

MATHABRAZZA

Rallye mathématique du Centre et du Congo

Épreuve officielle - Avril 2025

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.
Les solutions partielles seront examinées.

Exercice n°1

Vous trouverez τ ou tard !

10 points

Le tableau ci-dessous a pour but de répertorier le nombre de diviseurs des nombres entiers positifs.

Les nombres entiers de 1 à 9 sont déjà placés dans la deuxième ligne du tableau.

Nombre de diviseurs de n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Nombre(s) n	1	2 3 5 7	4 9	6 8											

Le nombre 1 a un seul diviseur : 1.
Le nombre 5 a deux diviseurs : 1 et 5.
Le nombre 9 a trois diviseurs : 1, 3 et 9.

- Recopier le tableau et le compléter avec tous les nombres entiers de 10 à 100.
- Comment appelle-t-on les nombres de la case grisée ? Expliquer.
- Un nombre τ (se lit « tau ») est un nombre divisible par le nombre de ses diviseurs.
Par exemple : 9 est un nombre τ car il a 3 diviseurs et il est divisible par 3, alors que 6 n'est pas un nombre τ car il a 4 diviseurs mais 6 n'est pas divisible par 4.
Trouver tous les nombres τ inférieurs ou égaux à 100.
- 2025 est-il un nombre τ ? Expliquer.

Exercice n°2

Le codage ADFGVX

9 points

Cette technique de cryptage a été utilisée par l'armée allemande au printemps 1918. Le lieutenant Painvin parvint à déchiffrer un message allemand utilisant ce codage. On construit une grille secrète de chiffage de 36 cases avec les 26 lettres et 10 chiffres possibles, dans laquelle chaque caractère est codé par deux lettres : celle de sa ligne puis celle de sa colonne.

	A	D	F	G	V	X
A	3	0	Q	H	X	K
D	9	N	Z	G	R	V
F	M	Y	J	W	F	O
G	C	L	T	5	B	4
V	I	7	A	2	8	S
X	P	E	U	1	6	D

Par exemple 3 est codé par AA, L par GD, X par AV etc. Ensuite chaque caractère du message est codé comme ci-dessous :

Message initial	B	L	A	I	S	E	P	A	S	C	A	L
Lettres codées	GV	GD	VF	VA	VX	XD	XA	VF	VX	GA	VF	GD

Puis, on crée une grille 1 où l'on place en tête un mot-clé choisi (ici FRANCE) puis les caractères codés.

Grille 1					
F	R	A	N	C	E
G	V	G	D	V	F
V	A	V	X	X	D
X	A	V	F	V	X
G	A	V	F	G	D

Ensuite, on crée une grille 2 en ordonnant la grille 1 selon l'ordre alphabétique des lettres du mot-clé.

Grille 2					
A	C	E	F	N	R
G	V	F	G	D	V
V	X	D	V	X	A
V	V	X	X	F	A
V	G	D	G	F	A

Enfin, il ne reste plus qu'à lire les lettres de haut en bas et de gauche à droite pour obtenir le message codé.

Le message chiffré obtenu est GVVVVXVGFDXDGXGDXFFVAAA

- À l'aide d'une autre grille de chiffage, donnée ci-contre, et du mot-clé : MATHS, coder le message suivant : OBJECTIF PREMIER.
- Avec la grille et le mot-clé de la question précédente, déchiffrer le message suivant :
VX AX DA XV FV VA FV FF DV AF VA FF XD FA XF AX AV GV FF DF
- En gardant la même grille mais, avec un mot-clé inconnu de 3 lettres, déchiffrer le message : VD FG DD VX DF VD VG VA FF AA GX FV AA DD FG

	A	D	F	G	V	X
A	C	1	O	F	W	J
D	Y	M	T	5	B	4
F	I	7	A	2	8	S
G	P	3	0	Q	H	X
V	K	E	U	L	6	D
X	V	R	G	Z	N	9

Exercice n°3**En somme, c'est un produit !****9 points**

On peut décomposer de différentes façons un entier positif en une somme de nombres entiers positifs.

Par exemple : $17=10+4+3$ on multiplie entre eux chaque terme de la somme, ce qui donne : $10 \times 4 \times 3 = 120$
 $17=8+5+2+2$ $8 \times 5 \times 2 \times 2 = 160$.

Le but est de trouver pour un nombre donné une décomposition en une somme de termes dont le produit sera le plus grand possible.

1. Trouver une décomposition qui donne le plus grand produit pour 12 ; 11 et 10.
2. C'est le 40^e anniversaire du Rallye, trouver une décomposition qui donne le plus grand produit pour 40.

Exercice n°4**Deux cercles pour une enseigne****12 points**

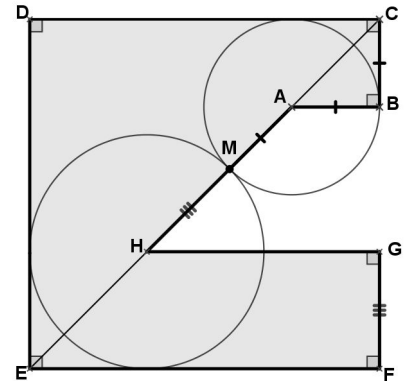
Une enseigne est réalisée avec les indications de la figure ci-contre.

Les cercles ont pour rayons respectifs 3 m et 4 m, ils ont un point commun M.

Les points C, B, G et F sont alignés ainsi que les points C, A, M, H, et E.

Un ruban lumineux est installé sur le contour, ABCDEFGHA, de l'enseigne.

Quelle est sa longueur ? Quelle est l'aire de l'enseigne ?

**Exercice n°5****Switch the lights on****4 points**

On dispose de 9 ampoules éteintes numérotées de 1 à 9 et de sept interrupteurs de A à G.

L'interrupteur A allume les ampoules 1 ; 3 ; 6 si elles sont éteintes et les éteint si elles sont allumées.

L'interrupteur B fait de même avec les ampoules 1 ; 2 ; 4 ; 8, l'interrupteur C avec les ampoules 1 ; 3 ; 4 ; 5,

l'interrupteur D avec l'ampoule 8, l'interrupteur E avec les ampoules 3 ; 4 ; 7 ; 9,

l'interrupteur F avec les ampoules 5 ; 7 et 9, et l'interrupteur G avec les ampoules 2 et 7.

Est-il possible d'allumer toutes les ampoules en même temps ? Si oui, comment ?

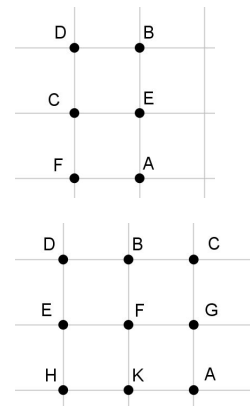
Exercice n°6**Jetez-vous à l'eau !****10 points**

Une compétition de natation longue distance est organisée sur un plan d'eau avec deux formules : S et L.

Les nageurs devront partir de la bouée D (Départ) et se rendre à la bouée A (Arrivée).

Considérant que les nageurs nagent en ligne droite entre les bouées, les organisateurs souhaitent trouver le parcours le plus long possible passant une seule fois par toutes les bouées et sans croisement.

1. (a) Dans la formule S, ce sont 6 bouées disposées comme indiqué ci-contre sur un quadrillage carré de 100 mètres de côté.
 Laetitia propose le parcours DBCEFA et Philippe DCFBEA ; lequel est le plus long ?
 (b) Cécile prétend en avoir trouvé un autre plus long ; quel peut être son chemin ?
2. Dans la formule L, ce sont 9 bouées disposées comme indiqué ci-contre.
 Quelle est la longueur du plus long parcours ?



Exercice n°7

Le ² magique d'ln

9 points

On dit qu'un carré est magique si les sommes des nombres de chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale sont égales.

Hélène propose de réaliser un carré magique à partir d'une date donnée, de la manière suivante :

- dans les cases grisées, A est le nombre correspondant au numéro du jour, B le nombre correspondant au numéro du mois, C les deux premiers chiffres de l'année et D les deux derniers chiffres de l'année,
- pour remplir les autres cases, il faut alors choisir x, y et z, trois nombres entiers positifs distincts, et calculer les valeurs de chaque case comme indiqué dans la grille.

$C+x$	$B-x-z$	$A-y+z$	$D+y$
$D+z$	A	B	$C-z$
$B+y-x-z$	C	D	$A-y+x+z$
$A-y$	$D+x+z$	$C+y-z$	$B-x$

1. Dans l'exemple ci-contre, la date choisie est le 25 décembre 2024. Vérifier que ce carré est magique et qu'il a été construit suivant la méthode d'Hélène avec : A = 25, B = 12, C = 20, D = 24, x = 2, y = 4 et z = 6.
2. La technique proposée par Hélène réalise-t-elle toujours un carré magique?
3. Nous sommes aujourd'hui le 13 mars 2025.
Construire un carré magique en choisissant x, y et z de tel sorte que les nombres obtenus dans le carré magique soient des entiers positifs et qu'ils soient tous différents.

22	4	27	28
30	25	12	14
8	20	24	29
21	32	18	10