

MATHABRAZZA

Rallye mathématique du Centre et du Congo Éléments de correction de l'épreuve officielle 2025

Exercice n°1

Vous trouverez τ ou tard !

10 points

1. Voir tableau ci-dessous :

Nombre de diviseurs de n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Nombre(s) n	1	2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97	4 9 25 49	6 8 10 14 15 21 22 26 27 33 34 35 38 39 46 51 55 57 58 62 65 69 74 77 82 85 86 87 91 93 94 95	16 81	12 18 20 28 32 44 45 50 52 63 68 75 76 92 98 99	64	24 30 40 42 54 56 66 70 78 88	36 100	48 80		60 72 84 90 96			

- Ce sont des nombres premiers car ils ont exactement deux diviseurs : 1 et eux mêmes.
- Il y a 16 nombres τ inférieurs ou égaux à 100 : 1, 2, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 40, 56, 60, 72, 80, 84, 88, 96.
- Les diviseurs de 2025 sont 1, 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, 75, 81, 135, 225, 405, 675, et 2025. 2025 a donc 15 diviseurs or 15 est un diviseur de 2025 donc 2025 est un nombre τ .

Exercice n°2

Le codage ADFGVX

9 points

- Le message une fois codé est FV FG DV VA AX DX AX DG VA AA AD FD DD FA DD
- Le message suivant : VX AX DA XV FV VA FV FF DV AF VA FF XD FA XF AX AV GV FF DF une fois déchiffré est : BONNE CHANCE A VOUS TOUS
- On a la même grille mais, avec un mot-clé inconnu de 3 lettres, il n'y a que 6 combinaisons possibles pour ranger les colonnes lors de la création de la grille 2.
Une seule donne une phrase qui a un sens qui est : LE RALLYE CEST TOP

Exercice n°3**En somme, c'est un produit !****9 points**

Soit A le nombre choisi, l'idée est de décomposer le nombre A, le plus possible, en tranches de taille 3 donc écrire A comme somme de 3. Si A n'est pas divisible par 3, on ne peut pas faire des tranches égales, donc on remplace le dernier 3 par 2 ou par 4 (selon le reste dans la division par 3), pour éviter les 1 dans la décomposition, pour que la somme fasse A.

1. Ainsi :

pour 12 : $12 = 3 + 3 + 3 + 3$, donc le plus grand produit est $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$.

pour 11 : $11 = 3 + 3 + 3 + 2$, donc le plus grand produit est $3 \times 3 \times 3 \times 2 = 54$.

pour 10 : $10 = 3 + 3 + 4$, donc le plus grand produit est $3 \times 3 \times 4 = 36$

car la décomposition $10 = 3 + 3 + 3 + 1$ donne un plus petit produit (27).

À noter : remplacer 4 par 2×2 ne change pas le résultat, une autre décomposition possible est : $10 = 3 + 3 + 2 + 2$.

2. Pour 40 : $40 = 13 \times 3 + 1$ mais il est préférable de choisir $40 = 12 \times 3 + 4$, donc le plus grand produit est $3^{12} \times 4 = 2\,125\,764$.

Exercice n°4**Deux cercles pour une enseigne****12 points**

Dans le triangle ABC, rectangle en B, on applique le théorème de Pythagore :
 $AC = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4,2$ cm.

En utilisant le théorème de Thalès avec les parallèles (AB) et (HG) on a :

$$\frac{CA}{CH} = \frac{CB}{CG} = \frac{AB}{HG} \text{ donc } \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+7} = \frac{3}{CG} = \frac{3}{HG}$$

$$\text{donc } CG = HG = \frac{6 + 7\sqrt{2}}{2}$$

CDEF est un rectangle car il a 4 angles droits et comme le triangle ABC est rectangle isocèle en B, $\widehat{ACB} = \widehat{DCA} = 45^\circ$ donc le triangle CDE est rectangle isocèle en D donc le rectangle CDEF a 2 côtés consécutifs de même longueur donc c'est un carré.

$$\text{Ainsi } CD = DE = EF = FC = \frac{6 + 7\sqrt{2}}{2} + 4.$$

$$\text{Donc } \ell(\text{ABCDEFGHA}) = AB + BC + CD + DE + EF + FG + GH + HA$$

$$\ell(\text{ABCDEFGHA}) = 3 + 3 + \left(\frac{6 + 7\sqrt{2}}{2} + 4 \right) + \left(\frac{6 + 7\sqrt{2}}{2} + 4 \right) + \left(\frac{6 + 7\sqrt{2}}{2} + 4 \right) + 4 + \frac{6 + 7\sqrt{2}}{2} + 7$$

$$\ell(\text{ABCDEFGHA}) = 41 + 14\sqrt{2}$$

Donc la longueur du chemin est environ 60,8 cm.

$$\text{Aire (enseigne)} = \text{Aire(CDEF)} - \text{Aire(CHG)} + \text{Aire(ABC)}$$

$$\text{Aire (enseigne)} = \left(\frac{6 + 7\sqrt{2}}{2} + 4 \right)^2 - \frac{1}{2} \times \left(\frac{6 + 7\sqrt{2}}{2} + 4 \right)^2 + \frac{1}{2} \times 3^2$$

$$\text{Aire (enseigne)} \approx 115,7 \text{ cm}^2$$

Exercice n°5**Switch the lights on****4 points**

Dans le tableau suivant : une case blanche signifie une ampoule éteinte et une case grise signifie une ampoule allumée.

Au départ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Après avoir pressé A	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Après avoir pressé C	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Après avoir pressé E	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Après avoir pressé B	1	2	3	4	5	6	7	8	9

En appuyant sur A, C, E et B on peut donc bien allumer toutes les lumières. Mais il y a d'autres possibilités, toujours avec A, C, E et B dans n'importe quel ordre. On peut aussi appuyer deux fois sur le même interrupteur, par exemple D, dans une séquence avec A, C, E et B.

Exercice n°6**Jetez-vous à l'eau !****9 points**

- Chemin de Laetitia : $DBC EFA = 100 + 100\sqrt{2} + 100 + 100\sqrt{2} + 100 = 300 + 200\sqrt{2} \approx 583$
 Chemin de Philippe : $DCFBEA = 200 \times 2 + 100\sqrt{5} = 400 + 100\sqrt{5} \approx 623$.

Le plus long est celui de Philippe.

Celui de Cécile peut être :

$$DCBF EA = 100 + 100\sqrt{2} + 100\sqrt{5} + 100\sqrt{2} + 100 = 200 + 200\sqrt{2} + 100\sqrt{5} \approx 706$$

- Voici un exemple de parcours le plus long :
 $DEBHFCKGA = 100 + 100\sqrt{2} + 100\sqrt{5} + 100\sqrt{2} + 100\sqrt{2} + 100\sqrt{5} + 100\sqrt{2} + 100 = 200 + 400\sqrt{2} + 200\sqrt{5} \approx 1213$

Exercice n°7

Le ² magique d'ln

9 points

1. Les sommes de chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale sont égales à 81.

Pour les lignes :
diagonales :

$$22 + 4 + 27 + 28 = 81$$

$$30 + 25 + 12 + 14 = 81$$

$$8 + 20 + 24 + 29 = 81$$

$$21 + 32 + 18 + 10 = 81$$

Pour les colonnes :

$$22 + 30 + 8 + 21 = 81$$

$$4 + 25 + 20 + 32 = 81$$

$$27 + 12 + 24 + 18 = 81$$

$$28 + 14 + 29 + 10 = 81$$

Pour les

$$22 + 25 + 24 + 10 =$$

$$28 + 12 + 20$$

Ce carré magique est bien construit à la manière d'Hélène car

$C + x$ $20 + 2 =$ $\boxed{22}$	$B - x - z$ $12 - 2 - 6 =$ $\boxed{4}$	$A - y + z$ $25 - 4 + 6 =$ $\boxed{27}$	$D + y$ $24 + 4 =$ $\boxed{28}$
$D + z$ $24 + 6 =$ $\boxed{30}$	A $\boxed{25}$	B $\boxed{12}$	$C - z$ $20 - 6 =$ $\boxed{20}$
$B + y - x - z$ $12 + 4 - 2 - 6$ $= \boxed{8}$	C $\boxed{20}$	D $\boxed{24}$	$A - y + x + z$ $25 - 4 + 2 + 6$ $= \boxed{29}$
$A - y$ $25 - 4 =$ $\boxed{21}$	$D + x + z$ $24 + 2 + 6 =$ $\boxed{32}$	$C + y - z$ $20 + 4 - 6 =$ $\boxed{18}$	$B - x$ $12 - 2 =$ $\boxed{10}$

- 2.

Pour les lignes :

$$C + x + B - x - z + A - y + z + D + y = A + B + C + D$$

$$D + z + A + B + C - z = A + B + C + D$$

$$B + y - x - z + C + D + A - y + x + z = A + B + C + D$$

$$A - y + D + x + z + C + y - z + B - x = A + B + C + D$$

Pour les colonnes :

$$C + x + D + z + B + y - x - z + A - y = A + B + C + D$$

$$B - x - z + A + C + D + x + z = A + B + C + D$$

$$A - y + z + B + D + C + y - z = A + B + C + D$$

$$D + y + C - z + A - y + x + z + B - x = A + B + C + D$$

Pour les diagonales :

$$C + x + A + D + B - x = A + B + C + D$$

$$D + y + B + C + A - y = A + B + C + D$$

Donc c'est bien un carré magique.

3. Voici un exemple de bonne réponse :

on prend $x = 2$ $y = 4$ et $z = 1$.

$C + x$ 22	$B - x - z$ 0	$A - y + z$ 10	$D + y$ 29
$D + z$ 26	A 13	B 3	$C - z$ 19
$B + y - x - z$ 4	C 20	D 25	$A - y + x + z$ 12
$A - y$ 9	$D + x + z$ 28	$C + y - z$ 23	$B - x$ 1