

RALLYE MATHÉMATIQUE DU CENTRE - MATHABRAZZA

Épreuve préparatoire - Décembre 2024

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.
Les solutions partielles seront examinées. Bon courage et rendez-vous pour l'épreuve officielle.

Exercice n°1

Attaque fréquentielle

7 points

Les savants arabes sont les inventeurs de la cryptanalyse. C'est une méthode permettant de décrypter les messages codés. Les lettres du texte à coder sont remplacées par d'autres lettres de la façon suivante :

- deux lettres différentes sont codées de façons différentes ;
- la même lettre est toujours codée de la même façon.

Le premier traité exposant une procédure pour décrypter un texte codé de cette façon a été écrit par Al Kindi au IX^e siècle après J.C. Sa théorie repose sur le fait que dans un texte, les lettres ont des fréquences différentes. Par exemple, en français, la fréquence de la lettre E est, selon le texte, presque toujours supérieure aux fréquences des autres lettres. Selon sa théorie, il y a donc de fortes chances pour que, dans un texte codé, la lettre qui apparaît le plus fréquemment représente un E. Les lettres les moins fréquentes représentent probablement un W, un K ou un X...

Le tableau ci-dessous exprime, en pourcentages, les fréquences moyennes, arrondies au dixième, des lettres utilisées dans des textes écrits en français.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
9,4	1,0	2,4	3,4	16,0	1,0	1,0	0,8	8,4	0,9	0,0	5,3	3,2	7,2	5,1	2,9	1,1	6,5	7,9	7,3	6,2	2,2	0,0	0,3	0,2	0,3

Dans le message codé ci-après, Morgan a trouvé que la lettre A code la lettre C. Poursuivez son travail et décidez le message.

BKSMAMZCZMTFY, KF OKATOCFZ ZHKY
CYZIAMKIYKUKFZ AK UKYYCLK ATOK, RTIY CRKP
BHCFADM IF XCY OKAMYMB RKHY SC RMAZTMHK
BMFCSK OCFY AK HCSSWK UCZDKUCZMGIK OI AKFZHK.

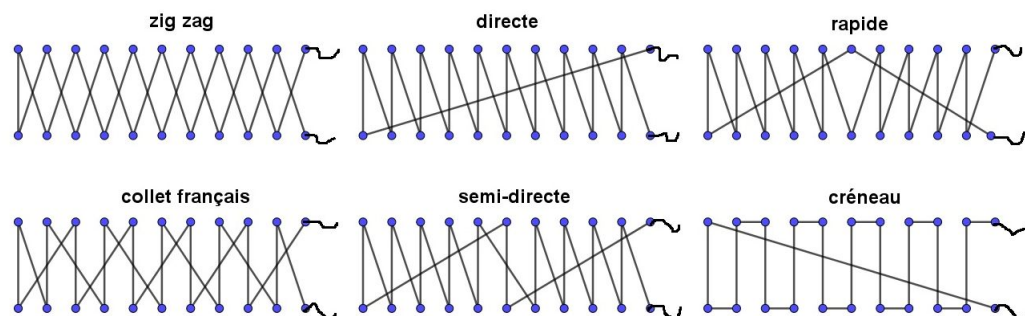
Exercice n°2

On ne peut pas tout faire !

12 points

Maud connaît les six façons ci-dessous de lacer ses « Doc ». Les deux rangées parallèles de onze trous sont distantes de 3 cm et sur chaque rangée les trous sont régulièrement espacés de 1 cm.

Quels sont, parmi ceux-ci, les types de laçage que Maud peut utiliser, sachant que ses lacets mesurent un mètre de long et qu'elle a besoin d'au moins 30 cm pour faire les boucles ?



Exercice n°3

Nombres harshad

8 points

Un nombre harshad est un nombre entier strictement positif qui est divisible par la somme de ses chiffres. Par exemple 7, 54, 110, 2024 sont des nombres harshad.

1. Quel est le plus petit nombre qui n'est pas harshad ?

- Donner la liste de tous les nombres harshad inférieurs à 200.
- Donner un nombre harshad s'écrivant avec 33 chiffres.
- Donner un nombre harshad s'écrivant avec 24 chiffres et se terminant par 2.
- Existe-t-il un nombre harshad premier strictement supérieur à 7 ?

Exercice n°4

La tour infernale de MathCraft

10 points

MathCraft est un jeu de construction qui plonge le joueur dans un univers composé de briques cubiques qui permettent de construire des bâtiments de toutes dimensions.

Mattéo est passionné par ce jeu, il souhaite bâtir une tour de la façon suivante :

- elle est constituée d'un empilement de structures cubiques constituées à l'aide des briques ;
- chaque structure cubique est centrée sur celle du dessous et réduite d'une brique dans chaque direction ;
- la tour se termine par un cube constitué d'une seule brique.



Sur la figure ci-contre la tour est constituée de trois structures cubiques et sa hauteur totale est de 9 briques.

- Quelle est la hauteur d'une tour composée de 4 structures cubiques ?
- Dans ce jeu, la hauteur maximale d'une construction est de 191 briques. De combien de structures cubiques est constituée la plus haute tour possible ?
- Mattéo est capable de mettre en place, en moyenne, 13 briques toutes les 4 secondes. Combien lui faudra-t-il de temps pour construire la tour la plus haute possible ?
- Mattéo veut maintenant construire deux tours absolument identiques. Il dispose pour cela de 83 000 briques au maximum. Il veut encore qu'elles soient les plus hautes possibles. Quelle sera leur hauteur une fois réalisées et combien lui restera-t-il de briques inutilisées à la fin ?

Exercice n°5

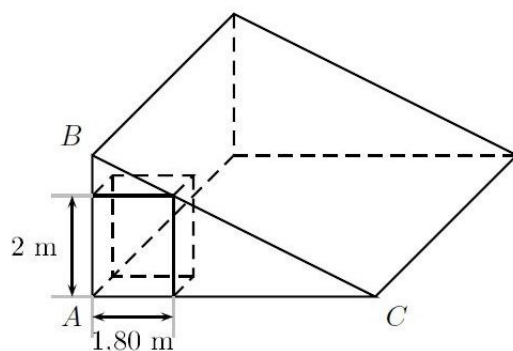
Meuble sous toit

5 points

Une chambre mansardée a la forme d'un prisme droit, de base un triangle ABC rectangle en A tel que $AB=2,50$ m (figure ci-contre).

On y met contre le mur ABC une armoire de 2 m de hauteur et de 1,80 m de large et elle y tient tout juste. L'armoire est donc au contact du mur $[AB]$ et du plafond $[BC]$.

Le locataire pourra-t-il mettre à la place une bibliothèque de 1,80 m de hauteur et de 2,50 m de large dont le fond doit être plaqué contre le mur ABC ?



Exercice n°6

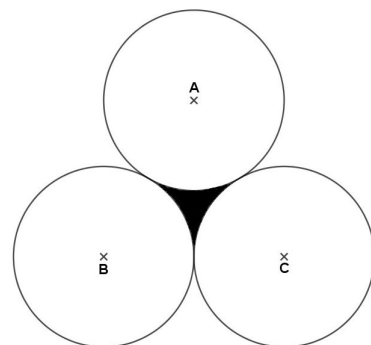
L'aire intérieure

10 points

On considère la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeur, sur laquelle sont représentés trois cercles de centres respectifs A , B et C et de même rayon 3 cm.

On sait que les trois points A , B et C sont situés à 6 cm les uns des autres.

Déterminer, en cm^2 , l'aire de la surface coloriée en noir.



Exercice n°7

De Mercalme au fort Thune

8 points

À partir du port de Mercalme, on doit ravitailler le fort Thune dans le désert. Une ligne de chemin de fer rectiligne de 100 km de long relie Mercalme à la ville de Yakoto. Le fort est situé à 80 km de Yakoto perpendiculairement à la ligne de chemin de fer.

Le transport par caravane dans le désert coûte 3 thalyps (monnaie locale) par kilomètre alors que le transport par train ne coûte que 1 thalpy par kilomètre. Pour réduire les frais de transport, on souhaite donc construire une station sur la ligne de chemin de fer entre Yakoto et Mercalme. Le ravitaillement du fort se fera en train de Mercalme jusqu'à cette station puis en ligne droite par caravane à travers le désert jusqu'au fort.

Estimer, au kilomètre près, à quelle distance de Mercalme on doit construire la station pour que le coût de transport soit le plus petit possible.