Rallye mathématique du Centre

Correction de l'épreuve préparatoire décembre 2023

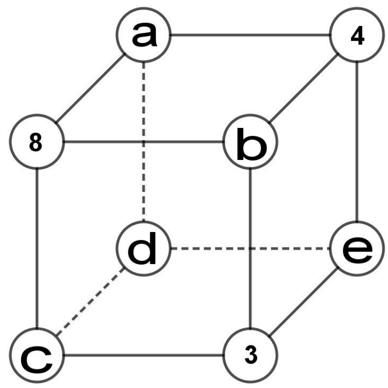
Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.
Les solutions partielles seront examinées.
Bon courage et rendez-vous le 14 mars pour l'épreuve officielle.

Exercice n°1 — Quand le cube fait sa somme

5 points

Les 6 conditions imposées amènent au système suivant qui leur équivaut :

$$\begin{cases} a = 6 - b \\ e = 11 - b \\ c = 7 - b \\ d = 2b - 3 \end{cases}$$



où a,b,c,d et e sont des nombres entiers positifs.

b joue le rôle d'un paramètre et l'on a :

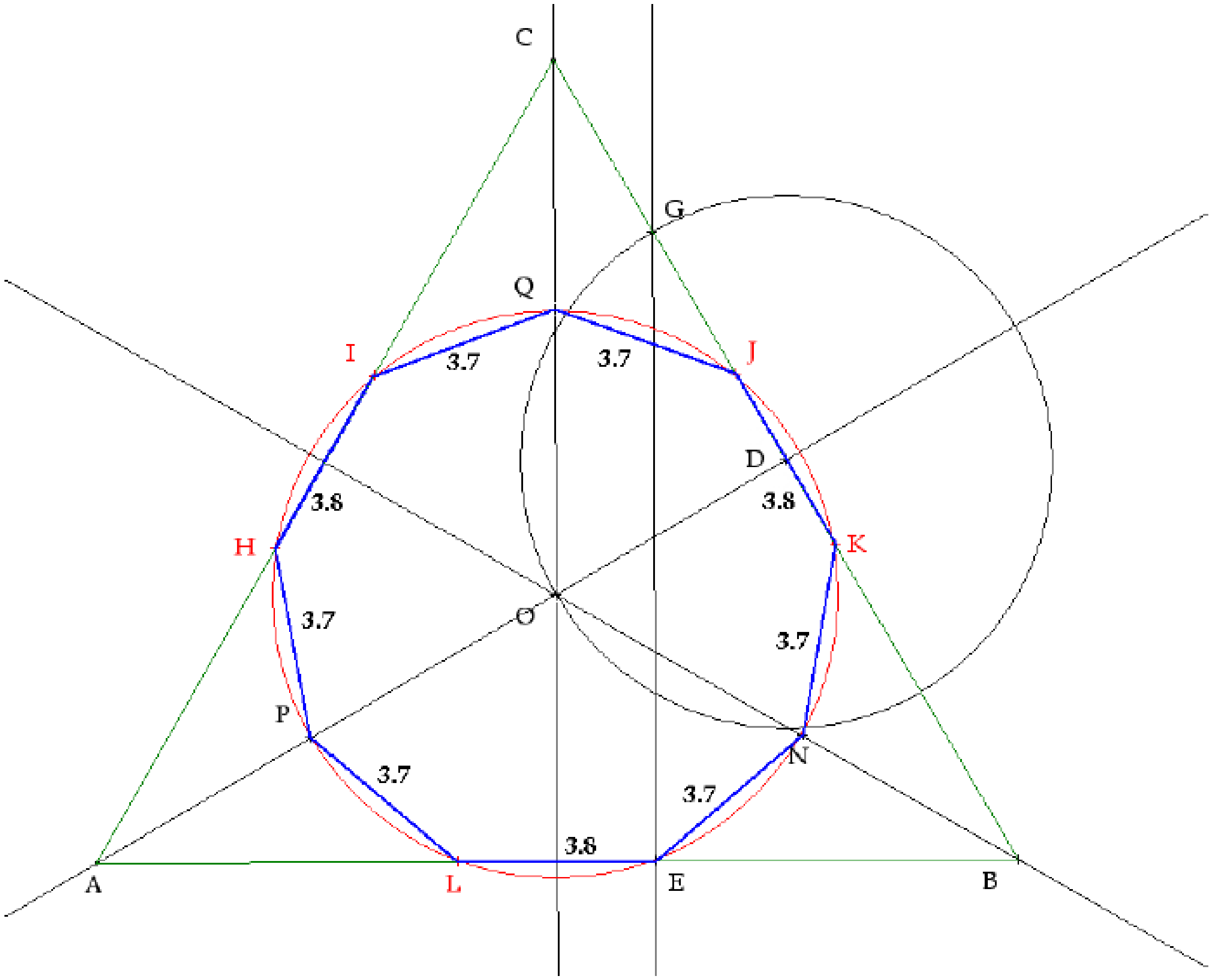
$$\begin{cases} b \geq 2 \text{ car } d \geq 0 \\ b \leq 6 \text{ car } a \geq 0 \end{cases}$$

On a donc 5 solutions pour (a,b,c,d,e).

Pour b=2, (4,2,5,1,9)
Pour b=3, (3,3,4,3,8)
Pour b=4, (2,4,3,5,7)
Pour b=5, (1,5,2,7,6)
Pour b=6, (0,6,1,9,5)

Exercice n°2 **Tout neuf !**

5 points



Ce polygone est presque régulier car ses côtés, inscrits dans un cercle, ont quasiment la même longueur (entre 3,7 et 3,8 unités).

Ce polygone à 9 côtés s'appelle un ennéagone ou nonagone.

Exercice n°3 — Quand les pourcentages se mettent à table

5 points

On note c le côté du carré

1. En utilisant le théorème de Pythagore on obtient : $c^2 + c^2 = 1,5^2$ d'où $c^2 = \frac{1,5^2}{2}$ et $c = \frac{1,5}{\sqrt{2}}$.
   En notant $\mathscr{A}_C$ l'aire du carré, et $\mathscr{A}_D$ l'aire du disque :

   $\mathscr{A}_C = c^2 = \frac{1,5^2}{2}$ et $\mathscr{A}_D = \pi \times (\dfrac{1,5}{2})^2 = \pi \times \dfrac{1,5^2}{4}$.
   $\mathscr{A}_D = \dfrac{\pi}{2}\mathscr{A}_C \approx 1,57\ \mathscr{A}_C$, soit une augmentation de 57 %.
2. En notant $\mathscr{P}_C$ le périmètre du carré, et $\mathscr{P}_D$ le périmètre du cercle :

   $\mathscr{P}_C = 4c = 4 \times \frac{1,5}{\sqrt{2}}$ et $\mathscr{P}_D = 2 \times \pi \times \dfrac{1,5}{2} = 1,5\pi$.
   $\mathscr{P}_D = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\mathscr{P}_C \approx 1,11\ \mathscr{P}_C$, soit une augmentation de 11 %.

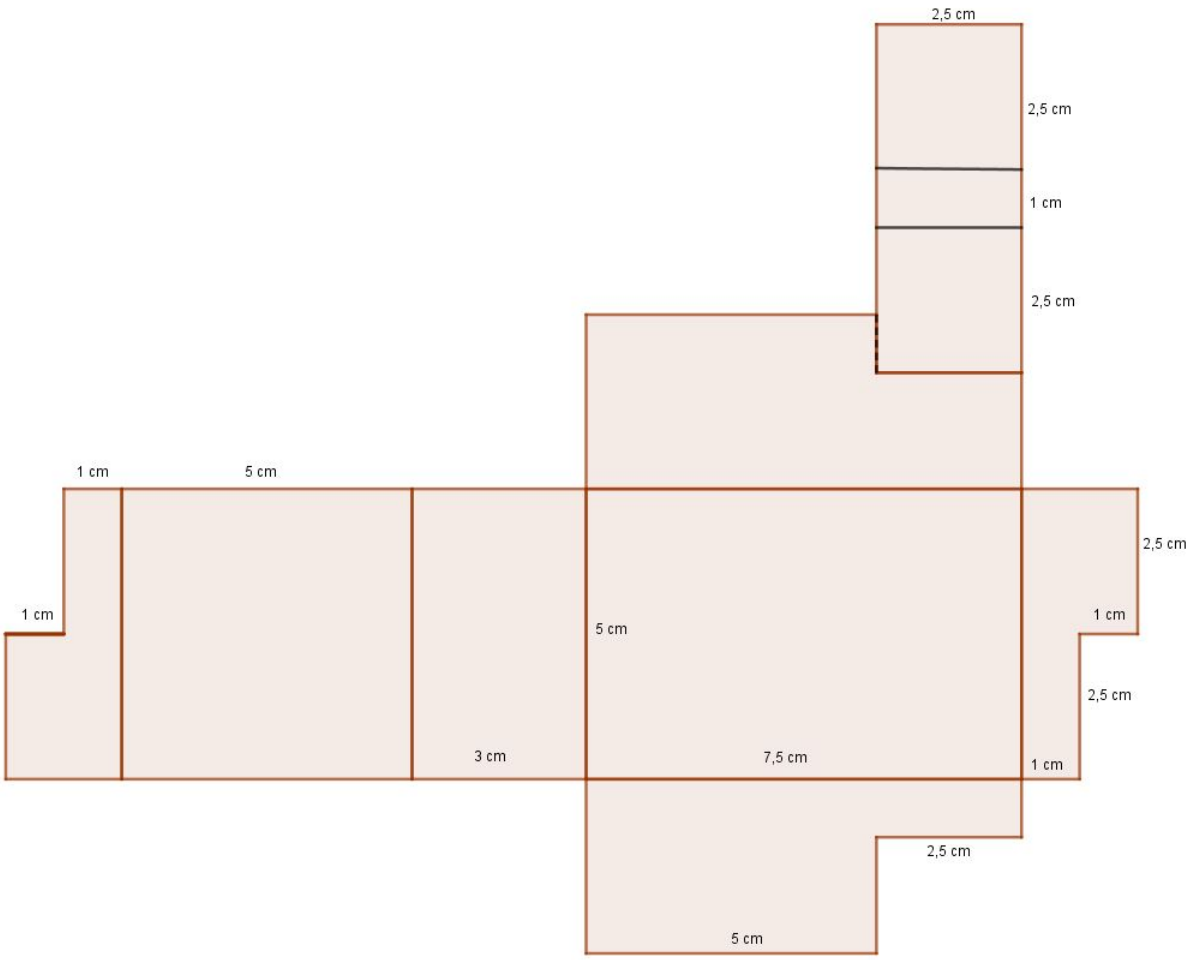
Exercice n°4 | Kubembois

10 points

Calcul de l'aire de la surface :
Face du dessous : 7,5 cm × 5 cm = 37,5 cm^2
Face de gauche : 3 cm × 5 cm = 15 cm^2
Faces de devant : 7,5 cm × 2 cm + 5 cm × 1 cm = 20 cm^2
Face de derrière : 7,5 cm × 2 cm + 5 cm × 1 cm = 20 cm^2
Faces de droite : 5 cm × 3 cm = 15 cm^2
Faces du dessus : 7,5 cm × 5 cm = 37,5 cm^2
Aire totale = 2 × 37,5 cm^2 + 2 × 15 cm^2 + 2 × 20 cm^2 = 145 cm^2

Calcul du volume :
Volume = 5 cm × 5 cm × 3 cm + 2,5 cm × 5 cm × 1 cm + 2,5 cm × 2,5 cm × 1 cm
Volume = 75 cm^3 + 12,5 cm^3 + 6,25 cm^3
Volume = 93,75 cm^3

Exemple de patron :



Exercice n°5 Nombres Harshad

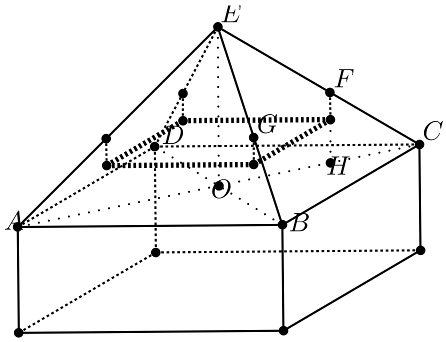
8 points

1. 11 est le plus petit nombre qui n'est pas Harshad.
2. Voici la liste de tous les nombres Harshad inférieurs à 200 :
   1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 18, 20, 21, 24, 27, 30, 36, 40, 42, 45, 48, 50, 54, 60, 63, 70, 72, 80, 81, 84, 90, 100, 102, 108, 110, 111, 112, 114, 117, 120, 126, 132, 133, 135, 140, 144, 150, 152, 153, 156, 162, 171, 180, 190, 192, 195, 198, 200.
3. 10^{32} est un nombre Harshad s'écrivant avec 33 chiffres.
4. $10^{23} + 2$ est un nombre Harshad s'écrivant avec 24 chiffres et se terminant par 2.
5. Non, il n'existe pas de nombre Harshad premier strictement supérieur à 7.
   En effet, si un tel nombre N existait, il serait :
   - divisible par la somme de ses chiffres
   - supérieur à 10 (car le plus petit nombre premier strictement supérieur à 7 est 11).

   En observant que la somme des chiffres d'un entier supérieur à 10 est toujours strictement inférieure à cet entier, il vient :
   - si la somme des chiffres vaut 1 alors le nombre vaut 1 qui est inférieur à 7 ou il est une puissance de 10 et n'est donc pas premier.
   - sinon, la somme de ses chiffres est alors un diviseur de N compris entre 1 et N, ce qui est impossible car N est premier.

Exercice n°6 « Et la lumière fut »

8 points



1. - En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B, on obtient : $AC = 10\sqrt{2}$ m donc $OC = 5\sqrt{2}$ m.
   - En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle EOC rectangle en O, on obtient : $EC = \sqrt{86}$ m.
   - F appartient à (EC), G appartient à (EB) et (GF) est parallèle à (BC) donc d'après le théorème de Thalès : $\dfrac{EF}{EC} = \dfrac{EG}{EB} = \dfrac{FG}{BC}$ donc $\dfrac{EF}{\sqrt{86}} = \dfrac{7}{10}$ donc $EF = \dfrac{7\sqrt{86}}{10}$ m $\approx 6,5$ m.
     (et donc $FC = \sqrt{86} - \dfrac{7\sqrt{86}}{10} = \dfrac{3\sqrt{86}}{10}$ m)
     Les filins sont accrochés à 6,5 m du sommet de la pyramide.
2. Soit H le point de $[OC]$ tel que (FH) et (OC) soient perpendiculaires.
   - F appartient à (CE), H appartient à (CO) et (FH) et (EO) sont parallèles donc d'après le théorème de Thalès : $\dfrac{CF}{CE} = \dfrac{CH}{CO} = \dfrac{FH}{EO}$ donc $\dfrac{0,3 \times \sqrt{86}}{\sqrt{86}} = \dfrac{FH}{\sqrt{86}}$ donc $FH = 1,8$ m.
   - $4 \text{ m} + 1,8 \text{ m} - 1 \text{ m} = 4,8$ m.
     Les néons sont à une hauteur du sol de $4,8$ m.

Exercice n°7 — A voir la dalle

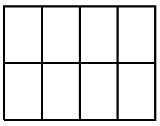
8 points

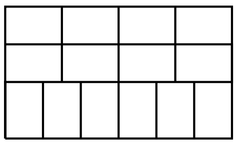
1. Les dimensions de la dalle rectangulaire du nouveau téléviseur sont 100 cm sur 61 cm.
   Soit d la diagonale de la dalle de l'écran du nouveau téléviseur.
   En utilisant le théorème de Pythagore il vient :
   $d^2 = 100^2 + 61^2$
   $d^2 = 1000 + 3721$
   $d^2 = 13721$ soit $d = \sqrt{13721}$
   d' où $d = 117$ cm arrondi à 1cm près
2. Soit x la largeur du bord du cadre qui entourait l'ancien téléviseur de Jean-Pierre.
   On obtient de la même façon : $(102 - 2x)^2 + (60 - 2x)^2 = 104^2$
   $10404 - 408x + 4x^2 + 3969 - 252x + 4x^2 = 10816$
   d'où $8x^2 - 660x + 3557 = 0$
   Par essais successifs, par étude de la fonction à l'aide de la calculatrice (graphique ou tableau de valeur), on trouve : $x \approx 5,8$ ou $x \approx 76,7$
   Seule la première solution convient.

Exercice n°8 — Sous les pavages ...

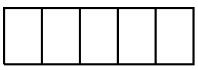
8 points

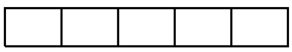
1. Non car un carreau fait 6 cm^2, et 15 n'est pas un multiple de 6.
2. Les dessins sont l'échelle 1/4.

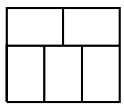
(a) 

(b) 

3. Les dessins sont l'échelle 1/4.







4. 11 carreaux de 6 cm^2 forment un rectangle de 11 cm $\times$ 6 cm = 66 cm^2.
   On peut obtenir 3 rectangles différents :
   - Un rectangle de dimensions 2 cm $\times$33 cm, et de périmètre 70 cm.
   - Un rectangle de dimensions 3 cm $\times$22 cm, et de périmètre 50 cm.
   - Un rectangle de dimensions 6 cm $\times$11 cm, et de périmètre 34 cm. C'est lui qui a le périmètre minimum.

Exercice Informatique-Algorithmique **Chat c'est chouette, il y a des mulots !**

12 points

1. Fin du 1er mois : 11 mulots, du 2d mois : 22 mulots, du 3e mois : 44 mulots.
   A l'aide de la calculatrice (ou tableur) on détermine que le nombre de mulots dépassera 10 millions en 21 mois.

A21 f_x =A20*2

	A	B
1	11	
2	22	
3	44	
4	88	
5	176	
6	352	
7	704	
8	1408	
9	2816	
10	5632	
11	11264	
12	22528	
13	45056	
14	90112	
15	180224	
16	360448	
17	720896	
18	1441792	
19	2883584	
20	5767168	
21	11534336	
22		

2. Il y a 88 mulots au 4e mois, donc les chats mangent 60 mulots par mois à partir du 5e mois.
   Toujours avec une calculatrice (ou tableur) ou avec un programme on détermine que le nombre de mulots dépassera 100 000 en 16 mois. Les chats ne ralentissent que très peu la progression des mulots.

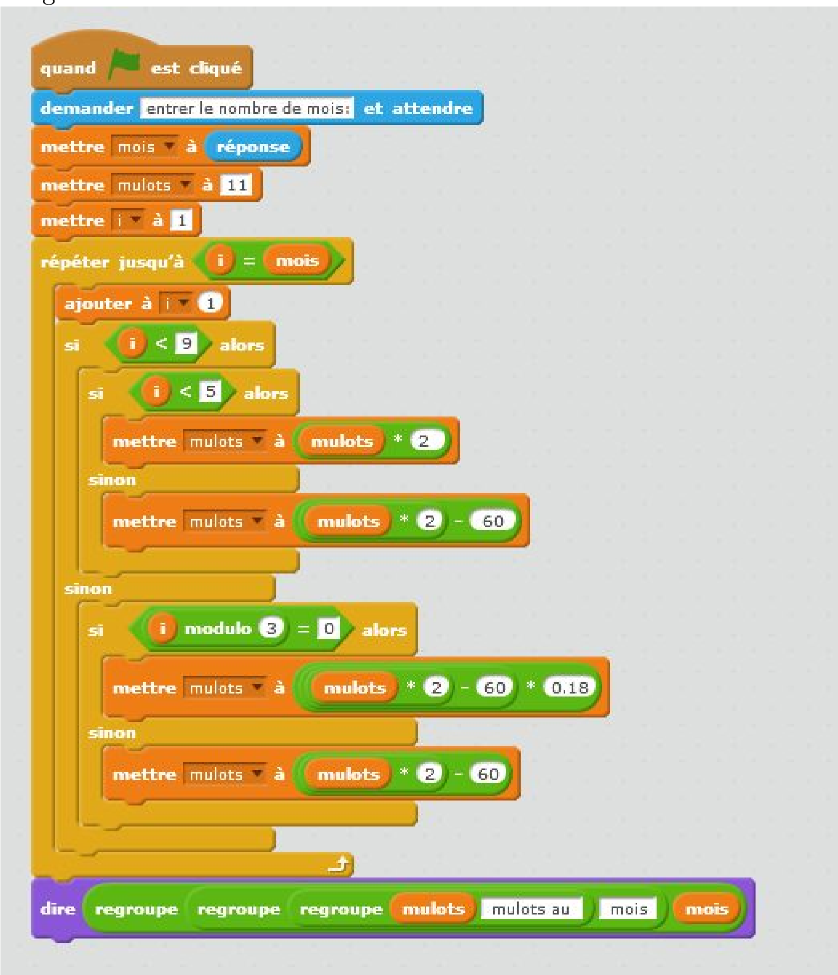
A16 f_x =A15*2-60

	A	B
1	11	
2	22	
3	44	
4	88	
5	116	
6	172	
7	284	
8	508	
9	956	
10	1852	
11	3644	
12	7228	
13	14396	
14	28732	
15	57404	
16	114748	

3. Programme Python :

```
n=eval(input("entrer le nombre de mois "))
a=11
i=1
while i<n:
    i=i+1
    if i<5:
        a=a*2
    elif 5<=i<9:
        a=a*2-60
    else:
        if i%3==0:
            a=(a*2-60)*0.18
        else:
            a=a*2-60
print("le nombre de mulots est",a,"au bout de ",n,"mois")
```

Programme Scratch :



4. Les chouettes semblent avoir ralenti la progression des mulots pendant plus de 50 mois mais cela ne dure pas. La population dépasse 3000 mulots en 77 mois et ne cesse ensuite de croitre