,11450796 |      |            |
|  | 2,4 | 2,95465955 |      |            |
|  | 2,5 | 1,94305708 |      |            |
|  | 2,6 | 1,11087747 |      |            |
|  | 2,7 | 0,48929765 |      |            |
|  | 2,8 | 0,10949451 |      |            |
|  | 2,9 | 0,00264495 |      |            |

# Exercice n°8

# L'enseigne du barbier en noir et blanc

10 points

- La longueur du rectangle est de 80 cm.  
La largeur du rectangle est de  $20\pi$  cm soit environ 62,8 cm au mm près.
- Soit  $\alpha$  l'angle formé par chaque bande avec l'horizontale et soit  $l$  la largeur d'une bande.



On a alors  $\tan \alpha = \frac{80}{20\pi}$  d'où  $\alpha \approx 51,9^\circ$ . Par ailleurs  $\sin \alpha = \frac{l}{20\pi} = \frac{l}{5\pi}$ .

Ainsi  $l = 5\pi \sin \alpha$  soit  $l \approx 12,4$  cm.

Autre méthode :

On peut aussi utiliser le théorème de Pythagore pour le calcul de la longueur,  $d$ , de la diagonale du rectangle :  $d^2 = 80^2 + (20\pi)^2 = 400(\pi^2 + 16)$  d'où  $d = 20\sqrt{\pi^2 + 16}$ .

et après avoir remarqué que :  $\sin \alpha = \frac{l}{20\pi} = \frac{80}{d}$ . On obtient  $l = \frac{20\pi}{\sqrt{\pi^2 + 16}}$  cm.

- On s'intéresse aux morceaux de bande noire. Le cas des bandes blanches est identique pour raison de symétrie centrale. On recole les morceaux de la façon suivante :



Les raccords sont assurés par les angles de raccordement : ils sont supplémentaires.

Avec les morceaux 5, 3, 1 et 7 on obtient un parallélogramme. Le plus petit rectangle le contenant est obtenu en ajoutant à chaque bout un petit triangle rectangle identique à AHI.

La longueur de ce rectangle est  $L = AC + \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}AC + AH = 2AC + AH$ .

AC se calcule par exemple à l'aide du théorème de Pythagore, on trouve  $AC = 20\sqrt{\pi^2 + 16} \approx 101,7$  cm.

AH se calcule par exemple à l'aide de la trigonométrie, on trouve  $AH = 5\pi \cos \alpha = \frac{5\pi^2}{\sqrt{\pi^2 + 16}}$  soit  $AH \approx 9,7$  cm.

Ainsi,  $L = 40\sqrt{\pi^2 + 16} + \frac{5\pi^2}{\sqrt{\pi^2 + 16}} \approx 213$  cm.

Les rouleaux de bandes adhésives de 2,20 m de long suffisent donc.

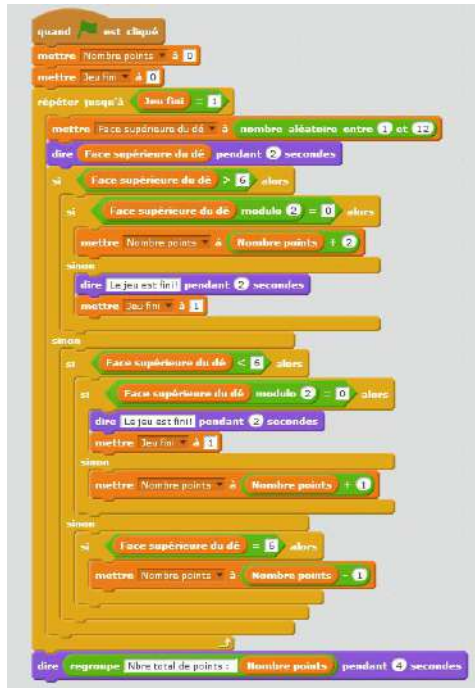
## Exercice Informatique-Algorithmique

## Un impair ou un pair et on perd !

12 points

1. Avec la séquence 8, 6, 5, 3 et 11, on marque 3 points.
2. Avec la séquence 5, 12, 6, 8, 9 et 3, on marque 4 points et après avoir fait 9 le jeu se termine donc il n'a pas pu faire un 3 ensuite.

3.



```

1 from random import*
2 S=0
3 P=True
4 while P==True:
5     de=randint(1,12)
6     print(de)
7     if de > 6 :
8         if de %2 ==0:
9             S=S+2
10        else :
11            P=False
12    if de < 6:
13        if de %2==0:
14            P=False
15        else :
16            S=S+2
17    if de ==6:
18        P=False
19        S=S-1
20 print("le nombre de point est ",S)

```

# Rallye mathématique du Centre

## Correction de l'épreuve préparatoire décembre 2019

### Exercice n°1

### Les aventuriers de $\rho\lambda$

8 points

Soit  $x$  la quantité de riz quotidienne que pourra manger un candidat.

Il vient :

$$16 \times 3 \times x + 15 \times 3 \times x + 14 \times 3 \times x + 13 \times 3 \times x + \dots + 2 \times 3 \times x = 12000 \text{ g}$$

Remarque : La durée du jeu est de  $15 \times 3 = 45$  jours

On obtient :  $3x[16 + 15 + 14 + \dots + 2] = 12000 \text{ g}$

$$\text{soit } 3x \times 135 = 12000 \text{ g} \quad \text{d'où } x = \frac{4000}{135} \text{ g}$$

La quantité de riz quotidienne que pourra manger un candidat est d'environ 29,6 g de riz par jour.

### Exercice n°2

### Le Carré de POLYBE

5 points

Le mot important du texte est SESAME On utilise donc les lettres : SEAM en premier puis l'alphabet dans l'ordre alphabétique.

|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | S | E | A | M | B |
| 2 | C | D | F | G | H |
| 3 | I | J | K | L | N |
| 4 | O | P | Q | R | T |
| 5 | U | V | X | Y | Z |

41  $\Rightarrow$  O

15  $\Rightarrow$  B

32  $\Rightarrow$  J

12  $\Rightarrow$  E

21  $\Rightarrow$  C

45  $\Rightarrow$  T ...

Réponse : OBJECTIF PREMIER DE LA CLASSE

### Exercice n°3

### Au bal masqué, ohé...

6 points

|                  | Déguisements |   |   |   |   |   |
|------------------|--------------|---|---|---|---|---|
| <i>Aristide</i>  | V            | V | P | P | F | F |
| <i>Ben</i>       | P            | F | V | F | V | P |
| <i>Christian</i> | F            | P | F | V | P | V |

Le tableau ci-dessus donne toutes les répartitions possibles de déguisements.

Les possibilités en rouge sont exclues par les affirmations du texte. Il reste donc deux possibilités :

|           |         |
|-----------|---------|
| Aristide  | Pirate  |
| Ben       | Vampire |
| Christian | Fantôme |

|           |         |
|-----------|---------|
| Aristide  | Fantôme |
| Ben       | Vampire |
| Christian | Pirate  |

### Exercice n°4

### Nombre de Champernowne

7 points

1. Une stratégie commode consiste à noter que :

-de 1 à 9 il y a 9 chiffres ; de 10 à 19 il y a 20 chiffres, comme de 20 à 29, et ainsi de suite jusqu'à 90 à 99 ; on itère avec 30 chiffres de 100 à 109, ..., jusqu'à 900 à 909 ; etc.

Pour la 20e décimale , on le fait directement : c'est 1.

Pour la 100e, de 1 à 49 il y a 89 chiffres ; on écrit ensuite 505152535455 : c'est 5.

Pour la 2020e, de 1 à 709 il y a 2019 chiffres ; on écrit ensuite 710711 : c'est 7.

2. Pour 35, on examine l'écriture obtenue en écrivant les chiffres représentant les 9 premiers nombres entiers naturels. On n'y trouve pas la suite 35 (alors qu'on y trouve la suite 34 par exemple). Donc la suite 35 arrive quand on écrit la suite 35 représentant le nombre 35 !  
On compte le nombre de chiffres écrits en progressant du nombre 1 au nombre 34 : il y en a  $9 + 2 \times 25 = 59$ . Ainsi le 3 suivi de 5 apparaît à la 60ème place dans ce cas.

Pour 181, en observant les premières décimales de 0,1234567891011121314151617**1819**..., on remarque que 181 se trouve de la 26ème à la 28ème décimale.

Pour 2020 -Le fait qu'aucun nombre entier ne s'écrit avec un chiffre 0 en début permet d'établir que la suite de chiffres 2020 ne peut être obtenue comme tout ou partie d'une suite de chiffres incluse dans la partie décimale illimitée du nombre de Champernowne obtenue en alignant en ordre croissant les chiffres des nombres de 1 à 999.

Ainsi la suite de chiffres 2020 intervient pour la 1ère fois quand on écrit les chiffres du nombre 2020 à la suite de ceux du nombre 2019. Le nombre de chiffres obtenu en écrivant bout à bout ceux de 1 à 2019 est :

$$9 + 2 \times 90 + 3 \times 900 + 4 \times 1020 = 6969$$

Donc le chiffre 2 du début de 2020 est en 6970ème position.

Pour 2021, toujours en observant les premières décimales de 0,12345678910111213141516171819**2021**..., on remarque que 2021 se trouve de la 30ème à la 33ème décimale.

### Exercice n°5

### Le jardin de Jean

12 points

1. Pour répondre à cette question, il faut d'abord calculer : BE, EF, CA, DA,  $\widehat{BF}$  et  $\widehat{DB}$ .

\* BE = ED = EF = rayon du quart de disque = 75 m + 45 m = 120 m donc BE = 120 m et EF = 120 m.

\* En utilisant le théorème de Thalès dans la configuration en « papillon » définie par les droites parallèles (BE) et (DA) et les sécantes (BA) et (DE), on a :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CE} = \frac{DA}{BE} \text{ donc } \frac{CA}{96} = \frac{45}{75} \text{ donc } \underline{CA = 57,6 \text{ m.}}$$

\* Toujours en appliquant Thalès dans la même configuration que précédemment, on a :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CE} = \frac{DA}{BE} \text{ donc } \frac{DA}{120} = \frac{45}{75} \text{ donc } \underline{DA = 72 \text{ m.}}$$

$$* \widehat{BF} = \frac{2 \times \pi \times 120 \text{ m}}{4} \text{ donc } \widehat{BF} \approx 188 \text{ m}$$

\* En utilisant la relation de Pythagore dans DEA rectangle en A, on a  $\underline{EA = 96 \text{ m.}}$

\* Dans le triangle DEA rectangle en A, on a  $\cos \widehat{DEA} = \frac{EA}{ED}$  donc  $\cos \widehat{DEA} = \frac{96}{120}$ .

Donc  $\widehat{DEA} \approx 37^\circ$ , on en déduit que  $\widehat{BED} \approx 53^\circ$ .

La longueur d'un arc de cercle étant proportionnelle à la mesure de son angle au centre, le tableau ci-dessous est un tableau de proportionnalité.

|                              |                |                           |
|------------------------------|----------------|---------------------------|
| Angle au centre ( $^\circ$ ) | $53^\circ$     | $360^\circ$               |
| Longueur arc (cm)            | $\widehat{DB}$ | $2 \times \pi \times 120$ |

donc  $\underline{\widehat{DB} \approx 111 \text{ m.}}$

\* Longueur totale du trajet :

$$120 \text{ m} + 188 \text{ m} + 120 \text{ m} + 120 \text{ m} + 111 \text{ m} + 96 \text{ m} + 58 \text{ m} + 72 \text{ m} + 120 \text{ m} = 1005 \text{ m}$$

Il a parcouru environ 1005 m.

2. Pour répondre à cette question, il faut calculer toutes les longueurs manquantes c'est-à-dire AF et  $\widehat{DF}$ .

\*  $AF \approx 120 \text{ m} - 96 \text{ m}$  donc  $\underline{AF \approx 24 \text{ m.}}$

\*  $\widehat{DF} \approx 188 \text{ m} - 111 \text{ m}$  donc  $\underline{\widehat{DF} \approx 77 \text{ m.}}$

\* Voici un chemin plus court :

$E \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow E$

Longueur :

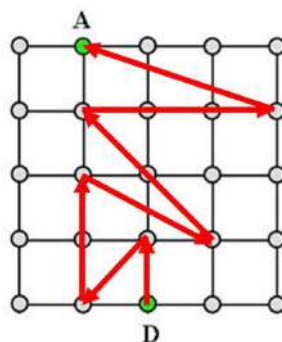
$$120 \text{ m} + 77 \text{ m} + 24 \text{ m} + 72 \text{ m} + 111 \text{ m} + 96 \text{ m} + 58 \text{ m} + 96 \text{ m} + 120 \text{ m} + 120 \text{ m} = 894 \text{ m.}$$

### Exercice n°6

### Le trajet s'enracine

8 points

1. La longueur du trajet représenté sur la *fig b* est :  $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{8} + \sqrt{9}$ .
2. Le trajet représenté sur la *fig c* ci-dessous a pour longueur :  $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{8} + \sqrt{9} + \sqrt{10}$ .



3. La longueur du trajet représenté sur la *fig d* ci-dessous est :

$$\sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{8} + \sqrt{10} + \sqrt{16} + \sqrt{17} + \sqrt{20} + \sqrt{25} + \sqrt{32} + \sqrt{34} \approx 40,724.$$



### Exercice n°7

### De dé en dé

9 points

1. Une façon simple est de lister tous les cas possibles, comme dans le tableau ci-dessous (les sommes sont à l'intersection des lignes et des colonnes) :

| les dés | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  |
|---------|---|---|---|----|----|----|
| 1       | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  |
| 2       | 3 | 4 | 5 | 6  | 7  | 8  |
| 3       | 4 | 5 | 6 | 7  | 8  | 9  |
| 4       | 5 | 6 | 7 | 8  | 9  | 10 |
| 5       | 6 | 7 | 8 | 9  | 10 | 11 |
| 6       | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Il suffit alors de faire les décomptes. Les probabilités sont :

| somme | proba (sur 36) |
|-------|----------------|
| 2     | 1              |
| 3     | 2              |
| 4     | 3              |
| 5     | 4              |
| 6     | 5              |
| 7     | 6              |
| 8     | 5              |
| 9     | 4              |
| 10    | 3              |
| 11    | 2              |
| 12    | 1              |

2. On reprend le tableau précédent, en modifiant les nombres affichés par le premier dé; puis, ligne par ligne, on indique les nombres de l'autre dé de façon à obtenir les sommes voulues. Cela donne :

| autre dé \ premier dé | 1 | 2  | 3  | 4  |
|-----------------------|---|----|----|----|
| 1                     | 2 | 3  | 4  | 5  |
| 3                     | 4 | 5  | 6  | 7  |
| 4                     | 5 | 6  | 7  | 8  |
| 5                     | 6 | 7  | 8  | 9  |
| 6                     | 7 | 8  | 9  | 10 |
| 8                     | 9 | 10 | 11 | 12 |

L'autre dé portait donc les nombres 1, 3, 4, 5, 6 et 8.

## Exercice n°8

## A l'eau la bouée

7 points

Soient :

$r$  le rayon du cercle de base de la bouée

$2h$  la hauteur de la bouée

$V$  le volume de la bouée

$$\text{On a } V = \frac{2\pi r^2 h}{3} = \frac{2\pi}{3}(80^2 - h^2)h = \frac{2\pi}{3}(6400h - h^3)$$

|        |                  |        |
|--------|------------------|--------|
| Volume | 1 m <sup>3</sup> | V      |
| Masse  | 110 kg           | 1716 g |

On en déduit :  $V = 15,6 \text{ dm}^3 = 15600 \text{ cm}^3$ .

Le problème se traduit par l'équation :

$$\frac{2\pi}{3}(6400h - h^3) = 15600 \text{ soit } \pi h^3 - 6400\pi h + 23400 = 0$$

On peut alors utiliser la calculatrice, Géogébra ou le tableur pour obtenir une valeur approchée de  $h$ .

On obtient  $h \approx -80,57$  ou  $h \approx 79,41$  ou  $h \approx 1,16$ .

On retiendra raisonnablement  $h \approx 79,41 \text{ cm}$ .

## Exercice n°9

## Jeu du Potkimonte

8 points

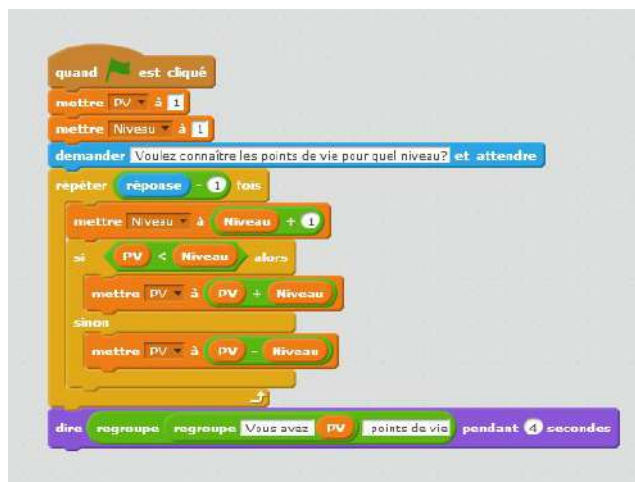
1. Compléter ce tableau jusqu'au niveau 20.

|        |   |   |   |   |   |   |    |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|--------|---|---|---|---|---|---|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| niveau | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7  | 8 | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| PV     | 1 | 3 | 0 | 4 | 9 | 3 | 10 | 2 | 11 | 1  | 12 | 0  | 13 | 27 | 12 | 28 | 11 | 29 | 10 | 30 |

2. Que remarque-t-on aux niveaux 3 et 12 ?

A ces niveaux on obtient 0 PV.

- 3.



```

1 lvl=eval(input("Entrer le niveau voulu :"))
2 Pv=1
3 for i in range(2, lvl+1):
4     if Pv<i:
5         Pv=Pv+i
6     else:
7         Pv=Pv-i
8 print("Vous avez", Pv, "Pv au niveau", lvl)

```

4. Au 2020e niveau, le personnage a 2650 PV.

5. Au 39e niveau, le personnage a de nouveau 0 PV.

# Rallye mathématique du Centre

## Éléments de correction de l'épreuve officielle 2020

### Exercice n°1

### Une carapace pour la légion

8 points

1. Soit  $N$  le nombre total de personnes avec  $n$  de chaque côté du carré.  
On a  $N = n^2 + 8 = (n + 1)^2 - 5$ . Donc  $2n = 12$  et  $n = 6$ . Ainsi  $N = 44$ .
2. Maintenant  $N = 54$ . Comme  $7^2 < 54 < 8^2$  on ne peut faire une tortue carrée!  
On fait une tortue rectangulaire avec  $n$  soldats sur la largeur,  $\frac{3n}{2}$  sur la longueur.  
Alors  $N = \frac{3n^2}{2}$  donc  $n^2 = \frac{2 \times 54}{3} = 36$  et  $n = 6$ . Donc la largeur est **6** et la longueur **9**.
3. On part de  $N = 2\,567\,000$ . On a  $1602^2 < 2\,567\,000 < 1603^2$ .
  - Donc la plus grande tortue carrée possible a  $n=1602$  habitants par côté. Il resterait alors **596** habitants hors tortue.
  - Pour une tortue rectangulaire à  $n$  habitants en largeur et  $\frac{3n}{2}$  sur la longueur, on cherche  $\frac{3n^2}{2}$  aussi proche de  $2\,567\,000$  que l'on peut donc  $n^2$  proche de  $1\,711\,333,33\dots$   
Comme  $1308^2 < 1\,711\,333 < 1309^2$ , la tortue rectangulaire la plus grande possible de ce type aura **1308** habitants en largeur et **1962** en longueur. Resteront alors **704** habitants non inclus.

### Exercice n°2

### Merci pour tout Jean-Marie

5 points

En rassemblant les informations dans un tableau on obtient :

|          | Jean-Pierre | Philippe | Rémy | Pierrick | Jean-Marie | Total |
|----------|-------------|----------|------|----------|------------|-------|
| Chapeau  | oui         |          |      |          |            | 3     |
| Lunettes |             |          | non  | non      |            | 3     |
| Echarpe  |             | oui      | non  |          |            | 2     |

On complète avec les contraintes :

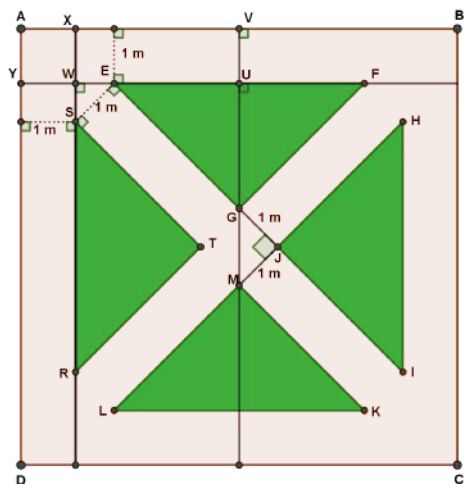
|          | Jean-Pierre | Philippe | Rémy | Pierrick | Jean-Marie | Total |
|----------|-------------|----------|------|----------|------------|-------|
| Chapeau  | oui         | non      | oui  | oui      | non        | 3     |
| Lunettes | oui         | oui      | non  | non      | oui        | 3     |
| Echarpe  | non         | oui      | non  | oui      | non        | 2     |

Jean-Marie a des lunettes mais pas d'écharpe ni de chapeau.

### Exercice n°3

### Jardin à la française

10 points



On appelle  $O$  le centre du carré, on note alors que  $EGF$  est un triangle rectangle isocèle comme  $AOB$  par égalité des angles à côtés parallèles.

Pour calculer l'aire totale des allées, on va calculer l'aire d'un des 4 triangles rectangles isocèles, multiplier ce résultat par 4 puis le soustraire à l'aire du carré.

- Grâce au théorème de Pythagore dans le triangle rectangle  $GMJ$ , on a  $GM = \sqrt{2}$  m.

$$\text{Donc } GU = \frac{24 - 2 - \sqrt{2}}{2} = 11 - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m.}$$

- Grâce au théorème de Pythagore dans le triangle rectangle  $WES$ , on a :

$$2 \times WE^2 = 1^2 \text{ donc } WE^2 = 0,5$$

$$\text{Donc } WE = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707 \text{ m (solution positive).}$$

$$\text{Donc } EF = 24 - 2 - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = (22 - \sqrt{2}) \text{ m}$$

$$\text{Donc } \text{Aire}(EFG) = \frac{EF \times GU}{2} = \frac{(22 - \sqrt{2}) \times (11 - \frac{\sqrt{2}}{2})}{2} \approx 105,94 \text{ m}^2$$

$$\text{Donc } \text{Aire des allées} = 24^2 - 4 \times \frac{(22 - \sqrt{2}) \times (11 - \frac{\sqrt{2}}{2})}{2} \approx 152,22 \text{ m}^2$$

Le volume estimé de gravier est de  $7,6 \text{ m}^3$ , d'où un coût d'environ 1598 euros.

**Exercice n°4****La tour infernale de MathCraft****9 points**

1. On note que chaque structure en dessous d'une autre a deux blocs de plus sur chaque côté.

On détermine le plus grand entier  $p$  tel que  $1 + 3 + 5 + \dots + (2p + 1) \leq 191$ .

Par additions successives on trouve  $2p+1=25$ .

La tour de Mattéo comprend au plus 13 structures cubiques.

Dans ce cas la tour mesure  $1 + 3 + 5 + 7 \dots + 21 + 23 + 25 = 169$  blocs de haut.

2. Calcul du nombre de blocs nécessaires pour construire la tour la plus haute :

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \dots + 23^3 + 25^3 = 56\,953$$

Le temps passé par Mattéo sera égal à  $\frac{56953}{13} \times 4 = 17\,524$  s. Donc un temps de 4 h 52 min 4s.

3. On ne peut construire deux tours de la plus grande hauteur possible avec 83 000 blocs seulement. Mais si l'on retire de celle-ci la structure de  $25^3$  blocs on pourra construire chaque tour avec  $56\,953 - 25^3 = 41\,328$  blocs ; donc 82 656 blocs pour les deux. Il restera alors 344 blocs non utilisés.

La hauteur de chacune des tours sera égale à  $1 + 3 + 5 + 7 \dots + 21 + 23 = 144$  blocs.

**Exercice n°5****Le codage dur à lire****6 points**

Le plus simple (mais peut-être pas le plus rapide) est de faire au préalable le codage de toutes les lettres ; ce qui donne :

A→B    H→Y    O→V    V→S

B→I    I→F    P→C    W→Z

C→P    J→M    Q→J    X→G

D→W    K→T    R→Q    Y→N

E→D    L→A    S→X    Z→U

F→K    M→H    T→E

G→R    N→O    U→L

Alors :

1) RALLYE MATHEMATIQUE est codé en QBAAND HBeydHBEFJLD ;

2) Le texte à décoder est : MERCI POUR TOUT JEAN MARIE.

**Exercice n°6****Le sapin de Noël sans guirlande****10 points**

On sait que  $AB = 1,2$  m et  $SH = 1,6$  m.

Grâce au théorème de Pythagore, on calcule  $SA$ .

$$SA = \sqrt{0,6^2 + 1,6^2} = \sqrt{2,92}$$

d'où  $SA \approx 1,709$  m.

Dans le triangle rectangle  $ABC$  :

$$AB = 1,20 \text{ m}$$

$$BC = 1,20 \times \cos(20,5^\circ) \approx 1,124 \text{ m}$$

$$AC = 1,20 \times \sin(20,5^\circ) \approx 0,420 \text{ m}$$

$$\text{donc } SC = SA - AC \approx 1,289 \text{ m.}$$

Ensuite en utilisant le théorème de Thalès on obtient :

$$\frac{DC}{BA} = \frac{SC}{SA} \text{ d'où } DC = AB \times \frac{SC}{SA} \approx 1,20 \times \frac{1,289}{1,709} \approx 0,905 \text{ m.}$$

On itère ensuite en remplaçant  $AB$  par  $DC$ .

Dans le triangle rectangle  $EDC$  :

$$DC \approx 0,905 \text{ m}$$

$$DE = DC \times \cos(20,5^\circ) \approx 0,848 \text{ m}$$

$$EC = DC \times \sin(20,5^\circ) \approx 0,317 \text{ m}$$

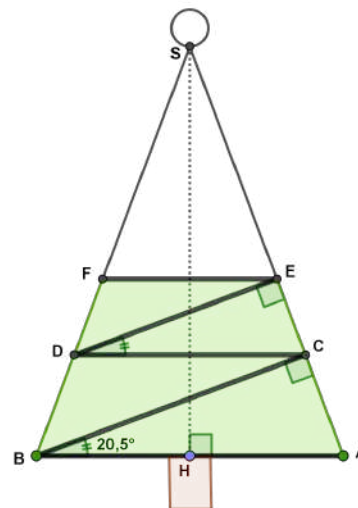
$$\text{donc } SE = SC - EC \approx 0,972 \text{ m.}$$

Ensuite en utilisant le théorème de Thalès on obtient :

$$\frac{EF}{DC} = \frac{SE}{SC} \text{ d'où } EF = DC \times \frac{SE}{SC} \approx 0,905 \times \frac{0,972}{1,289} \approx 0,682 \text{ m.}$$

La longueur de la guirlande est :  $l = AB + BC + CD + DE + EF \approx 4,76$  m.

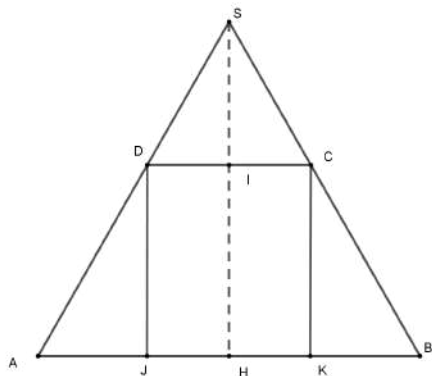
C'est donc Aliénor qui a raison.



**Exercice n°7****Un cône pour l'enceinte****8 points**

Modélisation pour passage à une étude de fonction.

On note  $h$  la hauteur du cône et  $R$  le rayon du cercle de base et on trace une figure dans un plan contenant l'axe du cône.



On a alors  $h = SH$ ,  $IC = 5$ ,  $IH = 15$  et  $R = HB$

Grâce au théorème de Thalès on a :  $\frac{IC}{HB} = \frac{SI}{SH}$

d'où  $\frac{5}{R} = \frac{h-15}{h} = 1 - \frac{15}{h}$

On obtient alors  $h = \frac{15R}{R-5}$  et  $R = \frac{5h}{h-15}$

Fonction à étudier.

On sait que si  $V$  est le volume du cône on a :  $V = \frac{1}{3}h\pi R^3$ .

On en tire que  $V = f(R)$  avec  $f(R) = 5\pi \frac{R^3}{R-5}$

On en tire aussi que  $V = g(h)$  avec  $g(h) = \frac{25\pi}{3} \frac{h^3}{(h-15)^2}$

On étudie l'une ou l'autre des fonctions avec une préférence pour  $f$ , un peu plus simple.

Le minimum de  $f$  est atteint pour  $R = 7,5$  **cm** ce qui donne  $h = 45$  **cm**.

**Exercice n°8****Docteur, est-ce grave ?****7 points**

Sur un million de personnes on compte 1000 malades et 999 000 personnes saines.

Pour le test A :

- sur 1 000 malades, 990 sont testés positifs, 10 négatifs ;
- sur 999 000 sains, 9 990 sont testés positifs, 989 010 négatifs.

Ainsi Pierre fait partie des  $9\,990 + 990 = 10\,980$  testés positifs.

La proportion qu'il appartienne à la population des malades parmi ceux qui ceux testés positifs est de  $\frac{990}{10980} \simeq 9,02\%$

Pour le test B :

- sur 1 000 malades, tous sont testés positifs ;
- sur 999 000 sains, 19 980 sont testés positifs, 979 020 négatifs.

Ainsi Anaïs fait partie des  $19\,980 + 1000 = 20\,980$  testés positifs.

La proportion qu'elle appartienne à la population des malades parmi ceux qui ceux testés positifs est de  $\frac{1000}{20980} \simeq 4,77\%$

## Exercice Informatique-Algorithmique

Chat c'est chouette, il y a des mulots !

12 points

1. Fin du 1er mois : 11 mulots, du 2d mois : 22 mulots, du 3e mois : 44 mulots.

A l'aide de la calculatrice (ou tableur) on détermine que le nombre de mulots dépassera 10 millions en 21 mois.

|    | A        | B |
|----|----------|---|
| 1  | 11       |   |
| 2  | 22       |   |
| 3  | 44       |   |
| 4  | 88       |   |
| 5  | 176      |   |
| 6  | 352      |   |
| 7  | 704      |   |
| 8  | 1408     |   |
| 9  | 2816     |   |
| 10 | 5632     |   |
| 11 | 11264    |   |
| 12 | 22528    |   |
| 13 | 45056    |   |
| 14 | 90112    |   |
| 15 | 180224   |   |
| 16 | 360448   |   |
| 17 | 720896   |   |
| 18 | 1441792  |   |
| 19 | 2883584  |   |
| 20 | 5767168  |   |
| 21 | 11534336 |   |
| 22 |          |   |

2. Il y a 88 mulots au 4e mois, donc les chats mangent 60 mulots par mois à partir du 5e mois.

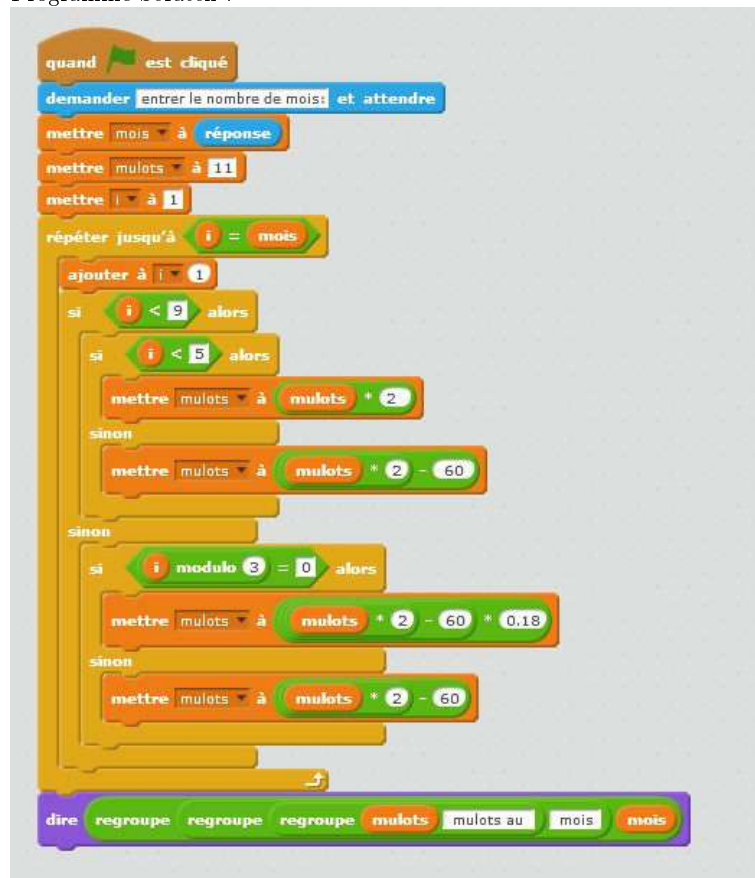
Toujours avec une calculatrice (ou tableur) ou avec un programme on détermine que le nombre de mulots dépassera 100 000 en 16 mois. Les chats ne ralentissent que très peu la progression des mulots.

|    | A      | B |
|----|--------|---|
| 1  | 11     |   |
| 2  | 22     |   |
| 3  | 44     |   |
| 4  | 88     |   |
| 5  | 116    |   |
| 6  | 172    |   |
| 7  | 284    |   |
| 8  | 508    |   |
| 9  | 956    |   |
| 10 | 1852   |   |
| 11 | 3644   |   |
| 12 | 7228   |   |
| 13 | 14396  |   |
| 14 | 28732  |   |
| 15 | 57404  |   |
| 16 | 114748 |   |

### 3. Programme Python :

```
1 n=eval(input("entrer le nombre de mois "))
2 a=11
3 i=1
4 while i<n:
5     i=i+1
6     if i<5:
7         a=a*2
8     elif 5<=i<9:
9         a=a*2-60
10    else:
11        if i%3==0:
12            a=(a*2-60)*0.18
13        else:
14            a=a*2-60
15 print("le nombre de mulots est",a,"au bout de ",n,"mois")
```

### Programme Scratch :



4. Les chouettes semblent avoir ralenti la progression des mulots pendant plus de 50 mois mais cela ne dure pas. La population dépasse 3000 mulots en 77 mois et ne cesse ensuite de croître

# Rallye mathématique du Centre

## Correction de l'épreuve préparatoire décembre 2020

### Exercice n°1

### Jules décode

7 points

Le code comporte 5 chiffres suivis de la lettre B.

Sachant que le code n'a jamais été changé, que deux touches sont quasiment effacées, qu'une autre touche montre des traces d'usure mais moins que les deux autres et que les autres touches sont comme neuves, on peut en déduire que le code utilise uniquement trois chiffres différents : un chiffre est utilisé deux fois, un autre chiffre est aussi utilisé deux fois et un chiffre est utilisé une seule fois.

Les 4 premiers chiffres forment un carré parfait donc on cherche les nombres de 4 chiffres qui sont des carrés parfaits composés de 3 chiffres différents.

De plus comme le nombre de la combinaison à cinq chiffres est un palindrome, son chiffre des dizaines est le même que celui des unités de mille donc dans la liste des carrés il faut éliminer tous les nombres dont le chiffre des unités n'est pas égal au chiffre des centaines.

Finalement, il reste comme carrés possibles : 3969, 5929 et 8464.

La combinaison étant un palindrome, il reste comme possibilités : 39693B , 59295B et 84648B.

Il n'y a donc que 3 codes possibles donc il est certain de rentrer dans l'immeuble sans bloquer la porte.

Il a donc raison.

### Exercice n°2

### Le peintre 10 traits

6 points

|    | couleur | on veut | première fois | deuxième fois | total | il faut | on ajoute |
|----|---------|---------|---------------|---------------|-------|---------|-----------|
| 1. | blanc   | 1       | 1             | 2             | 3     | 3       | rien      |
|    | rose    | 4       | 5             | 2             | 7     | 12      | 5         |

Il faut 4 fois plus de rose que de blanc, donc avec 3 parts de blanc, il faut 12 parts de rose.

|    | couleur | on veut | on a | il faut | on ajoute |
|----|---------|---------|------|---------|-----------|
| 2. | blanc   | 6       | 2    | 36      | 34        |
|    | violet  | 2       | 1    | 12      | 11        |
|    | bleu    | 1       | 6    | 6       | rien      |

### Exercice n°3

### My fortune for 10 €!

5 points

Notons  $x$  le montant cherché.

1er magasin :  $(x + x - 10) = (2x - 10)$

2ème magasin :  $(2x - 10) + (2x - 10) - 10 = (4x - 30)$

3ème magasin :  $(4x - 30) + (4x - 30) - 10 = 8x - 70$

Donc  $8x - 70 = 0$  ce qui donne  $x = 8,75$  €.

### Exercice n°4

### Le délice du limaçon

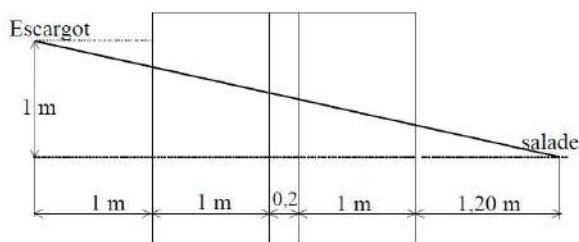
10 points

1. Trajet 1 =  $3,2 + \sqrt{2,44} \approx 4,762$  m

Trajet 2 =  $3,4 + \sqrt{2} \approx 4,814$  m

2. Trajet 3 =  $2,2 + \sqrt{1,25} + \sqrt{1,69} \approx 4,618$  m

3. Le trajet minimal est en « ligne droite » de l'escargot à la salade.



Trajet minimal =  $\sqrt{20,36} \approx 4,512$  m

### Exercice n°5

### Histoire d'appartements

6 points

Soit a le nombre de personnes ayant vue sur le port, b le nombre de personnes ayant vue sur la ville, c le nombre de personnes ayant vue sur la montagne et d le nombre de personnes ayant vue sur la mer.

b est multiple de 3 et 4 et  $b \leq 20$  donc  $b = 12$ ,  $a = 4$ ,  $c = 8$  et  $d = 3$ .

|          |       |   |   |      |                                                                                                                                       |
|----------|-------|---|---|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| montagne | mer   |   |   | port | $x + y + z = 3$ donc $x = 1, y = 1$ et $z = 1$ .<br>$1 + t + u = 4$ donc $t + u = 3$<br>soit $t = 1$ et $u = 2$ ou $t = 2$ et $u = 1$ |
|          | x     | y | z |      |                                                                                                                                       |
|          | s     |   | t |      |                                                                                                                                       |
|          | w     | v | u |      |                                                                                                                                       |
|          | ville |   |   |      |                                                                                                                                       |

Si  $t = 1$  et  $u = 2$ , alors  $w + v + 2 = 12$  d'où  $w + v = 10$  et  $1 + s + w = 8$  d'où  $s + w = 7$ , de plus,

$x + y + z + t + u + v + w + s = 20$  donc  $s + 16 = 20$   $s = 4$  alors  $w = 3$  et  $v = 7$ .

Si  $t = 2$  et  $u = 1$ , alors  $w + v + 1 = 12$  d'où  $w + v = 11$  et  $1 + s + w = 8$  d'où  $s + w = 7$ , de plus,

$x + y + z + t + u + v + w + s = 20$  donc  $s + 17 = 20$   $s = 3$  alors  $w = 4$  et  $v = 7$ .

Deux dispositions possibles :

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 4 |   | 1 |
| 3 | 7 | 2 |

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 3 |   | 2 |
| 4 | 7 | 1 |

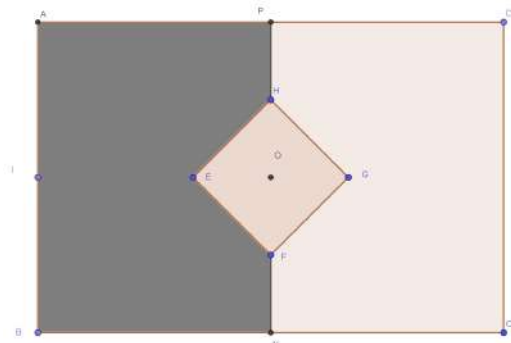
# Exercice n°6

# La chèvre, le pré et le hangar

10 points



1.



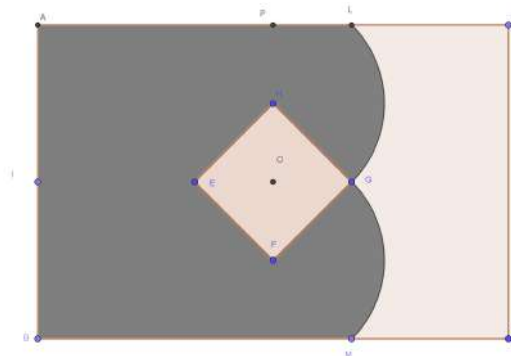
Avec les barrières [HP] et [FN].

L'aire que peut brouter la chèvre est celle du rectangle ABNP moins celle du triangle EFH.

Ainsi, Aire à brouter =  $60 \times 20 - 20 \times 10 : 2$

Aire à brouter =  $1200 - 100 = 1100 \text{ m}^2$

2.



Soit L le point d'intersection entre (EH) et (AD).

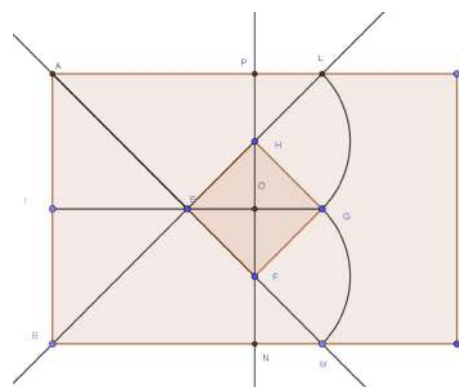
Soit M le point d'intersection entre (EF) et (BC).

Les droites (AD) et (EG) sont parallèles car elles sont toutes les deux perpendiculaires à (FH).

Grâce au théorème de Thalès, comme  $HP = HO = 10$ , on a  $HL = HE = HG = 10\sqrt{2}$ .

Donc le point L est à l'intersection de l'arc de cercle de centre H de rayon  $10\sqrt{2}$  avec le côté [AD].

De même, le point M est à l'intersection de l'arc de cercle de centre F de rayon  $10\sqrt{2}$  avec le côté [BC].



Ainsi ABML est un carré de 40 mètres de côté dont E est le centre.

Les diagonales [AM] et [BL] se coupent leur milieu commun E. Ainsi  $EA = EL = EM = EB = 20\sqrt{2}$ .

La chèvre peut donc brouter, en plus de la surface de la première situation celles des triangles HPL et FNM et celles des quarts de disque HLG et FGM.

On note que  $\text{Aire}(EFH) = \text{Aire}(HPL) + \text{Aire}(FNM)$ , donc au total l'aire à brouter est celle du rectangle ABNP et d'un demi-disque de rayon  $10\sqrt{2}$  m.

Aire à brouter =  $1200 + \pi \times (10\sqrt{2})^2 : 2$

Aire à brouter =  $1200 + 100\pi$

L'aire à brouter est donc d'environ 1514 m<sup>2</sup>.

**Exercice n°7****Bûche, ô ma bûche !****8 points**

$$\text{volume} = 0,5 \times x \times y = 1$$

Soit  $l$  la longueur de tubes métalliques nécessaires.

1. • Si  $x = 1$  alors  $l = 16 + 2\sqrt{5} \approx 20,47$  m

• Si  $x = 2$  alors  $l = 15 + 2\sqrt{5} \approx 19,47$  m

2.  $l(x, y) = 10 \times 0,5 + 3x + 4y + 2\sqrt{x^2 + y^2}$

$$l(x, y) = 5 + 3x + 4y + 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

or  $0,5xy = 1$  d'où  $y = \frac{2}{x}$

$$\text{Ainsi } l(x) = 5 + 3x + \frac{8}{x} + 2\sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}}$$

En utilisant la calculatrice, le tableur ou par lecture graphique on obtient une valeur minimale de longueur de tubes de 18,84 m (valeur arrondie au cm près) pour  $x = 1,53$  m (valeur arrondie au cm près).

**Exercice n°8****Des dés****7 points****Première manche**

L'attaquant a obtenu 5.

Le défenseur doit faire 5 ou 6. La probabilité est :  $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ .

**Deuxième manche**

L'attaquant a obtenu 3 et 5.

Le défenseur doit faire 4, 5 ou 6. La probabilité est :  $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ .

**Troisième manche**

L'attaquant a obtenu 3 et 4.

Le défenseur doit faire un des scores non rayés du tableau suivant :

|   | 1            | 2            | 3            | 4            | 5            | 6  |
|---|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|----|
| 1 | <del>2</del> | <del>3</del> | <del>4</del> | <del>5</del> | <del>6</del> | 7  |
| 2 | <del>3</del> | <del>4</del> | <del>5</del> | <del>6</del> | 7            | 8  |
| 3 | <del>4</del> | <del>5</del> | <del>6</del> | 7            | 8            | 9  |
| 4 | <del>5</del> | <del>6</del> | 7            | 8            | 9            | 10 |
| 5 | <del>6</del> | 7            | 8            | 9            | 10           | 11 |
| 6 | 7            | 8            | 9            | 10           | 11           | 12 |

Et on a :  $P = \frac{21}{36} (> \frac{1}{2})$

## Exercice Informatique-Algorithmique

## L'information secrète se répand

10 points

1.  $4 + (3 \times 4) = 16$ . Le 2 avril 2020, 16 personnes sont au courant.  
 $4 + (3 \times 4) + 3 \times (3 \times 4) = 4 + 12 + 3 \times 12 = 52$ . Le 3 avril 2020, 52 personnes sont au courant.

2.



```
nombre_jour = eval(input("Combien de jours ?"))
nombre_total = 4
nombre_nouveaux = 4
for i in range(nombre_jour-1):
    nombre_nouveaux = 3*nombre_nouveaux
    nombre_total = nombre_total + nombre_nouveaux
print(nombre_total)
```

3. Au vingtième jour, le 20 avril 2020, 6 973 568 800 personnes seront informées.



```
nombre_personnes = eval(input("Combien de personnes ?"))
nombre_nouveaux = 4
nombre_total = 4
jour = 1
```

```
while nombre_total < nombre_personnes:
    jour = jour + 1
    nombre_nouveaux = 3*nombre_nouveaux
    nombre_total = nombre_total + nombre_nouveaux
```

```
print("Au " + str(jour) + "ème jours il y aura " +
      str(nombre_total) + " personnes.")
```

# Rallye mathématique du Centre

## Éléments de correction de l'épreuve officielle 2021

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.  
Les solutions partielles seront examinées.

### Exercice n°1

### Goldbach fait des sommes de premiers

9 points

1.  $6 = 3+3$ ;  $8 = 3+5$ ;  $10 = 3+7 = 5+5$ ;  $12 = 5+7$ .
2. Liste des nombres premiers compris entre 3 et 100 :

3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Décomposition de 100 :  $100 = 3+97 = 11+89 = 17+83 = 29+71 = 41+59 = 47+53$ .

3. Pour avoir toutes les décompositions des nombres pairs compris entre 14 et 100 un bon moyen est d'établir une table d'addition des nombres premiers compris entre 3 et 100. Cela donne ;

$14 = 3+11 = 7+7$ ;  $16 = 3+13 = 5+11$ ;  $18 = 5+13 = 7+11$ ;  $20 = 3+17 = 7+13$ ;  $22 = 3+19 = 11+11$ ;

$24 = 5+19 = 7+17 = 11+13$ ;  $26 = 3+23 = 7+19 = 13+13$ ;  $28 = 5+23 = 11+17$ ;  $30 = 7+23 = 13+17$ ;

$32 = 3+29 = 13+19$ ;  $34 = 3+31 = 11+23 = 17+17$ ;  $36 = 5+31 = 7+29 = 13+23 = 17+19$ ;

$38 = 7+31 = 19+19$ ;  $40 = 3+37 = 11+29 = 17+23$ ;  $42 = 5+37 = 11+31 = 13+29 = 23+23$ ;

$44 = 3+41 = 7+37 = 13+31$ ;  $46 = 3+43 = 5+41 = 17+29 = 23+23$ ;  $48 = 5+43 = 7+41 = 11+37 = 17+31 = 19+29$ ;

$50 = 3+47 = 7+43 = 13+37 = 19+31$ ;  $52 = 5+47 = 11+41 = 23+29$ ;  $54 = 7+47 = 11+43 = 13+41 = 17+37 = 23+31$ ;

$56 = 3+53 = 13+43 = 19+37$ ;  $58 = 5+53 = 11+47 = 17+41 = 29+29$ ;

$60 = 7+53 = 13+47 = 17+43 = 19+41 = 23+37 = 29+31$ ;  $62 = 3+59 = 19+43 = 31+31$ ;

$64 = 3+61 = 5+59 = 11+53 = 17+47 = 23+41$ ;  $66 = 5+61 = 7+59 = 13+53 = 19+47 = 23+43 = 29+37$ ;

$68 = 7+61 = 31+37$ ;  $70 = 3+67 = 11+59 = 17+53 = 23+47 = 29+41$ ;  $72 = 5+67 = 19+53 = 29+43 = 31+41$ ;

$74 = 3+71 = 7+67 = 13+61 = 31+43 = 37+37$ ;  $76 = 3+73 = 5+71 = 17+59 = 23+53 = 29+47$ ;

$78 = 5+73 = 7+71 = 11+67 = 17+61 = 19+59 = 37+41$ ;  $80 = 7+73 = 13+67 = 19+61 = 37+43$ ;

$82 = 3+79 = 11+71 = 23+59 = 29+53 = 41+41$ ;

$84 = 5+79 = 11+73 = 13+71 = 17+67 = 23+61 = 31+53 = 37+47 = 41+43$ ;

$86 = 3+83 = 7+79 = 13+73 = 19+67 = 43+43$ ;  $88 = 5+83 = 17+71 = 29+59 = 41+47$ ;

$90 = 7+83 = 11+79 = 17+73 = 23+67 = 29+61 = 31+59 = 37+53 = 43+47$ ;

$$92 = 3+89 = 13+79 = 31+61; 94 = 5+89 = 11+83 = 23+71 = 41+53 = 47+47;$$

$$96 = 7+89 = 13+83 = 17+79 = 23+73 = 29+67 = 37+59 = 43+53; 98 = 19+79 = 31+67 = 37+61.$$

4. On peut en déduire une conjecture qui, bien que vérifiée par calcul pour un très grand nombre de nombres pairs, n'a pas encore été démontrée comme vraie ou fausse en toute généralité.

Cette conjecture a été avancée pour la première fois par un mathématicien allemand, Christian Goldbach, dans une lettre adressée à Leonhard Euler en 1742 :

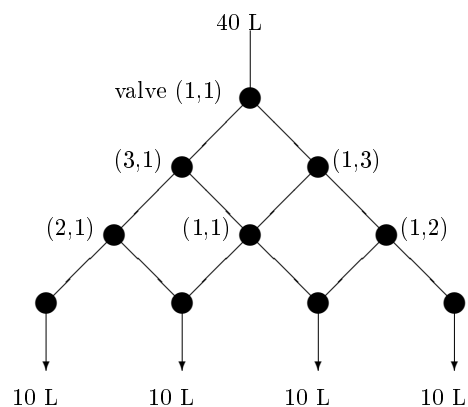
« Tout nombre entier pair strictement plus grand que 2 peut s'écrire comme somme de deux entiers premiers positifs (égaux ou non) ».

## Exercice n°2

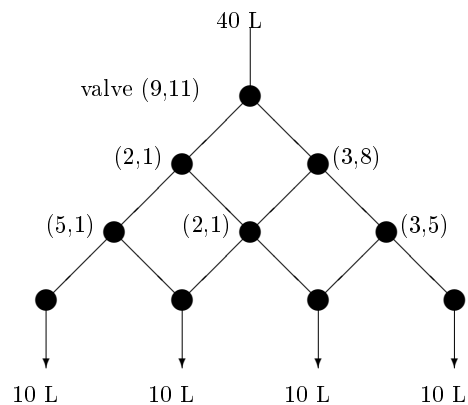
## La valse des valves

8 points

1. (i) 6 litres de chaque côté.  
 (ii)  $\frac{2}{3}$  à gauche et  $\frac{1}{3}$  à droite, soit 8 L et 4 L.  
 (iii)  $\frac{2}{5}$  à gauche et  $\frac{3}{5}$  à droite, soit 4.8 L et 7.2 L.
2. (i) De gauche à droite : 3,125 L ; 14,275 L ; 20,6 L et 2 L.  
 (ii) Il faut qu'il y ait en sortie 10 L sur chaque tuyau. Il y a plein de solutions.  
 Par exemple :



ou encore :



**Exercice n°3****La tour d'Emma Toeux****6 points**

On pose  $n$  le nombre de marches de l'escalier de la tour

- Au premier panneau :  $\frac{3500}{16} = 218,25$  et  $\frac{4200}{16} = 262,5$  donc  $n$  est compris entre 219 et 262 :  $219 < n < 262$ .
- Au second panneau : il reste alors  $\frac{n}{2}$  marches.
- Au troisième panneau : on vient de gravir  $\frac{n}{6}$  marches depuis le panneau précédent. Il reste alors  $\frac{n}{2} - \frac{n}{6} = \frac{n}{3}$  marches.
- Au quatrième panneau : on vient de gravir  $\frac{n}{24}$  marches depuis le panneau précédent.

Comme  $\frac{n}{24}$  est un nombre entier cela signifie que  $n$  est un multiple de 24. Le seul multiple de 24 compris entre 219 et 262 est  $n=240$ .

La hauteur de l'escalier de la tour est donc de  $240 \times 0,16 = 38,4$  m

**Exercice n°4****Les n-diagonales****6 points**

1. En appliquant le théorème de Pythagore, on trouve  $AC = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ .  
En appliquant le théorème de Thalès (ou droite des milieux), on trouve  $AB = \frac{\sqrt{5}}{2}$ .
2. En appliquant de même théorème de Pythagore, on détermine la mesure d'une diagonale d'un 3-rectangle comme  $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ . De même avec le théorème de Thalès, la mesure d'une 3-diagonale est  $\frac{\sqrt{10}}{3}$ .



3. La longueur de la  $n$ -diagonale doit être inférieure à 1,001 cm.

En suivant les explications précédentes, la mesure d'une  $n$ -diagonale est de  $\frac{\sqrt{1+n^2}}{n}$ . On trouve alors  $n=23$ .

**Exercice n°5****Une fourmi sur une pyramide****12 points**

1. (a) 1er trajet : Grâce à des raisons évidentes de symétrie,  
longueur 1er trajet =  $2,24 \text{ cm} + 10 \text{ cm} + 2,24 \text{ cm} = 14,48 \text{ cm}$ .  
Le 1er trajet mesure environ 14,5 cm.
- (b) 2ème trajet :  
Calcul de SP : SHP est un triangle rectangle en H donc d'après le théorème de Pythagore :  
 $SP^2 = SH^2 + HP^2$  donc  $SP^2 = 10^2 + 5^2$  donc  $SP = \sqrt{125} \text{ cm} \approx 11,18 \text{ cm}$ .  
Donc FS  $\approx 11,18 - 2,24 \text{ cm}$  d'où FS  $\approx 8,94 \text{ cm}$  or  $8,94 \times 2 = 17,88$   
Le 2e trajet mesure environ 17,9 cm.
- (c) 3ème trajet :  
D'abord il faut calculer FM. Mais pour cela, il faut calculer AF et AM.  
**Calcul de AF :**  
Le triangle AFP est rectangle en P donc d'après le théorème de Pythagore :  
 $AF^2 = FP^2 + AP^2$  donc  $AF^2 = 2,24^2 + 5^2$  donc  $AF = 5,48 \text{ cm}$

**Calcul de AM :**

Le triangle AFP est rectangle en P donc  $\widehat{FAP} = \frac{FP}{AP} = \frac{2,24}{5}$  donc  $\widehat{FAP} \approx 24^\circ$ .

Le triangle AMB est rectangle en M donc  $\cos \widehat{MAB} = \frac{AM}{AB}$  donc  $\cos 24^\circ = \frac{AM}{10}$   
 ainsi  $AM = 10 \times \cos 24^\circ \approx 9,14$  cm donc  $FM \approx 9,14 - 5,48$  cm soit  $FM \approx 3,66$  cm.

Ensuite, il faut calculer la longueur parcourue sur la face SBC. Pour cela, il faut calculer SB, MB et SM.

**Calcul de SB :**

Le triangle DCB est rectangle en C donc d'après le théorème de Pythagore  $DB = \sqrt{200}$  cm.

Donc comme H est le milieu de [DB],  $HB = \frac{\sqrt{200}}{2}$  cm.

Le triangle SHB est rectangle en H donc d'après le théorème de Pythagore :

$$SB^2 = HS^2 + HB^2 = 10^2 + \left(\frac{\sqrt{200}}{2}\right)^2 = 150 \text{ donc } SB = \sqrt{150} \text{ cm} \approx 12,25 \text{ cm}$$

**Calcul de MB :**

Le triangle AMB est rectangle en M donc  $\sin \widehat{MAB} = \frac{MB}{AB}$  donc  $\sin 24^\circ = \frac{MB}{10}$

Donc  $MB = 10 \text{ cm} \times \sin 24^\circ \approx 4,07$  cm

**Calcul de SM :**

$SM \approx 12,25 - 4,07 \text{ cm} = 8,18$  cm

**Calcul de la longueur MN parcourue sur la face SBC :**

(BM) et (CN) sont sécantes en S et (MN) et (BC) sont parallèles donc d'après le théorème de Thalès :

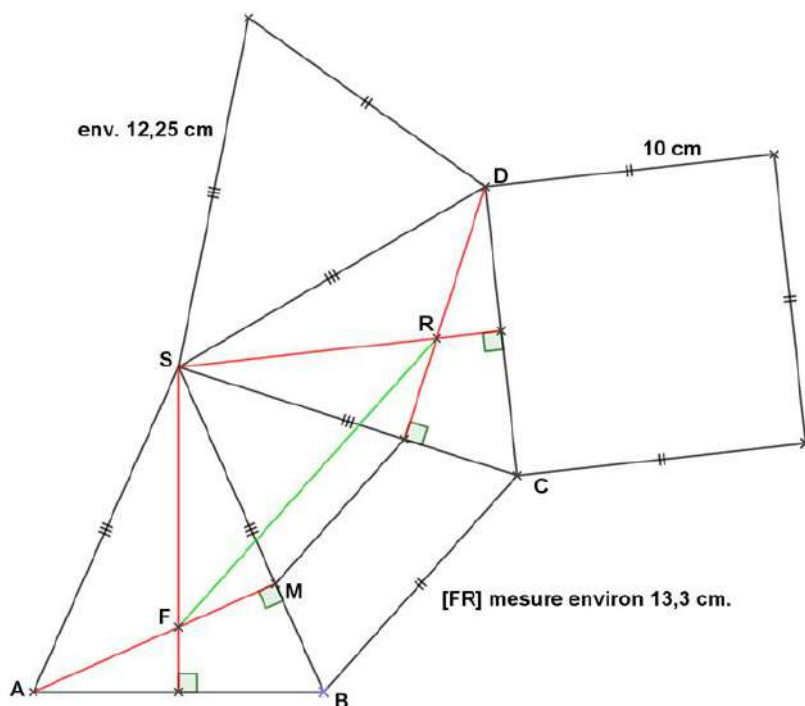
$$\frac{SM}{SB} = \frac{MN}{BC} \text{ donc } \frac{8,18}{12,25} = \frac{MN}{10} \text{ donc } MN \approx 6,68 \text{ cm.}$$

Grâce à des raisons évidentes de symétrie, la longueur 3ème trajet vaut  $3,66 \text{ cm} + 6,68 \text{ cm} + 3,66 \text{ cm} = 14$  cm

Le troisième trajet mesure environ 14 cm.

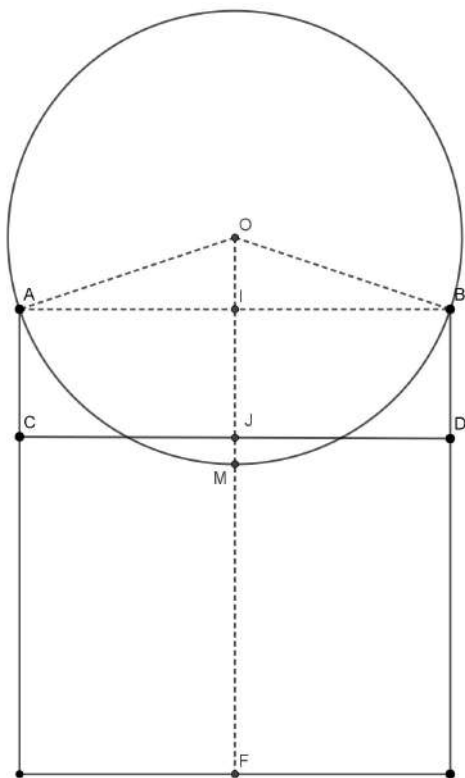
**Donc le chemin le plus court est le 3ème chemin.**

2. Il existe un chemin encore plus court qui mesure environ 13,3 cm. Voir le patron ci-dessous.



**Exercice n°6****La galette fait-elle trempette ?****6 points**

Le rayon du mug étant 3,7 cm, la surface de base du mug est  $\pi \times 3,7^2 = 13,69 \times \pi \text{ cm}^2$ .  
On utilise les notations de la figure ci-dessous.



Comme  $25 \text{ cL} = 250 \text{ cm}^3$ , la hauteur de lait dans le mug est  $FJ = \frac{250}{13,69 \times \pi}$  soit  $FJ \approx 5,81 \text{ cm}$ .

On a :  $OA = OM = 3,9 \text{ cm}$  et  $AI = 3,7 \text{ cm}$ .

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OAI on obtient :

$$OA^2 = OI^2 + IA^2$$

$$OI^2 = OA^2 - IA^2$$

$$OI^2 = 3,9^2 - 3,7^2$$

$$OI = \sqrt{3,9^2 - 3,7^2}$$

$$OI = \sqrt{1,52} \approx 1,23 \text{ cm}$$

et donc  $IM = OM - OI$  soit  $IM = 3,9 - \sqrt{1,52}$

or  $FM = FI - IM$  d'où  $FM = 8 - (3,9 - \sqrt{1,52})$  soit  $FM = 4,1 + \sqrt{1,52} \approx 5,33 \text{ cm}$ .

$FM < FJ$  donc la galette trempe dans le lait de  $FJ - FM$  soit plus de 4,7 mm.

### Exercice n°7

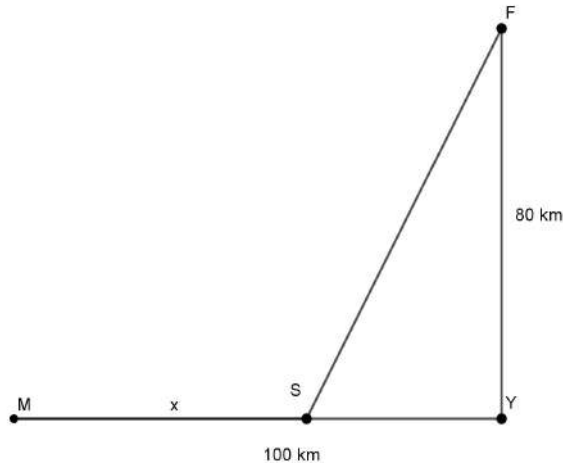
### De Mercalme au fort Thune

6 points

On pose :

M : port de Mercalme, F : le fort Thune, Y : la ville de Yakoto, S : la station à construire. (voir la figure ci dessous)

On a  $MY = 100$  km ,  $FY = 80$  km , et note  $MS = x$  km.



Par le théorème de Pythagore on obtient :

$$SF^2 = 80^2 + (100 - x)^2 \text{ donc } SF = \sqrt{80^2 + (100 - x)^2}$$

Le transport par caravane dans le désert étant trois fois plus cher que par la ligne de chemin de fer , on minimise donc la grandeur  $MS + 3 \times SF$ .

Il suffit d'étudier la fonction  $f$  définie par  $f : [0, 100] \rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto x + 3\sqrt{80^2 + (100 - x)^2}.$$

A l'aide de la calculatrice ou du tableur on trouve un minimum atteint pour  $x = 72$  km à l'unité près.

|    |            |
|----|------------|
| 65 | 326,963738 |
| 66 | 326,775766 |
| 67 | 326,617026 |
| 68 | 326,487911 |
| 69 | 326,388811 |
| 70 | 326,320112 |
| 71 | 326,282197 |
| 72 | 326,275441 |
| 73 | 326,300217 |
| 74 | 326,35689  |
| 75 | 326,445819 |
| 76 | 326,567356 |
| 77 | 326,721845 |
| 78 | 326,909622 |

### Exercice n°8

### Le jackpot au bout du bras

6 points

1. Pour gagner le Jackpot, il faut avoir trois 0, trois 1, ..., trois 9.

De 000 à 999, il y a 1 000 possibilités. Et on gagne dans 10 cas.

La probabilité de gain du Jackpot est donc de  $\frac{10}{1000}$ , soit  $\frac{1}{100}$ .

2. Ensuite pour le droit de rejouer :

deux nombres identiques (et seulement deux nombres) avec les 0, c'est possible si on a : 001, 010 ou 100. Donc trois possibilités. Idem si on mélange avec 2, puis 3, ..., 9. Ce qui fait  $3 \times 9 = 27$  possibilités. On recommence avec les 1, les 2, ..., les 9. Soit 10 fois plus.

Au total, on a ainsi  $27 \times 10 = 270$  possibilités de pouvoir rejouer.

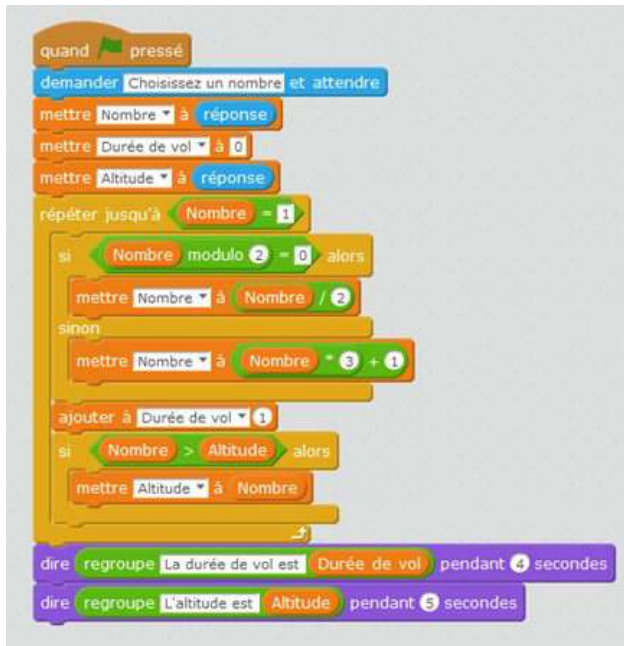
La probabilité est donc :  $\frac{270}{1000} = \frac{27}{100}$ .

## Exercice Informatique-Algorithmique

## Un vol pour Syracuse

12 points

1. (a) **13**; 40; 20; 10; 5; 16; 8; 4; 2; 1; 4; 2; 1;...  
**34**; 17; 52; 26; 13; 40; 20; 10; 5; 16; 8; 4; 2; 1; 4; 2; 1;...  
**42**; 21; 64; 32; 16; 8; 4; 2; 1; 4; 2; 1;...
  - (b) On remarque que pour chacun des 3 nombres l'algorithme boucle indéfiniment sur 4; 2; 1.
2. (a) **18**; 9; 28; 14; 7; 22; 11; 34; 17; 52; 26; 13; 40; 20; 10; 5; 16; 8; 4; 2; 1; 4; 2; 1;...  
 La durée de vol de 18 est bien 20 et son altitude est bien 52.
  - (b)



```

1 nombre = eval(input("Choisissez un nombre entier positif non nul:"))
2 nombre_duree = 0
3 nombre_altitude = nombre
4
5 while nombre != 1:
6     nombre_duree = nombre_duree + 1
7
8     if nombre % 2 == 1:
9         nombre = nombre * 3 + 1
10    else:
11        nombre = nombre / 2
12
13    if nombre > nombre_altitude:
14        nombre_altitude = nombre
15
16 print("L'altitude est", nombre_altitude, "et la durée de vol est",
17       nombre_duree)

```

- (c) Il y a 5 nombres inférieurs à 1 000 dont la durée de vol est strictement supérieure à 150 et dont l'altitude est strictement supérieure à 10 fois le nombre.

| Nombre | Durée de vol | Altitude |
|--------|--------------|----------|
| 703    | 170          | 250 504  |
| 763    | 152          | 9 232    |
| 775    | 152          | 9 232    |
| 871    | 178          | 190 996  |
| 937    | 173          | 250 504  |

# Rallye mathématique du Centre

## Correction de l'épreuve préparatoire décembre 2021

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.  
Les solutions partielles seront examinées.  
Bon courage et rendez-vous le 8 mars pour l'épreuve officielle.

### Exercice n°1

### Gare à la « Catcher car »

6 points

1. A 15 h 30 soit 2 h 30 après le départ des coureurs la voiture a roulé pendant 2h.  
La première heure elle a parcouru 15 km et la deuxième heure elle a parcouru 16 km.  
Donc à 15 h 30 , la voiture a parcouru 31 km.

|                                              | A 14h30                   | A 15h00              | A 15h30                   |
|----------------------------------------------|---------------------------|----------------------|---------------------------|
| 2. distance parcourue par le coureur (en km) | $12,5 \times 1,5 = 18,75$ | $12,5 \times 2 = 25$ | $12,5 \times 2,5 = 31,25$ |
| distance parcourue par la voiture (en km)    | 15                        | $15 + 16/2 = 23$     | $15 + 16 = 31$            |

A 15 h 30 le coureur a encore 250 m d'avance. Donc il a été rattrapé après 15 h 30.  
On appelle  $t$  la durée écoulée entre 15 h 30 et le moment où le coureur est rattrapé.

$$17 \times t = 12,5 \times t + 0,25 \text{ d'où } 4,5 \times t = 0,25$$

$$\text{Ainsi } t = \frac{0,25}{4,5} = \frac{1}{18} h \text{ soit } 200 \text{ secondes.}$$

Le coureur a été rattrapé à 15 h 33 min 20 s.

|                                              | A 16 h 30      | A 17 h 30      | A 18 h 30      |
|----------------------------------------------|----------------|----------------|----------------|
| 3. distance parcourue par la voiture (en km) | $31 + 17 = 48$ | $48 + 20 = 68$ | $68 + 20 = 88$ |

Il reste à trouver la durée mise par la voiture pour parcourir 0,44 km en roulant à 35 km/h.

$$t = \frac{d}{v} = \frac{0,44}{35} = \frac{11}{875} h \text{ soit environ } 45 \text{ s.}$$

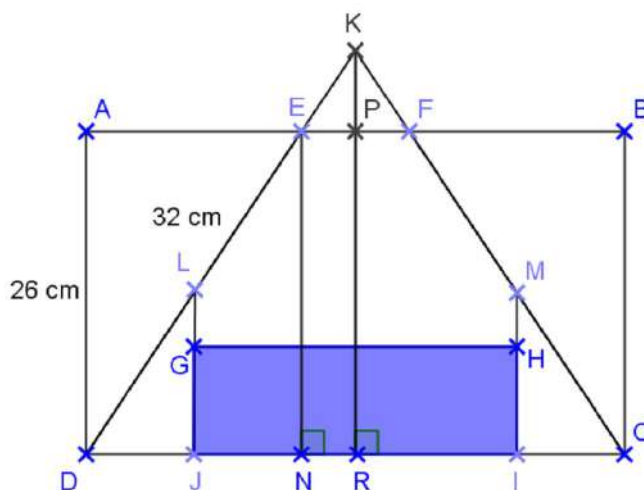
La voiture a rattrapé le coureur à 18 h 30 min 45 s.

### Exercice n°2

### Casier judiciaire

8 points

Il suffit de regarder si le casier rentre par le côté qui mesure 30 cm car s'il ne rentre pas par ce côté, il ne rentrera pas par le côté qui mesure 45 cm.



56 cm

• 1<sup>e</sup> méthode

On calcule JL et on regarde si c'est plus grand ou plus petit que 17 cm ce qui correspond à la hauteur du casier.

On applique le théorème de Thalès dans le triangle DEN avec (LJ) // (EN) et on a  $\frac{LJ}{EN} = \frac{DJ}{DN}$ .

On sait que EN = 26 cm.

On calcule DN en utilisant la relation de Pythagore dans le triangle ADN rectangle en N.

On trouve  $DN = 2\sqrt{87} \text{ cm} \approx 18,7 \text{ cm}$ .

IJ = 30 cm donc  $DJ = \frac{56\text{cm}}{2} - \frac{30\text{cm}}{2} = 13 \text{ cm}$

Donc  $\frac{LJ}{26} = \frac{13}{18,7}$  donc  $LJ \approx 18,1 \text{ cm}$ .

Donc le casier rentre.

• 2<sup>de</sup> méthode

On suppose que LJ mesure 17 cm, on calcule DJ puis on en déduit IJ. Si le segment [IJ] mesure plus de 30cm, le casier rentre.

Dans le triangle DEN rectangle en N :  $\sin \widehat{EDN} = \frac{EN}{DE} = \frac{26}{32}$  donc  $\widehat{EDN} \approx 54^\circ$ .

Dans le triangle rectangle DLJ rectangle en J :  $\tan \widehat{LDJ} = \frac{LJ}{DJ}$  donc  $DJ = \frac{17\text{cm}}{\tan 54} \approx 12,4 \text{ cm}$

Donc  $IJ \approx 56 \text{ cm} - 2 \times 12,4 \text{ cm} = 31,3 \text{ cm}$

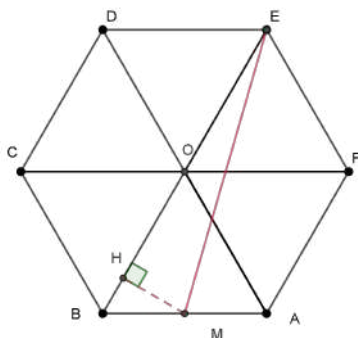
Donc le casier rentre.

**Exercice n°3**

**Un tour manqué**

**8 points**

En partant du sommet E, après avoir longé le parc sur 10 km, je suis au milieu du segment [AB] (ou [CB] suivant le sens de parcours). Le chemin de retour est le segment [ME]. Soit H le pied de la perpendiculaire à (EB) passant M. OBA étant un triangle équilatéral on a  $\widehat{OBM} = 60^\circ$ .



Ainsi BHM est un triangle rectangle en H tel que  $BM = 2$  et  $\widehat{HBM} = 60^\circ$ .

Or  $\cos \widehat{HBM} = \frac{HB}{BM}$

d'où  $\frac{1}{2} = \frac{BH}{2}$  soit  $BH = 1$ .

On en déduit  $EH = EB - BH = 8 - 1 = 7$ .

Il en résulte en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle BHM :

$$BM^2 = BH^2 + HM^2$$

$$HM^2 = 2^2 - 1^2 \text{ soit } HM = \sqrt{3}$$

Puis dans le triangle rectangle EHM :

$$ME^2 = HE^2 + HM^2$$

$$ME^2 = 7^2 + 3 = 52 \text{ soit } ME = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

A un mètre près, il reste donc à parcourir 7211 mètres.

**Exercice n°4****Du rouge au vert****5 points**

Stratégie : on cherche pour avant-dernier coup à obtenir 3 rouges en équerre, le reste étant vert.

1. Le niveau 1 se joue sur un rectangle composé de 4 cases. Par raison de symétrie on peut commencer en a.  
Solutions en 4 coups :  $[a \rightarrow d \rightarrow b \rightarrow c]$   
et aussi  $[a \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow b]$   
Les solutions en 3 coups partant de a échouent toutes. Le minimum de coups est 4.
2. Le niveau 2 se joue sur un rectangle composé de 9 cases.  
Avec la stratégie décrite, on trouve des solutions en 5 coups :  
\* En partant d'un coin :  $[a \rightarrow c \rightarrow e \rightarrow g \rightarrow i]$   
\* En partant du centre :  $[e \rightarrow a \rightarrow c \rightarrow i \rightarrow g]$

**Exercice n°5****Les récalcitrants****8 points**

1. On aboutit très rapidement à un nombre récalcitrant.
2. Les chiffres récalcitrants sont : 0 ; 1 ; 5 ; 6.  
Il y a 48 nombres récalcitrants :  
100-101-105-106-110-111-115-116-150-151-155-156-160-161-165-166-500-501-505-506-510-511-515-516-550-551-555-556-560-561-565-566-600-601-605-606-610-611-615-616-650-651-655-656-660-661-665-666.
3. On raye au fur et à mesure les récalcitrants.  
Etape 0 : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Etape 1 : 0 1 4 9 6 5 6 9 4 1  
Etape 2 :    6 1 6    1 6 1  
Etape 3 :    6 1    1 6  
Si le nombre n'est pas récalcitrant à la fin de l'étape 2 il n'est composé que de chiffres récalcitrants ou de 4 et de 9. On aboutit en 3 étapes au maximum à un nombre récalcitrant.

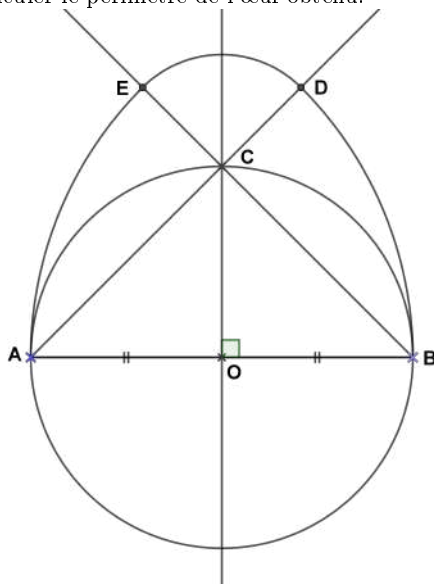
**Exercice n°6****Faites l'œuf !****8 points**

Construire un cercle de diamètre AB (on prendra  $AB = 14$  cm). La médiatrice de [AB] coupe le cercle en deux points, on nomme C un de ces deux points.

Le cercle de centre A et de rayon AB coupe la demi-droite [AC) au point D. Le cercle de centre B et de rayon BA coupe la demi-droite [BC) au point E.

En couleur, tracer les arcs de cercle  $\widehat{AE}$  et  $\widehat{BD}$  de centres respectifs A et B, ainsi que l'arc de cercle  $\widehat{ED}$  de centre C et de rayon CD. Puis, repasser en couleur le demi-cercle de diamètre [AB] ne contenant pas le point C.

Calculer le périmètre de l'œuf obtenu.



**Longueur  $L_1$  du demi-cercle de rayon 7cm :**

Longueur  $L_1$  du demi-cercle de rayon 7cm :

$$L_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times \pi R = \frac{1}{2} \times 2 \times \pi \times 7 \text{ cm} = 7\pi \text{ cm} \approx 21,99 \text{ cm}$$

**Longueur  $L_2$  de l'arc de cercle  $\widehat{AE}$  :**

On appelle O le milieu de [AB].

Le triangle OBC est un triangle isocèle en O. Donc ses angles aigus mesurent  $45^\circ$ . L'angle  $\widehat{ABC}$  mesure  $45^\circ$ .

Donc la longueur de l'arc de cercle  $\widehat{AE}$  est égale à  $\frac{1}{8}$  de la longueur d'un cercle de rayon 14cm.

$$\text{Donc } L_2 = \frac{1}{8} \times 2 \times \pi \times 14 = 3,5\pi \text{ cm} \approx 11 \text{ cm}$$

**Longueur  $L_3$  de l'arc de cercle  $\widehat{BD}$  :**

DE même que pour  $L_2$ , on :  $L_3 = 3,5\pi \text{ cm} \approx 11 \text{ cm}$

**Longueur  $L_4$  de l'arc de cercle  $\widehat{ED}$  :**

Le rayon du cercle de centre C passant par D et E est égale à  $14 - CB$  cm.

Or d'après le théorème de Pythagore dans triangle OCB rectangle en O on a :

$$CB^2 = 7^2 + 7^2 = 98 \text{ donc } CB = \sqrt{98} \text{ cm} \approx 9,90 \text{ cm}$$

Donc le rayon du cercle de centre C passant par D et E est égale à environ  $14 \text{ cm} - 9,9 \text{ cm}$  c'est dire  $4,1 \text{ cm}$ .

L'angle  $\widehat{ECD}$  est égale à l'angle  $\widehat{ACB}$  donc il est égale à  $2 \times 45$  c'est à dire  $90^\circ$ .

Donc la longueur de l'arc  $\widehat{ED}$  est égale au quart de la longueur d'un cercle de rayon  $4,1 \text{ cm}$ .

$$\text{Donc } L_4 = \frac{1}{4} \times 2 \times \pi \times 4,1 \text{ cm} \approx 6,44 \text{ cm}$$

**Périmètre de l'œuf :**

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 21,99 \text{ cm} + 11 \text{ cm} + 11 \text{ cm} + 6,44 \text{ cm} \approx 50,4 \text{ cm}$$

**Périmètre exact de l'œuf :**

$$7\pi + 3,5\pi + 3,5\pi + \frac{1}{4} \times 2 \times \pi \times (14 - \sqrt{98}) = 14\pi + \left(\frac{14 - 7\sqrt{2}}{2}\right)\pi = 7\pi\left(3 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ cm}$$

## Exercice n°7

## A la recherche du blé pas cher !

8 points

Soit  $x$  la "largeur" du terrain et  $y$  sa "longueur".

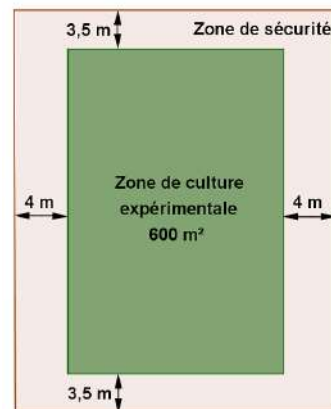
L'aire de la zone de culture étant de  $600 \text{ m}^2$ , on obtient :

$$(x - 8)(y - 7) = 600 \text{ avec } x > 8 \text{ et } y > 7$$

$$\text{d'où } y = 7 + \frac{600}{x - 8}$$

$$\text{Soit } A \text{ l'aire du terrain acheté : } A(x) = xy = x\left(7 + \frac{600}{x - 8}\right) = \frac{7x^2 + 544x}{x - 8}$$

A l'aide d'un tableur, d'une calculatrice, d'un logiciel traceur-grapheur ... on détermine que l'aire  $A$  est minimale lorsque  $x \approx 34,2 \text{ m}$  d'où  $y \approx 29,9 \text{ m}$ .



**Exercice n°8****Argh ! Tu parles...****6 points**

1. Phrase d'un cri : « argh », « irgh » et « orgh »

Phrases de deux cris :

« argh argh », « argh irgh », « argh orgh »

« irgh argh », « irgh irgh », « irgh orgh »

« orgh argh », « orgh orgh », « orgh orgh »

$$3 + 3^2 + 3^3 = 39$$

2.  $4 + 4^2 + 4^3 = 84$

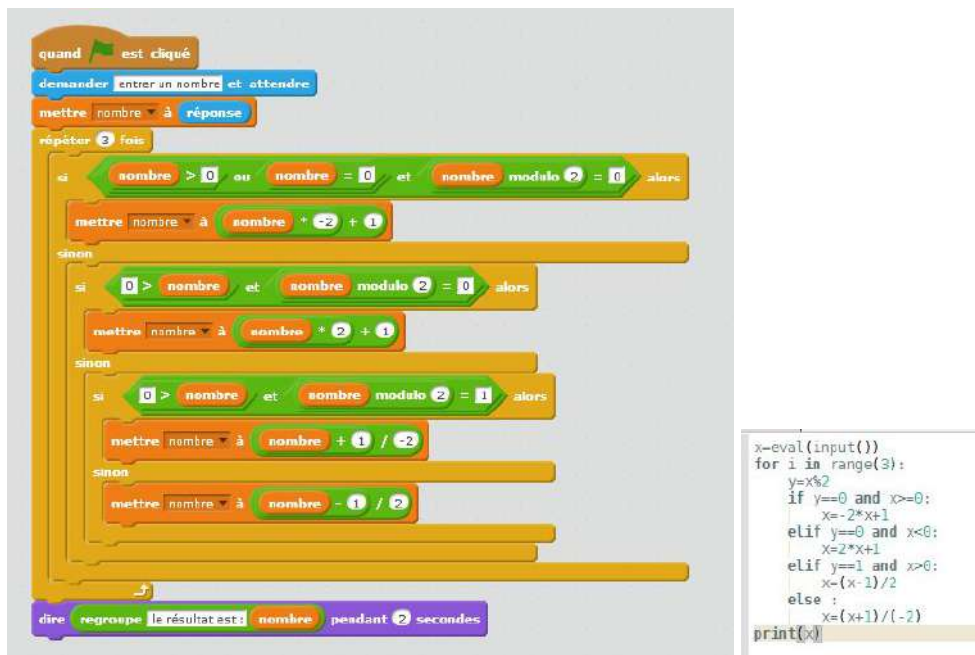
3. Des phrases d'au plus 15 cris suffisent :

|    | A             | B                 |
|----|---------------|-------------------|
| 1  | Taille phrase | Nombre de phrases |
| 2  | 3             | 84                |
| 3  | 4             | 340               |
| 4  | 5             | 1364              |
| 5  | 6             | 5460              |
| 6  | 7             | 21844             |
| 7  | 8             | 87380             |
| 8  | 9             | 349524            |
| 9  | 10            | 1398100           |
| 10 | 11            | 5592404           |
| 11 | 12            | 22369620          |
| 12 | 13            | 89478484          |
| 13 | 14            | 357913940         |
| 14 | 15            | 1431655764        |

12 points

1.
  - $n = 0 \rightarrow n = 1 \rightarrow n = 0 \rightarrow n = 1$
  - $n = -1 \rightarrow n = 0 \rightarrow n = 1 \rightarrow n = 0$
  - $n = 14 \rightarrow n = -27 \rightarrow n = 13 \rightarrow n = 6$
  - $n = -16 \rightarrow n = -31 \rightarrow n = 15 \rightarrow n = 7$
  - $n = 2011 \rightarrow n = 1005 \rightarrow n = 502 \rightarrow n = -1003$

2.



The image shows a Scratch script and its equivalent Python code. The Scratch script starts with a 'when clicked' event, followed by a 'ask for a number and wait' block, then a 'set number to response' block. A 'repeat 3 times' loop contains three conditional blocks. The first block checks if 'number > 0 or number = 0 and number modulo 2 = 0', and if true, sets 'number' to 'number + -2 + 1'. The second block checks if '0 > number and number modulo 2 = 0', and if true, sets 'number' to 'number + 2 + 1'. The third block checks if '0 > number and number modulo 2 = 1', and if true, sets 'number' to 'number + 1 / -2'. After the loop, a 'say regroup le résultat est : number pendant 2 secondes' block is executed. The Python code on the right implements the same logic: it takes an input, loops 3 times, and applies the same transformation rules based on the value of x and its modulo 2.

```

x=eval(input())
for i in range(3):
    y=x%2
    if y==0 and x>=0:
        x=-2*x+1
    elif y==0 and x<0:
        x=2*x+1
    elif y==1 and x>0:
        x=(x-1)/2
    else:
        x=(x+1)/(-2)
print(x)

```

3. Si l'on fait fonctionner ce programme avec un entier pair supérieur ou égal à 2, on obtient la moitié du nombre moins 1.
4. Les nombres qui donnent 2021 comme affichage final sont : 16175, -16175, 4044, -4044, 4045 et -4045.

# Rallye mathématique du Centre

## Éléments de correction de l'épreuve officielle 2022

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.  
Les solutions partielles seront examinées.

### Exercice n°1

### Au bonheur des nombres

8 points

1.  $7 \rightarrow 7^2 = 49 \rightarrow 4^2 + 9^2 = 97 \rightarrow 9^2 + 7^2 = 130 \rightarrow 1^2 + 3^2 + 0^2 = 10 \rightarrow 1^2 + 0^2 = 1$  donc 7 est **heureux**.  
 $23 \rightarrow 13 \rightarrow 10 \rightarrow 1$  donc 23 est **heureux**.  
 $139 \rightarrow 91 \rightarrow 82 \rightarrow 68 \rightarrow 100 \rightarrow 1$  donc 139 est **heureux**.
2.  $4 \rightarrow 16 \rightarrow 37 \rightarrow 58 \rightarrow 89 \rightarrow 145 \rightarrow 42 \rightarrow 20 \rightarrow 4$  donc **non heureux**.  
58 n'est **pas heureux** car 58 est dans la série ci-dessus.  
 $529 \rightarrow 110 \rightarrow 2 \rightarrow 4$  donc **non heureux** comme ci-dessus.  
 $794 \rightarrow 146 \rightarrow 53 \rightarrow 34 \rightarrow 25 \rightarrow 29 \rightarrow 85 \rightarrow 89$  donc **non heureux** aussi.  
 $2022 \rightarrow 12 \rightarrow 5 \rightarrow 25$  donc **non heureux**.
3. Liste des nombres **heureux** inférieurs ou égaux à 100.  
Nous pouvons utiliser un algorithme de crible en procédant de la façon suivante : on remarque que lorsque a et b sont deux chiffres tels que ab soit heureux (resp. non heureux) il en est de même de ba ; de plus, si dans une suite construite selon la procédure il existe un nombre heureux, tous les termes de la suite sont heureux ; il en va de même pour les nombres non heureux.  
On va donc commencer par 1 et mettre à part 1, 10 et 100 qui sont heureux. On les range dans la classe des nombres heureux.  
On part de 2 ensuite pour écrire la suite suivante :  
 $2 \rightarrow 4 \rightarrow 16 \rightarrow 37 \rightarrow 58 \rightarrow 89 \rightarrow 145 \rightarrow 42 \rightarrow 20 \rightarrow 4$   
d'où l'on tire que 2, 4, 16, 20, 24, 37, 42, 58, 61, 73, 85, 89 et 98 ne sont pas heureux. On les range dans cette classe et on les barre.  
On part ensuite du plus petit des nombres non encore étudiés :  $3 \rightarrow 9 \rightarrow 81 \rightarrow 65 \rightarrow 61 \rightarrow 37$  tous non heureux comme 37 et donc 3, 9, 16, 18, 56, 61, 65 et 81 sont classés dans les non heureux.  
On itère le procédé en passant à 5 (car 4 est classé!) :  
 $5 \rightarrow 25 \rightarrow 29 \rightarrow 85$  qui ajoute 5, 25, 29, 52 et 92 aux non heureux.  
Ensuite :  $6 \rightarrow 36 \rightarrow 45 \rightarrow 41 \rightarrow 17 \rightarrow 50 \rightarrow 25$  qui ajoute 6, 14, 17, 36, 41, 45, 50, 54, 63 et 71 aux non heureux.  
On retrouve des nombres heureux avec 7 :  
 $7 \rightarrow 49 \rightarrow 97 \rightarrow 130 \rightarrow 10$  qui classe 7, 49, 79, 94 et 97 dans les nombres heureux.  
On poursuit avec les suites obtenues en prenant pour premiers termes 8, 11, 12, 13, 15, 17, 19, 22, 23, 27, 33, 38, 39, 44, 47, 48, 55, 57, 59, 66, 67, 69, 77, 78, 88 et 99 ce qui permet de couvrir tous les nombres de 1 à 100. Seuls 13, 19, 23 et 44 fournissent des suites de nombres heureux.

Par cette méthode on obtient comme ensemble des nombres **heureux** compris entre 1 et 100 les 20 nombres suivants :

1, 7, 10, 13, 19, 23, 28, 31, 32, 44, 49, 68, 70, 79, 82, 86, 91, 94, 97 et 100.

NB : on peut signaler que l'étude de 1 et celles de 7 et 23 traitées dans la question 1 fournissent en fait 12 des solutions sur 20 ! On peut même y ajouter 70 lié directement à 7 ! Seuls 19 et 44 au départ ajoute des nombres heureux et la méthode de crible permet d'éliminer tous les autres cas. En effet le nombre 1 est heureux (donc 10 et 100 aussi), le nombre 13 est heureux car dans la file de début 23, le nombre 23 a été montré heureux et le nombre 19 est heureux car 91 est dans la file de début 139 qui est heureux...

Seul 44 ne peut être atteint grâce à l'usage de la question n°1...

La méthode de crible permet surtout de s'assurer qu'il n'y a pas d'autres nombres heureux !

**Exercice n°2****Les cartes du chapeau****5 points**

On nomme A, B, C, D, E et F les nombres de points de chacun des 6 amis.

On raisonne sur les cartes possibles pour chacun.

Il vient alors  $A=11$ ,  $B=4$ ,  $C=16$ ,  $D=7$ ,  $E > 11+7$  soit  $E > 18$  donc  $F > 19$ .

La seule possibilité est  $B = 1 + 3$ .

Donc  $D = 1 + 6$  et  $D = 3 + 4$  sont impossibles, il ne reste que  $D = 2 + 5$ .

Donc  $A = 1 + 10$ ,  $A = 2 + 9$ ,  $A = 3 + 8$ ,  $A = 5 + 6$  sont impossibles, il ne reste que  $A = 4 + 7$ .

Donc  $C = 12 + 4$ ,  $C = 11 + 5$ ,  $C = 9 + 7$  sont impossibles, il ne reste que  $C = 10 + 6$ .

Les cartes restantes sont 8, 9, 11 et 12.

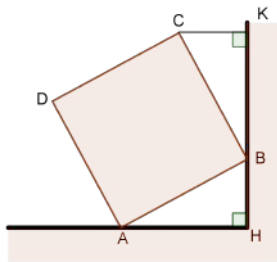
$F = 11 + 12$  implique  $E = 8 + 9 = 17$  est impossible car  $E > 18$ .

$F = 8 + 9$  et  $F = 8 + 11$  sont impossibles car  $F > 19$ .

$F = 8 + 12 = 20$  implique  $E = 9 + 11 = 20$  est impossible car  $F > E$ .

$F = 9 + 11 = 20$  implique  $E = 8 + 12 = 20$  est impossible car  $F > E$ .

Il ne reste donc que  $F = 9 + 12$  qui implique  $E = 8 + 11$ .

**Exercice n°3****Les cubes du musée****8 points**

On note K le projeté de C sur (BH) et  $\alpha = \widehat{BAH}$

Il vient alors  $\widehat{HBA} = 90 - \alpha$ . D'où  $\widehat{KBC} = 90 - \widehat{HBA} = \alpha$  et  $\widehat{BCK} = 90 - \alpha$

Les triangles  $ABC$  et  $BCK$  sont donc semblables.

Or  $AB = BC = 5$  donc  $ABC$  et  $BCK$  sont des triangles égaux (isométriques).

On a ainsi  $AH = BK$  et  $BH = CK$ .

La **hauteur** à laquelle culmine chaque cube est donc  $HK = HB + BK$  soit  $BH + AH$ .

**cube 1 :**

Ici  $AH = 4$ , en utilisant le théorème de Pythagore on trouve  $BH = 3$  m. La hauteur du *cube 1* est  $AH + BH = 7$  m.

**cube 2 :**

De la même façon, on trouve  $AH = 4$  m. La hauteur du *cube 2* est  $AH + BH = 7$  m.

**cube 3 :**

$\widehat{BAH} = 40^\circ$  d'où  $AH = 5 \times \cos 40^\circ$  et  $BH = 5 \times \sin 40^\circ$ .

Ainsi la hauteur du *cube 3* est  $BH + AH = 5(\cos 40^\circ + \sin 40^\circ) \approx 7,04$  m.

**cube le plus haut :**

Il faut maximiser  $BH + AH = 5(\cos \alpha + \sin \alpha)$ , ce qui est réalisé pour  $\alpha = 45^\circ$ .

Ainsi la hauteur maximale est  $BH + AH = 5(\cos 45^\circ + \sin 45^\circ) = 5 \times \sqrt{2} \approx 7,07$  m.

*solution géométrique pour le maximum de hauteur : montrons que c'est AC.*

On note J la projection orthogonale de C sur la droite (AH).

On a  $CJ = HK$  donc on cherche à maximiser CJ. Or dans le cas où J est distinct de A, le triangle AJC est rectangle en J et le théorème de Pythagore permet d'affirmer que  $CJ < AC$ .

Ainsi AC est un majorant de tous les CJ. Ce majorant est atteint lorsque J est en A car alors  $CA = CJ$  : ceci correspond à la situation du cube lorsqu'il est appuyé en B et que l'angle  $\widehat{BAH}$  vaut  $45^\circ$ . C'est donc le maximum.

**Exercice n°4****Duel dans l'octogone****8 points**

1. Du carré à l'octogone.

Pour chaque pièce on calcule les temps mis pour l'entrée, les déplacements de sommet à sommet puis les tirs :

Salle carrée : 5s;  $4 \times 4 = 16$ s;  $4 \times 3 \times 3 = 36$ s - total : 57s

Salle pentagone régulier : 5s;  $5 \times 4 = 20$ s;  $5 \times 4 \times 3 = 60$ s total : 85s

Salle hexagone régulier : 5s;  $6 \times 4 = 24$ s;  $6 \times 5 \times 3 = 90$ s total : 119s

A la fin de la salle hexagonale Arthur aura mis 261s, soit **4 min 21s**. Meddhi a raison.

2. Passage par les salles heptagonale et octogonale.

Salle heptagone régulier : 5s;  $7 \times 4 = 28$ s;  $7 \times 6 \times 3 = 126$ s total : 159s

Salle octogone régulier : 5s;  $8 \times 4 = 32$ s;  $8 \times 7 \times 3 = 168$ s total : 205s

Pour atteindre et achever la mission de la salle octogonale il faut au minimum **625s** soit **10 min 15s**.

**Exercice n°5****Myrtille et son sorbet de mûres****8 points**

1. Avec les 110 g de purée de mûres, les 50 g de sucre et les 40 g d'eau, on obtient 200 g de sorbet.

Pour en avoir 1000 g (1 kg), il faut multiplier par 5.

Il faut donc **550 g** de purée, **250 g** de sucre et **200 g** d'eau.

Pour obtenir 550 g de purée, qui représentent donc 70% de la masse de mûres,

il faut :  $\frac{550 \times 100}{70} = 786$  **g de mûres** au gramme près.

2. Volume de sorbet dans la boîte :

partie parallélépipédique :  $11 \times 7.5 \times 6 = 495$   $cm^3$ ;

partie cylindrique (deux demi-cylindres) :  $\frac{\pi \times 11^2}{4} \times 6 \approx 570,2$   $cm^3$ .

Soit un volume de sorbet d'environ 1065,2  $cm^3$ .

Volume d'une boule de sorbet :  $\frac{4}{3} \times \pi \times (\frac{5}{2})^3 \approx 65,45$   $cm^3$ .

On peut alors réaliser **16 boules** de sorbet car  $16 \times 65,45 = 1047,2$  alors que  $17 \times 65 = 1105$ .

**Exercice n°6****A la recherche du code perdu****10 points**

- 6 possibilités avec le **premier indice** : 47, 74, 48, 84, 78 ou 87.  
 4 possibilités avec le **deuxième indice** : 2, 3, 5 ou 7  
 3 possibilités avec le **troisième indice** : 1, 3 ou 9  
 3 possibilités avec le **quatrième indice** : 29, 41, 47  
 Mais la somme de tous les chiffres est égale à 20.

Donc c'est soit **473141**, soit **743141**, soit **482141**, soit **842141**.

Il y a **4 codes possibles** donc la probabilité est de  $\frac{3}{4}$ .

- La somme de toutes les lignes, de toutes les colonnes et des deux diagonales est égale à 18.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 5 | 2 | 8 | 3 |
| 9 | 2 | 6 | 1 |
| 1 | 6 | 4 | 7 |
| 3 | 8 | 0 | 7 |

Le code est donc 821673.

*Solution experte (en considérant que les chiffres sont compris entre 0 et 9 et qu'ils ne sont pas forcément tous différents) :*

On doit chercher 6 chiffres a, b, c, d, e et f compris entre 0 et 9 et disposés comme suit :

-1e ligne : 5 2 a 3

-2e ligne : 9 b 6 1

-3e ligne : c d 4 e

-4e ligne : f 8 0 7

Comme ce carré doit être magique on doit avoir égalité entre 10 nombres :

$$a + 10 = b + 16 = c + d + e + 4 = f + 15 = c + f + 14 = b + d + 10 = a + 10 = e + 11 = d + f + 9 = b + 16$$

De  $f + 15 = c + f + 14$  on tire  $c = 1$ . De  $f + 15 = d + f + 9$  on tire  $d = 6$ .

Reste les égalités suivantes :  $a + 10 = b + 16 = e + 11 = f + 15$ .

On choisit b comme paramètre d'où  $a = b + 6$ ;  $f = b + 1$ ;  $e = b + 5$ . Comme a est compris entre 0 et 8 les valeurs que peut prendre b sont 0, 1 ou 2.

Ceci fournit 3 solutions pour (a, b, c, d, e, f) à savoir :

( 6 , 0 , 1 , 6 , 5 , 1 ) , ( 7 , 1 , 1 , 6 , 6 , 2 ) et ( 8 , 2 , 1 , 6 , 7 , 3 )

Mais comme les chiffres sont tous différents le code cherché est ( 8 , 2 , 1 , 6 , 7 , 3 ).

### Exercice n°7

### Les mille et une glaces

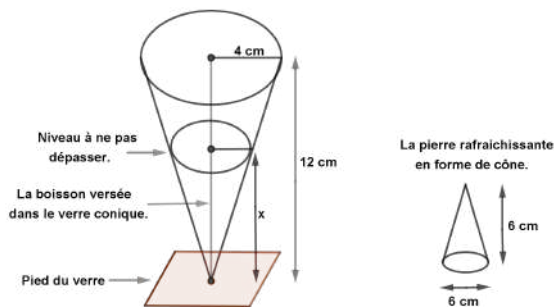
8 points

- Pierre : il dit  $15 \times 2$  ; il inclut dans ses choix deux boules de même parfum. Ce n'est pas ce que l'on demande.  
Anaïs : elle dit  $15 \times 15$  ; il peut y avoir deux boules de même parfum, plus le fait que l'on peut avoir "fraise - vanille" et "vanille - fraise".  
Nora :  $15 \times 14$  ; on se rapproche, mais même problème pour les doublets d'Anaïs.  
Bonne réponse de la marchande :  $\frac{15 \times 14}{2} = 105$  possibilités.
- Avec trois boules, Adam a  $\frac{15 \times 14 \times 13}{1 \times 2 \times 3} = 455$  possibilités de choix différents.
- Possibilités de glaces à 4 boules :  $\frac{15 \times 14 \times 13 \times 12}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 1365$ .  
Rien qu'avec les glaces à 4 boules, on est au dessus des 1000 possibilités glaces. La marchande pourra appeler sa boutique « Les mille et une glaces... et quelques unes en plus » sans aucun problème.

### Exercice n°8

### Un verre bien frais

8 points



Le volume du Verre est :  $V_{verre} = \frac{1}{3}\pi \times 4^2 \times 12 = 64\pi \text{ cm}^3$ .

Le volume de la pierre est :  $V_{pierre} = \frac{1}{3}\pi \times 6^2 \times 6 = 72\pi \text{ cm}^3$ .

Le volume de liquide maximum à ne pas dépasser est :  $V_{max} = V_{verre} - V_{pierre} = 64\pi - 72\pi = -8\pi \text{ cm}^3$ .

On nomme  $r$  le rayon du cercle à graver, en utilisant le théorème de Thalès, il vient :  $\frac{x}{12} = \frac{r}{4}$  d'où  $r = \frac{x}{3}$ .

Le volume de liquide maximum à ne pas dépasser est :  $V_{max} = \frac{1}{3}\pi \times r^2 \times x$ .

Soit  $V_{max} = \frac{1}{3}\pi \times \left(\frac{x}{3}\right)^2 \times x$  d'où  $V_{max} = \frac{\pi}{27}x^3$ .

Il faut donc résoudre l'équation :  $46\pi = \frac{\pi}{27}x^3$  soit  $x^3 = 1242$ .

A l'aide d'un tableau de valeurs sur la calculatrice, on trouve  $x = 10,7$  arrondi au dixième près.

Ou en remarquant que  $10,7^3 = 1225,043$  et  $10,8^3 = 1259,712$  on constate alors  $1225,043 < 1242 < 1259,712$ .

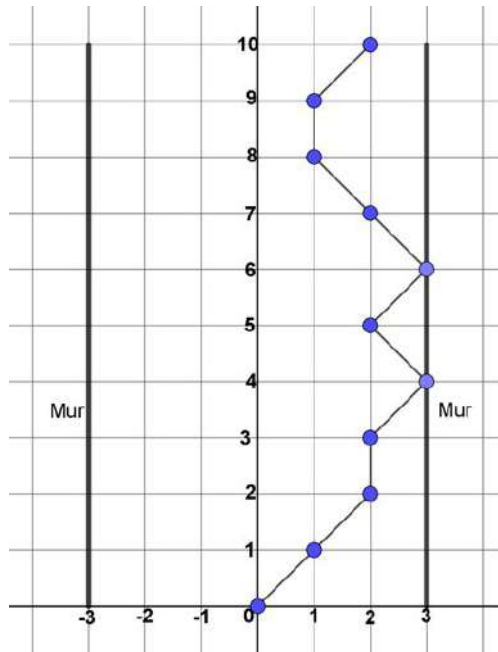
Le verre devra être gravé à la hauteur de **10,7 cm** au mm près.

## Exercice Informatique-Algorithmique

## La balle errante

12 points

1. (a) Pour avoir le nombre de points maximum, il ne faut jamais toucher le mur.  
Nombre de points maximum :  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$
- (b) Il y a plusieurs parcours possibles. Dans tous les cas la balle doit toucher le mur à l'étape 4 et à l'étape 6.  
Voici un exemple de parcours possible.



- (c) Nombre de points minimum :  $1 + 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10 = -1$
2. Voici un exemple de programme possible.



```

1 from random import*
2 x=0
3 y=0
4 score=0
5 for y in range(1,11):
6
7     if x== -3:
8         x=-2
9         score=score+y
10
11     elif x==3:
12         x=2
13         score=score+y
14
15     else:
16         x=x+randint(-1,1)
17         if x==3 or x== -3:
18             score=score-y
19         else:
20             score=score+y
21     print("Etape: ",y)
22     print("Les coordonnées de la balle sont :
23           (",x,";",y,")")
24     print("Le score à l'étape ",y," est",score, ".")
25 print("-----")
26 print("Le score finale est",score, ".")

```