LYCÉE FRANÇAIS
Saint
Exupéry
CONGO BRAZZAVILLE

LYCÉE FRANÇAIS SAINT-EXUPÉRY DE BRAZZAVILLE
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES

BAC PAR THEME

SUITES NUMERIQUES

17 EXERCICES DE BAC 2022
AVEC DES ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION

EXTRAITS DE FICHIERS LATEX DU SITE DE L'APMEP

LYCEE FRANCAIS SAINT EXUPERY

BRAZZAVILLE - REP. DU CONGO

PAR VALÉRIEN EBERLIN
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

52 PAGES

SOMMAIRE

EXERCICE 1

Thèmes : probabilités Polynésie 4 mai 2022

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$$

1. **a.** Calculer les termes u_1, u_2 et u_3. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

b. Recopier le script python ci-dessous et compléter les lignes 3 et 6 pour que liste(k) prenne en paramètre un entier naturel k et renvoie la liste des premières valeurs de la suite (u_n) de u_0 à u_k.

```
1. def liste(k) :
2.     L = []
3.     u = ...
4.     for i in range(0, k+1) :
5.         L.append(u)
6.         u = ...
7.     return(L)
```

2. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est strictement positif.
Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

3. En déduire que la suite (u_n) converge.

4. Déterminer la valeur de sa limite.

5. **a.** Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

b. Démontrer par récurrence la conjecture précédente.

EXERCICE 2

Thèmes : suites Polynésie 6 mai 2022

Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 40 \\ u_{n+1} & = & 0{,}008u_n(200-u_n) \end{array}\right.$$

où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $(2021+n)$.

1. Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2022.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,100]$ par $f(x) = 0{,}008x(200 - x)$.

2. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,100]$ l'équation $f(x) = x$.

3. **a.** Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,100]$ et dresser son tableau de variations.

b. En remarquant que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100.$$

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

d. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. On considère l'algorithme suivant :

```
def seuil(p) :
    n=0
    u = 40
    while u < p :
      n =n+1
      u = 0.008*u*(200-u)
    return(n+2021)
```

L'exécution de seuil(100) ne renvoie aucune valeur. Expliquer pourquoi à l'aide de la question 3.

EXERCICE 3

Thèmes : suites, fonctions — Polynésie 30 août 2022

Soit k un nombre réel.
On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n,

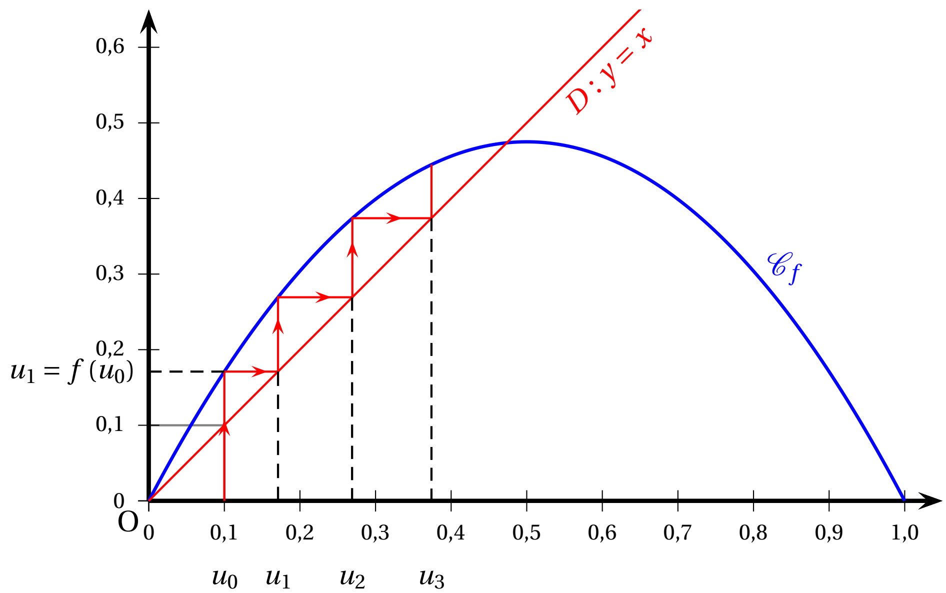
$$u_{n+1} = ku_n(1 - u_n).$$

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.
On y étudie deux cas de figure selon les valeurs de k.

Partie 1

Dans cette partie, $k = 1{,}9$ et $u_0 = 0{,}1$.
On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}9u_n(1 - u_n)$.

1. On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = 1{,}9x(1-x)$.
   a. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   b. En déduire que si $x \in [0\,;\,1]$ alors $f(x) \in [0\,;\,1]$.
2. Ci-dessous sont représentés les premiers termes de la suite (u_n) construits à partir de la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et de la droite D d'équation $y = x$.
   Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite éventuelle.



3. a. En utilisant les résultats de la question 1, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}.$$

   b. En déduire que la suite (u_n) converge.
   c. Déterminer sa limite.

Partie 2

Dans cette partie, $k = \dfrac{1}{2}$ et $u_0 = \dfrac{1}{4}$.

On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n(1-u_n)$ et $u_0 = \dfrac{1}{4}$.

On admet que pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. On considère la fonction Python `algo (p)` où `p` désigne un entier naturel non nul :

```
def algo(p) :
  u =1/4
  n = 0
  while u > 10**(-p):
    u = 1/2*u*(1 - u)
    n = n+1
   return(n)
```

Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel non nul p, la boucle while ne tourne pas indéfiniment, ce qui permet à la commande `algo (p)` de renvoyer une valeur.

EXERCICE 4

Thèmes : fonction exponentielle, suites   Métropole 11 mai 2022

Dans le cadre d'un essai clinique on envisage deux protocoles de traitement d'une maladie.

L'objectif de cet exercice est d'étudier, pour ces deux protocoles, l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient en fonction du temps.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : Étude du premier protocole

Le premier protocole consiste à faire absorber un médicament, sous forme de comprimé, au patient.

On modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient, exprimée en mg, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par

$$f(t) = 3t\mathrm{e}^{-0,5t+1},$$

où t désigne le temps, exprimé en heure, écoulé depuis la prise du comprimé.

1. **a.** On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ et on note f' sa fonction dérivée.

Montrer que, pour tout nombre réel t de $[0\,;\,10]$, on a : $f'(t) = 3(-0,5t+1)\mathrm{e}^{-0,5t+1}$.

b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

c. Selon cette modélisation, au bout de combien de temps la quantité de médicament présente dans le sang du patient sera-t-elle maximale ?

Quelle est alors cette quantité maximale ?

2. **a.** Montrer que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ notée α, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

On admet que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[2\,;\,10]$, notée β, et qu'une valeur approchée de β à 10^{-2} près est 3,46.

b. On considère que ce traitement est efficace lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5 mg.

Déterminer, à la minute près, la durée d'efficacité du médicament dans le cas de ce protocole.

Partie B : Étude du deuxième protocole

Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg.

On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.

On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.

On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1, de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 1{,}8$.

3. **a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

c. Déterminer la valeur de ℓ. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6 - u_n$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7 dont on précisera le premier terme.

b. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

c. Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg.

Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

EXERCICE 5

Thèmes : fonctions logarithmes et exponentielles, suites

Métropole 8 septembre 2022

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x},$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Donner la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

a. Montrer que, pour tout nombre réel $x \geqslant 1$, $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$.

b. Justifier le tableau de signes suivant, donnant le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

c. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f.

3. Soit k un nombre réel positif ou nul.

a. Montrer que, si $0 \leqslant k \leqslant \dfrac{1}{\text{e}}$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\ ;\ \text{e}]$.

b. Si $k > \dfrac{1}{\text{e}}$, l'équation $f(x) = k$ admet-elle des solutions sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$? Justifier.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \text{e}^{\frac{x}{4}}.$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = \text{e}^{\frac{u_n}{4}}$ c'est-à-dire : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Justifier que la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \text{e}$.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que f est solution de l'équation :

$$\text{e}^{\frac{x}{4}} = x.$$

4. En déduire que ℓ est solution de l'équation $f(x) = \dfrac{1}{4}$, où f est la fonction étudiée dans la partie A.

5. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la limite ℓ de la suite (u_n).

EXERCICE 6 Thème : fonction logarithme ; suites Métropole 9 septembre 2022

Les parties B et C sont indépendantes

On considère la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x - x\ln x,$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a. Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, on a : $f'(x) = -\ln x$.
   b. En déduire les variations de la fonction f sur $]0~;~+\infty[$ et dresser son tableau de variations.
4. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $]0~;~+\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser avec profit certains résultats de la partie A.
On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0,5 \\ u_{n+1} & = & u_n - u_n\ln u_n \text{ pour tout entier naturel } n, \end{array}\right.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On rappelle que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0,5~;~1]$.
   Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0,5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
2. **a.** Montrer que la suite (u_n) est convergente.
   b. On note ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.

Partie C

Pour un nombre réel k quelconque, on considère la fonction f_k définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f_k(x) = kx - x\ln x.$$

1. Pour tout nombre réel k, montrer que f_k admet un maximum y_k atteint en $x_k = \mathrm{e}^{k-1}$.
2. Vérifier que, pour tout nombre réel k, on a : $x_k = y_k$.

Exercice 7

Thèmes : fonction exponentielle, suites — Centres Etrangers 11 mai 2022

Partie A :

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \mathrm{e}^x - x$$

1. Déterminer les limites de h en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Étudier les variations de h et dresser son tableau de variation.
3. En déduire que :
   si a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$ alors $h(a) - h(b) < 0$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Dans la suite de l'exercice on s'intéresse à l'écart entre T et $\mathscr{C}_f$ au voisinage de 0.
Cet écart est défini comme la différence des ordonnées des points de T et $\mathscr{C}_f$ de même abscisse.
On s'intéresse aux points d'abscisse $\dfrac{1}{n}$, avec n entier naturel non nul.
On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} - 1$$

2. Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n,

   $$u_{n+1} - u_n = h\left(\frac{1}{n+1}\right) - h\left(\frac{1}{n}\right)$$

   où h est la fonction définie à la partie A.

   b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
4. Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées à 10^{-9} des premiers termes de la suite (u_n).

n	u_n
1	0,718 281 828
2	0,148 721 271
3	0,062 279 092
4	0,034 025 417
5	0,021 402 758
6	0,014 693 746
7	0,010 707 852
8	0,008 148 453
9	0,006 407 958
10	0,005 170 918

Donner la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle l'écart entre T et $\mathscr{C}_f$ semble être inférieur à 10^{-2}.

EXERCICE 8

Thèmes : fonction logarithme, suites — Centres Etrangers 12 mai 2022

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x) + 1$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 ainsi que sa limite en $+\infty$.

2. **a.** On admet que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on notera f' sa fonction dérivée.
Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = 1 + \ln(x).$$

b. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$. On y fera figurer la valeur exacte de l'extremum de f sur $]0\,;\,+\infty[$ et les limites.

c. Justifier que pour tout $x \in]0\,;\,1[$, $f(x) \in]0\,;\,1[$.

3. **a.** Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

b. Étudier la convexité de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.

c. En déduire que pour tout réel x strictement positif :

$$f(x) \geqslant x$$

4. On définit la suite (u_n) par son premier terme u_0 élément de l'intervalle $]0\,;1[$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f\left(u_n\right)$$

   a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < 1$.
   b. Déduire de la question 3. c. la croissance de la suite (u_n).
   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

EXERCICE 9

Thèmes : suites, programmation   Asie 17 mai 2022

Partie A : modèle discret de la quantité médicamenteuse

Après une première injection de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.

On estime que, toutes les 30 minutes, l'organisme du patient élimine 10 % de la quantité de médicament présente dans le sang et qu'il reçoit une dose supplémentaire de 0,25 mg de la substance médicamenteuse.

On étudie l'évolution de la quantité de médicament dans le sang avec le modèle suivant :

pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité, en mg, de médicament dans le sang du patient au bout de n périodes de trente minutes. On a donc $u_0 = 1$.

1. Calculer la quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 0{,}25$.
3. a. Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} < 5$.
   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. On estime que le médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à 1,8 mg.
   a. Recopier et compléter le script écrit en langage Python suivant de manière à déterminer au bout de combien de périodes de trente minutes le médicament commence à être réellement efficace.

```
def efficace():
  u=1
  n=0
  while ......:
     u=......
     n = n+1
   return n
```

b. Quelle est la valeur renvoyée par ce script ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

5. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2{,}5 - u_n$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme (v_0).

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2{,}5 - 1{,}5 \times 0{,}9^n$.

c. Le médicament devient toxique lorsque sa quantité présente dans le sang du patient dépasse 3 mg.

D'après le modèle choisi, le traitement présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.

Partie B : modèle continu de la quantité médicamenteuse

Après une injection initiale de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.

Le débit de la substance médicamenteuse administrée au patient est de 0,5 mg par heure.

La quantité de médicament dans le sang du patient, en fonction du temps, est modélisée par la fonction f, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$, par

$$f(t) = 2{,}5 - 1{,}5\mathrm{e}^{-0{,}2t},$$

où t désigne la durée de la perfusion exprimée en heure.

On rappelle que ce médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à 1,8 mg.

1. Le médicament est-il réellement efficace au bout de 3 h 45 min ?

2. Selon ce modèle, déterminer au bout de combien de temps le médicament devient réellement efficace.

3. Comparer le résultat obtenu avec celui obtenu à la question 4. b. du modèle discret de la Partie A.

EXERCICE 10 — Thèmes : Suites numériques. Algorithmique et programmation — Asie 18 mai 2022

On s'intéresse au développement d'une bactérie.

Dans cet exercice, on modélise son développement avec les hypothèses suivantes : cette bactérie a une probabilité 0,3 de mourir sans descendance et une probabilité 0,7 de se diviser en deux bactéries filles.

Dans le cadre de cette expérience, on admet que les lois de reproduction des bactéries sont les mêmes pour toutes les générations de bactéries qu'elles soient mère ou fille.

Pour tout entier naturel n, on appelle p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie.

On admet que, d'après ce modèle, la suite (p_n) est définie de la façon suivante :
$p_0 = 0{,}3$ et, pour tout entier naturel n,

$$p_{n+1} = 0{,}3 + 0{,}7p_n^2.$$

	A	B
1	n	p_n
2	0	0,3
3	1	
4	2	
5	3	0,407 695 62
6	4	0,416 351
7	5	0,421 343 71
8	6	0,424 271 37
9	7	0,426 004 33
10	8	0,427 035 78
11	9	0,427 651 69
12	10	0,428 020 18
13	11	0,428 240 89
14	12	0,428 373 18
15	13	0,428 452 51
16	14	0,428 500 09
17	15	0,428 528 63
18	16	0,428 545 75
19	17	0,428 556 02

1. La feuille de calcul ci-dessous donne des valeurs approchées de la suite (p_n)

a. Déterminer les valeurs exactes de p_1 et p_2 (masquées dans la feuille de calcul) et interpréter ces valeurs dans le contexte de l'énoncé.

b. Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type ?

c. Formuler des conjectures sur les variations et la convergence de la suite (p_n).

2. **a.** Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel $n, 0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0{,}5$.

b. Justifier que la suite (p_n) est convergente.

3. On appelle L la limite de la suite (p_n).

a. Justifier que L est solution de l'équation

$$0{,}7x^2 - x + 0{,}3 = 0$$

b. Déterminer alors la limite de la suite (p_n).

4. La fonction suivante, écrite en langage Python, a pour objectif de renvoyer les n premiers termes de la suite (p_n).

```
1 def suite(n) :
2   p= ...
3   s=[p]
4   for i in range (...) :
5       p=...
6       s.append(p)
7   return (s)
```

Recopier, sur votre copie, cette fonction en complétant les lignes 2, 4 et 5 de façon à ce que la fonction `suite (n)` retourne, sous forme de liste, les n premiers termes de la suite.

EXERCICE 11

Centres Etrangers G1 18 mai 2022

Thèmes : suites, fonctions, fonction exponentielle

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 1 + x - \mathrm{e}^{0,5x-2}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa dérivée.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

b. Démontrer que, pour tout réel x non nul, $f(x) = 1 + 0,5x\left(2 - \dfrac{\mathrm{e}^{0,5x}}{0,5x} \times \mathrm{e}^{-2}\right)$.

En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. **a.** Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x.

b. Démontrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) < 0$ est l'intervalle $]4 + 2\ln(2)\ ;\ +\infty[$.

3. Déduire des questions précédentes le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On fera figurer la valeur exacte de l'image de $4 + 2\ln(2)$ par f.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie à la partie A.

1. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4.$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge. On notera ℓ la limite.

2. **a.** On rappelle que f vérifie la relation $\ell = f(\ell)$.

Démontrer que $\ell = 4$.

b. On considère la fonction `valeur` écrite ci-contre dans le langage Python :

```
def valeur (a) :
  u = 0
  n = 0
  while u ⩽ a:
    u=1 + u - exp(0.5*u - 2)
    n = n+1
  return n
```

L'instruction `valeur(3.99)` renvoie la valeur 12.

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 12 Thèmes : Fonctions, Fonction exponentielle, Fonction logarithme ; Suites

Centres Etrangers G1 19 mai 2022

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x de $]0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} + \ln(x).$$

1. Calculer la limite de f en 0.
2. On admet que f est dérivable sur $]0\,;\,1]$. On note f' sa fonction dérivée.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $]0\,;\,1]$, on a :
   $$f'(x) = \frac{1 - x\mathrm{e}^{-x}}{x}$$
3. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]0\,;\,1]$, on a $x\mathrm{e}^{-x} < 1$.
   En déduire le tableau de variation de f sur $]0\,;\,1]$.
4. Démontrer qu'il existe un unique réel ℓ appartenant à $]0\,;\,1]$ tel que $f(\ell) = 0$.

Partie B

1. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} a_0 & = & \dfrac{1}{10} \\ b_0 & = & 1 \end{array}\right. \text{ et, pour tout entier naturel } n, \left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \mathrm{e}^{-b_n} \\ b_{n+1} & = & \mathrm{e}^{-a_n} \end{array}\right.$$
   a. Calculer a_1 et b_1. On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près.
   b. On considère ci-dessous la fonction `termes`, écrite en langage Python.
   ```
   def termes (n) :
     a=1/10
     b=1
     for k in range(0,n) :
       c= ...
       b = ...
       a = c
     return(a,b)
   ```
   Recopier et compléter sans justifier le cadre ci-dessus de telle sorte que la fonction termes calcule les termes des suites (a_n) et (b_n).

2. On rappelle que la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$$

b. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.

3. On note A la limite de (a_n) et B la limite de (b_n).
On admet que A et B appartiennent à l'intervalle $]0\,;\,1]$, et que $A = \mathrm{e}^{-B}$ et $B = \mathrm{e}^{-A}$.

a. Démontrer que $f(A) = 0$.

b. Déterminer $A - B$.

EXERCICE 13

Thème : suites   Amérique du Nord 18 mai 2022

Dans cet exercice, on considère la suite (T_n) définie par :

$$T_0 = 180 \text{ et, } \quad \text{pour tout entier naturel } n,\ T_{n+1} = 0{,}955\,T_n + 0{,}9$$

1. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $T_n \geqslant 20$.

b. Vérifier que pour tout entier naturel n, $T_{n+1} - T_n = -0{,}045\,(T_n - 20)$. En déduire le sens de variation de la suite (T_n).

c. Conclure de ce qui précède que la suite (T_n) est convergente. Justifier.

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = T_n - 20$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. En déduire que pour tout entier naturel n, $T_n = 20 + 160 \times 0{,}955^n$.

c. Calculer la limite de la suite (T_n).

d. Résoudre l'inéquation $T_n \leqslant 120$ d'inconnue n entier naturel.

3. Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution de la température au centre d'un gâteau après sa sortie du four.

On considère qu'à la sortie du four, la température au centre du gâteau est de 180° C et celle de l'air ambiant de 20° C.

La loi de refroidissement de Newton permet de modéliser la température au centre du gâteau par la suite précédente (T_n). Plus précisément, T_n représente la température au centre du gâteau, exprimée en degré Celsius, n minutes après sa sortie du four.

a. Expliquer pourquoi la limite de la suite (T_n) déterminée à la question 2. c. était prévisible dans le contexte de l'exercice.

b. On considère la fonction Python ci-dessous :

```
def temp(x) :
  T = 180
  n = 0
  while T > x :
    T=0.955*T+0.9
    n=n+1
  return n
```

Donner le résultat obtenu en. exécutant la commande temp(120).
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 14

Thème : suites, probabilités Amérique du Nord 19 mai 2022

Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée.

La société dispose de deux points de location distinctes, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un où l'autre des deux points de location.

On admettra que le nombre total de vélos est constant et que tous les matins, à l'ouverture du service, chaque vélo se trouve au point A ou au point B.

D'après une étude statistique :

- Si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à 0,84 ;
- Si un vélo se trouve au point B un matin la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à 0,76.

À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B.

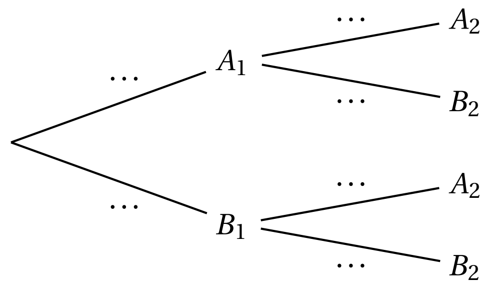
On considère un vélo de la société pris au hasard.

Pour tout entier naturel non nul n, on définit les évènements suivants :

- A_n : « le vélo se trouve au point A le n-ième matin »
- B_n : « le vélo se trouve au point B le n-ième matin ».

Pour tout entier naturel non nul n, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n et b_n la probabilité de l'évènement B_n. Ainsi $a_1 = 0,5$ et $b_1 = 0,5$.

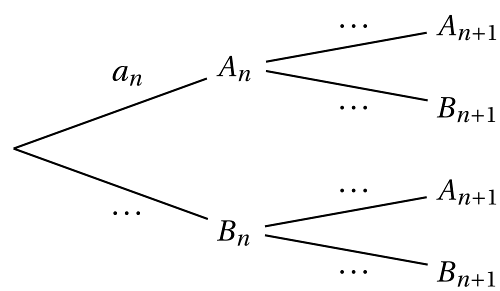
1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premiers matins :



2. a. Calculer a_2.

b. Le vélo se trouve au point A le deuxième matin. Calculer la probabilité qu'il se soit trouvé au point B le premier matin. La probabilité sera arrondie au millième.

3. a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $n+1$-ième matins.



b. Justifier que pour tout entier naturel non nul n, $a_{n+1} = 0{,}6a_n + 0{,}24$.

4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $a_n = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}$.

5. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

6. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geqslant 0{,}599$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 15

Thème : suites Amérique du Sud 26 septembre 2022

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n^2$.

1. a. Calculer u_1 et u_2.

b. Recopier et compléter la fonction ci-dessous écrite en langage Python. Cette fonction est nommée *suite_u* et prend pour paramètre l'entier naturel p.
Elle renvoie la valeur du terme de rang p de la suite (u_n).

```
def suite_u(p) :
  u= ...
  for i in range(1,...) :
    u =...
  return u
```

2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 4$.

b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. **a.** Justifier que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie l'égalité $\ell = \dfrac{1}{5}\ell^2$.

b. En déduire la valeur de ℓ.

4. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \ln(u_n)$ et $w_n = v_n - \ln(5)$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n - \ln(5)$.

b. Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 2.

c. Pour tout entier naturel n, donner l'expression de w_n en fonction de n et montrer que $v_n = \ln\left(\dfrac{4}{5}\right) \times 2^n + \ln(5)$.

5. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

EXERCICE 16

Thème : suites   Amérique du Sud 27 septembre 2022

La population d'une espèce en voie de disparition est surveillée de près dans une réserve naturelle.
Les conditions climatiques ainsi que le braconnage font que cette population diminue de 10 % chaque année.
Afin de compenser ces pertes, on réintroduit dans la réserve 100 individus à la fin de chaque année.
On souhaite étudier l'évolution de l'effectif de cette population au cours du temps. Pour cela, on modélise l'effectif de la population de l'espèce par la suite (u_n) où u_n représente l'effectif de la population au début de l'année $2020 + n$.
On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.
Au début de l'année 2020, la population étudiée compte 2 000 individus, ainsi $u_0 = 2000$.

1. Justifier que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 0{,}9u_n + 100.$$

2. Calculer u_1 puis u_2.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $1\,000 < u_{n+1} \leqslant u_n$.
4. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.
5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1\,000$.
   - **a.** Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9.
   - **b.** En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1\,000\left(1 + 0{,}9^n\right)$.
   - **c.** Déterminer la limite de la suite (u_n).
     En donner une interprétation dans le contexte de cet exercice.
6. On souhaite déterminer le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous d'un certain seuil S (avec $S > 1\,000$).
   - **a.** Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant 1\,020$.
     Justifier la réponse par un calcul.
   - **b.** Dans le programme Python ci-contre, la variable n désigne le nombre d'années écoulées depuis 2020, la variable u désigne l'effectif de la population.
     Recopier et compléter ce programme afin qu'il retourne le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous du seuil S.

```
def population(S) :
  n=0
  u=2000

  while ......:
    u= ...
    n = ...
  return ...
```

EXERCICE 17

Nouvelle-Calédonie 26 octobre 2022

Thème : fonctions, fonction exponentielle, suites

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3\mathrm{e}^x.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. On définit la suite (u_n) par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   - **a.** Calculer u_1 puis u_2.
     On donnera les valeurs exactes, puis les valeurs approchées à 10^{-3}.

b. On considère la fonction `fonc`, écrite en langage Python ci-dessous.

On rappelle qu'en langage Python, « `i in range (n)` » signifie que `i` varie de 0 à `n -1`.

```
def  fonc (n):
     u =- 1
     for i in range(n) :
       u=u**3*exp(u)
     return u
```

Déterminer, sans justifier, la valeur renvoyée par `fonc (2)` arrondie à 10^{-3}.

2. **a.** Démontrer que, pour tout x réel, on a $f'(x) = x^2 e^x (x+3)$.

b. Justifier que le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ est celui représenté ci-dessous :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-27e^{-3}$	$\nearrow$	$+\infty$

c. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0.$$

d. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

e. On note ℓ la limite de la suite (u_n).
On rappelle que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
Déterminer ℓ. (Pour cela, on admettra que l'équation $x^2 e^x - 1 = 0$ possède une seule solution dans $\mathbb{R}$ et que celle-ci est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$).

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 1

Polynésie 4 mai 2022

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $\quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

1. **a.** $u_1 = u_{n+1} = \dfrac{u_0}{1+u_0} = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{u_1}{1+u_1} = \dfrac{1}{3}$ et $u_3 = \dfrac{u_2}{1+u_2} = \dfrac{1}{4}$.

b. On complète les lignes 3 et 6 du script python ci-dessous pour que liste(k) prenne en paramètre un entier naturel k et renvoie la liste des premières valeurs de la suite (u_n) de u_0 à u_k.

```
1.  def liste(k) :
2.      L = []
3.      u = 1
4.      for i in range(0, k+1) :
5.          L.append(u)
6.          u = u/(1+u)
7.      return(L)
```

2. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est strictement positif.

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{1+u_n} - u_n = \dfrac{u_n - u_n(1+u_n)}{1+u_n} = \dfrac{-u_n^2}{1+u_n} < 0$ car u_n est strictement positif.

La suite (u_n) est donc décroissante.

3. (u_n) est décroissante et minorée par 0; d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers une limite ℓ positive ou nulle.

4. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$, on a alors $u_{n+1} = f(u_n)$.

La fonction f est continue, car dérivable sur $\mathbb{R}^+$, donc la limite ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.

On résout l'équation : $\dfrac{\ell}{1+\ell} = \ell \iff \ell = \ell(1+\ell) \iff 0 = \ell^2 \iff \ell = 0$.

Donc la suite (u_n) a pour limite 0.

5. **a.** Au vu des premiers termes, on peut conjecturer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \dfrac{1}{n+1}$

b. On démontre par récurrence la conjecture précédente. Soit P_n la propriété : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

- Initialisation :

pour $n = 0$, $u_0 = \dfrac{1}{0+1} = 1$ donc P_0 est vraie.

- Hérédité :

Supposons que P_n est vraie pour $n \in \mathbb{N}$, on a donc $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

On a alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+1+1}{n+1}} = \dfrac{1}{1+(n+1)}$: la relation est vraie au rang $(n+1)$.

P_{n+1} est donc vraie.
Comme P_0 est vraie, et que pour $n \in \mathbb{N}$, P_n vraie entraîne P_{n+1} vraie, d'après le principe de récurrence on peut dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 2

Polynésie 6 mai 2022

1. L'année 2022 est l'année 2021 + 1, donc on doit calculer u_1.
   $u_1 = 0{,}008u_0(200 - u_0) = 0{,}008 \times 40 \times 160 = 51{,}2$.
   L'estimation est donc de 51,2 oiseaux (arrondie à 51 animaux).
2. Résolvons $f(x) = x$.
   $$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 0{,}008x(200 - x) = x \\ &\iff 1{,}6x - 0{,}008x^2 = x \\ &\iff 0{,}008x^2 - 0{,}6x = 0 \\ &\iff x(0{,}008x - 0{,}6) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 0{,}008x - 0{,}6 = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{0{,}6}{0{,}008} = 75 \end{aligned}$$
   L'équation admet deux solutions dans $[0\,;\,100]$: 0 et 75.
3. **a.** Pour tout x entre 0 et 100, on a : $f(x) = -0{,}008x^2 + 1{,}6x$. C'est une fonction polynôme de degré 2, dont le coefficient dominant est négatif ($-0{,}008$).
   Le sommet de la parabole représentant la fonction définie sur $\mathbb{R}$ a pour abscisse : $\dfrac{-1{,}6}{2 \times (-0{,}008)} = 100$.
   La fonction définie sur $\mathbb{R}$ serait donc croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,100]$ et décroissante sur $[100\,;\,+\infty[$, donc f, qui est définie sur $[0\,;\,100]$ est bien strictement croissante sur $[0\,;\,100]$.

   b. Pour tout entier naturel n, on pose P_n la propriété : « $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100$ ».
   - Initialisation : On a $u_0 = 40$ et $u_1 = 51{,}2$, donc on a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 100$ donc la propriété P_0 est vraie.
   - Hérédité : Soit n un entier naturel . On suppose P_n vraie.
     $$\begin{aligned} P_n &\implies 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100 \\ &\implies f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(100) \qquad f \text{ est croissante sur } [0\,;\,100] \\ &\implies 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 80 \qquad \text{car } f(0) = 0;\ f(100) = 80 \\ &\implies 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 100 \\ &\implies P_{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est héréditaire.

— Conclusion : La propriété P_0 est vraie, et pour un naturel n quelconque, si P_n est vraie, P_{n+1} l'est aussi donc, d'après l'axiome du raisonnement par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}; \quad 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100$

On en déduit donc que la suite est bornée par 0 et 100, et qu'elle est croissante.

c. La suite est croissante et majorée par 100, donc elle converge vers une limite ℓ, qui est supérieure à $u_0 = 40$ et inférieure au majorant 100.

d. Puisque la suite est convergente et définie par récurrence et que la fonction de récurrence f est continue sur $[0 ; 100]$, intervalle contenant la limite ℓ, d'après le théorème du point fixe, ℓ est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Comme on a établi que cette équation n'a que deux solutions dans $[0 ; 100]$, 0 et 75, et que l'on a établi que ℓ est comprise entre 40 et 100, il vient que $\ell = 75$.

La suite converge donc vers 75.

4. Le principe de cette fonction `seuil(p)` est de renvoyer l'année où l'estimation dépasse le seuil `p`, notre suite ici est croissante et converge vers 75, donc elle est majorée par 75. Aucun terme ne dépassera donc 75, et le test de la boucle `while` sera toujours satisfait, donc on aura une fonction qui tourne de façon infinie et ne renvoie donc aucun résultat.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 3

Polynésie 30 août 2022

Soit k un nombre réel.
On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = k u_n (1 - u_n).$$

Partie 1

Dans cette partie, $k = 1{,}9$ et $u_0 = 0{,}1$; on a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}9 u_n (1 - u_n)$.

1. On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = 1{,}9x(1 - x)$.

a. On étudie les variations de f sur l'intervalle $[0; 1]$.

$f'(x) = 1{,}9(1 - x) + 1{,}9x \times (-1) = 1{,}9 - 1{,}9x - 1{,}9x = 1{,}9(1 - 2x)$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x) = 1{,}9(1 - 2x)$		$+$	0	$-$	

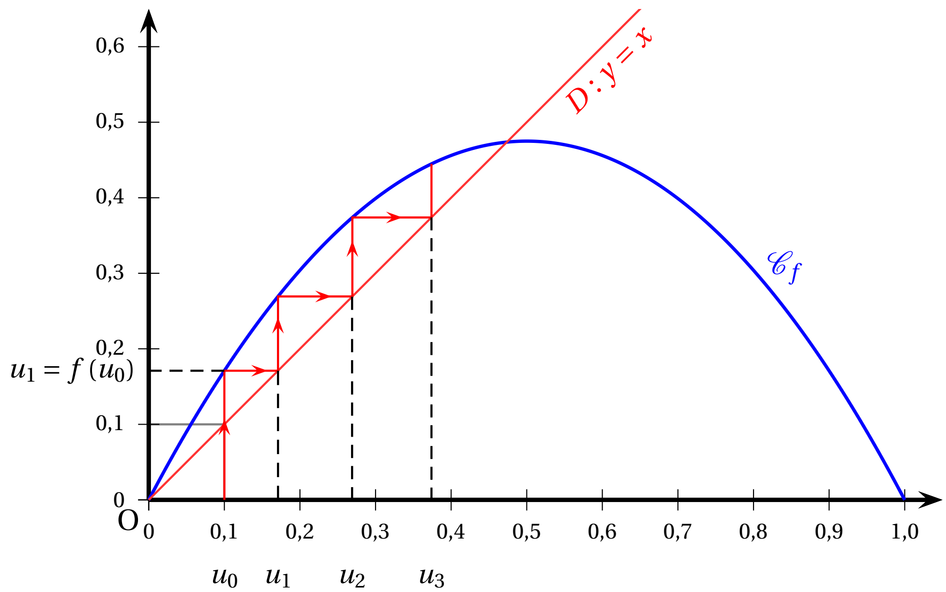
$f(0) = 0$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}475$ et $f(1) = 0$

On établit le tableau des variations de f sur$[0\,;1]$:

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	0,475	$\searrow$	0

b. On peut en déduire que si $x \in [0\,;\,1]$ alors $f(x) \in [0\,;\,0{,}475]$ donc $f(x) \in [0\,;\,1]$.

2. Ci-dessous sont représentés les premiers termes de la suite (u_n) construits à partir de la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et de la droite D d'équation $y = x$.



La suite (u_n) semble croissante et semble converger vers l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et D.

3. **a.** Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

- **Initialisation**

  Pour $n = 0$, $u_n = u_0 = 0{,}1$ et $u_{n+1} = 1{,}9u_0(1 - u_0) = 1{,}9 \times 0{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}171$; donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \frac{1}{2}$.

  La propriété est vraie au rang 0.

- **Hérédité**

  On suppose la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$. C'est l'hypothèse de récurrence.

  La fonction f est croissante sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ donc $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$.

  $f(0) = 0$, $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}475 \leqslant \frac{1}{2}$

On en déduit que : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \frac{1}{2}$.
Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire ; donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

b. De la propriété précédente, on tire :

- pour tout n, $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante ;
- pour tout n, $u_n \leqslant \frac{1}{2}$ donc la suite (u_n) est majorée par $\frac{1}{2}$.

La suite (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, elle est convergente.

c. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n).
Comme pour tout$n$, $f(u_n) = u_{n+1}$ et que la fonction f est continue, la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.
On résout l'équation $f(x) = x$:

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 1{,}9x(1-x) = x \iff 1{,}9x(1-x) - x = 0 \\ &\iff x(1{,}9 - 1{,}9x - 1) = 0 \iff x(0{,}9 - 1{,}9x) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } 0{,}9 - 1{,}9x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{0{,}9}{1{,}9} \end{aligned}$$

La suite (u_n) est croissante donc $\ell \geqslant u_0$ soit $\ell \geqslant 0{,}1$.
La seule solution possible est donc $\ell = \frac{0{,}9}{1{,}9} = \frac{9}{19} \approx 0{,}474$.

Partie 2

Dans cette partie, $k = \frac{1}{2}$ et $u_0 = \frac{1}{4}$, donc, pour tout n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1-u_n)$.
On admet que pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1. $0 < \dfrac{1}{2} < 1$ donc la suite géométrique (v_n) définie pour tout n par $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ est convergente vers 0.
Pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) est convergente et a pour limite 0.

2. On considère la fonction Python `algo(p)` où `p` désigne un entier naturel non nul :

```
def algo(p) :
  u =1/4
  n = 0
  while u > 10**(-p):
      u = 1/2*u*(1 - u)
      n = n+1
  return(n)
```

La boucle s'arrête quand `u` est inférieur ou égal à `10**(-p)`, c'est-à-dire pour la première valeur de n vérifiant $u_n \leqslant 10^{-p}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, il y a une première valeur n_0 à partir de laquelle $u_n \leqslant 10^{-p}$ pour tout $n \geqslant n_0$. La boucle `while` ne tourne donc pas indéfiniment, ce qui permet à la commande `algo(p)` de renvoyer une valeur.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 4

Métropole 11 mai 2022

Partie A

1. **a.** La fonction f est continue et dérivable sur $[0\,;\,10]$. En utilisant les règles de dérivation d'un produit, on obtient :
   $f'(t) = 3\mathrm{e}^{-0,5t+1} + 3t \times -0,5\mathrm{e}^{0,5t+1} = \mathrm{e}^{-0,5t+1}\,(+-3(0,5t+1)) = (-1,5t+3)\mathrm{e}^{-0,5t+1}$
   Donc $\forall t \in [0\,;\,10]$, $f'(t) = 3(-0,5t+1)\mathrm{e}^{-0,5t+1}$

   b. $\forall t \in [0\,;\,10]$, $\mathrm{e}^{-0,5t+1} > 0$ donc $f'(t)$ a le même signe que $-0,5t+1$.
   $-0,5t+1 \geqslant 0 \iff x \leqslant 2$.
   Dans le tableau : $f(0) = 0$, $f(2) = 6\mathrm{e}^0 = 6$ et $f(10) = 30\mathrm{e}^{-5+1} = 30\mathrm{e}^{-4}$.
   D'où le tableau de variation de f :

x	0		2		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	6	$\searrow$	$30\mathrm{e}^{-4}$

   c. Le maximum de la fonction f est atteint pour $t = 2$, et $f(2) = 6$. La dose maximale de 6 mg sera atteinte au bout de 2 heures.

2. **a.** Sur l'intervalle $[0\,;\,2]$, la fonction f est continue et strictement croissante à valeurs dans $[0\,;\,6]$. Or $5 \in [0\,;\,6]$, donc d'après le corollaire du TVI (théorème des valeurs intermédiaires), l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[0\,;\,2]$.
   À la calculatrice, $\alpha \approx 1,02$.

   b. D'après le tableau de variations, $f(t) \geqslant 5 \iff t \in [\alpha\,;\,\beta]$. De plus $\beta - \alpha = 2,44$ (heures).
   Donc le traitement sera efficace pendant 2,44 heures soit environ 146 minutes.

Partie A

1. Au bout d'une heure, la quantité de médicament dans le sang diminue de 30 %, donc il en reste 70 %. Puis on en injecte à nouveau 1,8 mg. Sachant que $u_0 = 2$, alors $u_1 = 0{,}70 \times 2 + 1{,}8 = 3{,}2$. Au bout d'une heure, la quantité de médicament dans le sang sera de 3,2 mg.
2. Soi $n \in \mathbb{N}$. u_n désigne la quantité de médicament dans le sang au bout de n heures. Une heure plus tard, il ne restera que 70 % de la quantité précédente (70 % de u_n), puis on en ajoute 1,8 mg par injection.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}7 \times u_n + 1{,}8$.
3. **a.** Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.
Initialisation : $u_0 = 2$ et $u_1 = 3{,}2$. Donc $u_0 \leqslant u_1 < 6$. L'initialisation est vérifiée.
Hérédité : on suppose que si $n \in \mathbb{N}$, alors $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.
Montrons que $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 6$.
$u_n \leqslant u_{n+1} < 6 \iff 0{,}7 \times u_n \leqslant 0{,}7 \times u_{n+1} < 0{,}7 \times 6 \iff 0{,}7u_n \leqslant 0{,}7u_{n+1} < 4{,}2$
donc $0{,}7u_n + 1{,}8 \leqslant 0{,}7u_{n+1} + 1{,}8 < 4{,}2 + 1{,}8 \iff 0{,}7u_n + 1{,}8 \leqslant 0{,}7u_{n+1} + 1{,}8 < 6$.
Donc $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 6$. L'hérédité est démontrée.
Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$.
D'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.
b. Nous venons de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$. Cela signifie que la suite (u_n) est croissante et majorée par 6. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite finie notée ℓ.
c. La suite (u_n) converge vers ℓ donc ℓ est l'unique solution de l'équation $\ell = 0{,}7\ell + 1{,}8$ (théorème du point fixe).
$l = 0{,}7l + 1{,}8 \iff 0{,}3l = 1{,}8 \iff l = 6$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 6$
4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = -u_n + 6$.
a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -u_{n+1} + 6 = -(0{,}7 \times u_n + 1{,}8) + 6 = -0{,}7u_n + 4{,}2 = 0{,}7\left(-u_n + \dfrac{4{,}2}{0{,}7}\right)$
$= 0{,}7(-u_n + 6) = 0{,}7v_n$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0{,}7n_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison 0,7 et de premier terme $v_0 = -u_0 + 6 = 4$.
b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 4 \times 0{,}7^n$.
De plus $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = -u_n + 6$ donc $u_n = -v_n + 6 = 6 - 4 \times 0{,}7^n$.
c. $u_n \geqslant 5{,}5 \iff 6 - 4 \times 0{,}7^n \geqslant 5{,}5 \iff -4 \times 0{,}7^n \geqslant -0{,}5 \iff 0{,}7^n \leqslant \dfrac{-0{,}5}{-4}$
$\iff \ln(0{,}7^n) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{8}\right) \iff n \times \ln(0{,}7) \leqslant -\ln(8) \iff n \geqslant -\dfrac{\ln(8)}{\ln(0{,}7)}$ car $\ln(0{,}7) < 0$
Donc $n \geqslant -\dfrac{2\ln(2)}{\ln(0{,}7)}$. À la calculatrice : $-\dfrac{2\ln(2)}{\ln(0{,}7)} \approx 5{,}83$ donc $n \geqslant 6$.
Cela signifie que $u_6 \geqslant 5{,}5$. Il faudra donc au total 7 injections (de l'injection initiale u_0 à la 7e qui correspond à u_6).

Éléments de la correction de l'exercice 5
Métropole 8 septembre 2022

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x},$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   L'axe des abscisses est asymptote horizontale au graphe de la fonction f au voisinage de plus l'infini.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a. En dérivant $f(x)$ comme un quotient, on obtient pour $x \geqslant 1$:
   $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.
   b. Quel que soit x, $x^2 \geqslant 0$, le signe de $f'(x)$ est donc celui du numérateur $1 - \ln x$:
   - $1 - \ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff \text{e} > x$: $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $[1\ ;\ \text{e}]$;
   - $1 - \ln x < 0 \iff 1 < \ln x \iff \text{e} < x$: $f'(x) < 0$ sur l'intervalle $[\text{e}\ ;\ +\infty[$.
   - $1 - \ln x = 0 \iff 1 = \ln x \iff \text{e} = x$.

   On a donc le tableau de signes de $f'(x)$:

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

   c. $f(1) = 0$ et $f(\text{e}) = \dfrac{1}{\text{e}}$; on dresse le tableau de variations de la fonction f sur $[1\ ;\ +\infty[$.

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\text{e}}$	$\searrow$	0

3. **a.** D'après le tableau de variations sur l'intervalle $[1\,;\,\text{e}]$, la fonction est strictement croissante de 0 à $\dfrac{1}{\text{e}}$: l'équation $f(x) = k$ avec $0 \leqslant k \leqslant \dfrac{1}{\text{e}}$ a donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires une solution unique.

   b. D'après le tableau de variations $f(x) \leqslant \dfrac{1}{\text{e}}$ (maximum de f) : l'équation $f(x) = k$ avec $k > \dfrac{1}{\text{e}}$ n'a donc pas de solution

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \text{e}^{\frac{x}{4}}$.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = \text{e}^{\frac{u_n}{4}}$ c'est-à-dire : $u_{n+1} = g\left(u_n\right)$.

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
   $g'(x) = \dfrac{1}{4}\text{e}^{\frac{x}{4}}$: produit de deux facteurs supérieurs à zéro, cette dérivée est supérieure à zéro, donc g est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \text{e}$.
   - *Initialisation*
     $u_0 = 1$ et $u_1 = \text{e}^{u_0} = \text{e}^1 = \text{e}$. On a bien : $u_0 \leqslant u_1 \leqslant \text{e}$; la propriété est vraie pour $n = 0$.
   - *Hérédité*
     Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \text{e}$.
     Par croissance de la fonction g, on a : $g\left(u_n\right) \leqslant g\left(u_{n+1}\right) \leqslant g\left(\text{e}\right)$ soit
     $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant g\left(\text{e}\right)$
     Or $g\left(\text{e}\right) = \text{e}^{\frac{\text{e}}{4}} \approx 1{,}97$; donc $g\left(\text{e}\right) \leqslant \text{e}$ et l'encadrement précédent devient :
     $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \text{e}$: la propriété est vraie au rang $n+1$.
   - *Conclusion*
     L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$, il est vrai au rang $n+1$; d'après le principe de récurrence : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \text{e}$.
3. L'encadrement précédent montre :
   — que la suite (u_n) est croissante ;
   — que la suite (u_n) est majorée par e.

   Donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers une limite inférieure ou égale à e.

On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ est solution de l'équation : $\text{e}^{\frac{x}{4}} = x$.

4. Quel que soit $x > 0$, $\text{e}^{\frac{x}{4}} = x \iff \dfrac{x}{4} = \ln x$, par croissance de la fonction ln.
   Or $\dfrac{x}{4} = \ln x \iff \dfrac{1}{4} = \dfrac{\ln x}{x}$, soit finalement : $f(x) = \dfrac{1}{4}$ avec f fonction définie dans la partie A.

5. On a : $e < 4$ donc $\dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{e}$ donc $0 \leqslant \dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{e}$.

D'après la question **3. a.** de la partie A, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{4}$ a donc une solution unique sur l'intervalle $[1\,;\,e]$.

La calculatrice donne : $f(1) = 0$ et $f(2) = \dfrac{\ln 2}{2} \approx 0{,}346$;

$f(1{,}4) \approx 0{,}24$ et $f(1{,}5) \approx 0{,}27$, donc $1{,}4 < \ell < 1{,}5$;

$f(1{,}42) \approx 0{,}247$ et $f(1{,}43) \approx 0{,}251$, donc $1{,}42 < \ell < 1{,}43$;

$f(1{,}429) \approx 0{,}249\,8$ et $f(1{,}430) \approx 0{,}250\,1$, donc $1{,}429 < \ell < 1{,}430$;

Finalement $\ell \approx 1{,}43$ au centième près.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 6

Métropole 9 septembre 2022

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x - x\ln x$,
où ln désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A

1. On cherche la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.
   On sait que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\ln x = 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = 0$.
2. On cherche la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
   $f(x) = x(1 - \ln x)$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \ln x = -\infty$
   Par produit de limites, on déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
3. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a. Pour tout réel $x > 0$, on a : $f'(x) = 1 - 1 \times \ln x - x \times \dfrac{1}{x} = -\ln x$.
   b. On détermine le signe de $f'(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	||	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	

$f(1) = 1 - \ln 1 = 1$; on établit le tableau des variations de la fonction f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ 0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

4. On résout l'équation $f(x) = x$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
$f(x) = x \iff x - x\ln x = x \iff -x\ln x = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1$

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser avec profit certains résultats de la partie A.
On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0{,}5 \\ u_{n+1} & = & u_n - u_n \ln u_n \text{ pour tout entier naturel } n, \end{array}\right.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On rappelle que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0{,}5\,;\,1]$.
Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $0{,}5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

- Pour $n = 0$, $u_n = u_0 = 0{,}5$ et $u_1 = f(u_0) = f(0{,}5) \approx 0{,}85$.
On a donc $0{,}5 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$, ce qui vaut dire que $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- On suppose la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire que $0{,}5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
La fonction f est croissante sur $[0{,}5\,;\,1]$ donc $f(0{,}5) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1)$.
Or $f(0{,}5) \approx 0{,}85 \geqslant 0{,}5$, $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(1) = 1$.
On a donc : $0{,}5 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$, donc la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
- La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie au rang 0 ; de plus elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, on a : $0{,}5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

2. **a.** Des inégalités $0{,}5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$, on peut déduire :

- $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante ;
- $u_n \leqslant 1$ donc la suite (u_n) est majorée par 1.

D'après le théorème de la convergence monotone, on peut en déduire que la suite (u_n) est convergente.

b. On note ℓ la limite de la suite (u_n).
Pour tout n, on a $f(u_n) = u_{n+1}$. La fonction f étant continue, la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie donc $f(\ell) = \ell$.
L'équation $f(x) = x$ a pour solution $x = 1$ donc on peut dire que $\ell = 1$.

Partie C

Pour un nombre réel k quelconque, on considère la fonction f_k définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f_k(x) = kx - x\ln x$.

1. On étudie les variations de la fonction f_k.

   $f_k'(x) = k - \ln x - x \times \dfrac{1}{x} = k - 1 - \ln x$

   - $f_k'(x) = 0 \iff k - 1 - \ln x = 0 \iff k - 1 = \ln x \iff \mathrm{e}^{k-1} = x$
   - $f_k'(x) > 0 \iff k - 1 - \ln x > 0 \iff k - 1 > \ln x \iff \mathrm{e}^{k-1} > x$

   Donc $f_k'(x) > 0$ si $x < \mathrm{e}^{k-1}$, $f_k'(x) = 0$ si $x = \mathrm{e}^{k-1}$ et $f_k'(x) < 0$ si $x > \mathrm{e}^{k-1}$.

   On en déduit que la fonction f_k admet un maximum y_k atteint pour $x_k = \mathrm{e}^{k-1}$.

2. $x_k = \mathrm{e}^k - 1$ donc

   $$\begin{aligned} y_k = f_k(x_k) = kx_k - x_k \ln x_k &= k\mathrm{e}^{k-1} - \mathrm{e}^{k-1}\ln \mathrm{e}^{k-1} = k\mathrm{e}^{k-1} - \mathrm{e}^{k-1}(k-1) \\ &= k\mathrm{e}^{k-1} - k\mathrm{e}^{k-1} + \mathrm{e}^{k-1} = \mathrm{e}^{k-1} = x_k \end{aligned}$$

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 7

Centres Étrangers 11 mai 2022

EXERCICE 3 7 points **Thèmes : Fonction exponentielle et suite**

Partie A :

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \mathrm{e}^x - x$$

1. - $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$, donc par somme de limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$.
   - Pour $x \neq 0$, $h(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - 1\right)$.

   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - 1 = +\infty$ et par produit de limites :
   $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$;
2. Somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
   $h'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.
   - $h'(x) > 0 \iff \mathrm{e}^x - 1 > 0 \iff \mathrm{e}^x > 1 \iff \mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0 \iff x > 0$;

- $h'(x) < 0 \iff \mathrm{e}^x - 1 < 0 \iff \mathrm{e}^x < 1 \iff \mathrm{e}^x < \mathrm{e}^0 \iff x < 0$.
  La fonction h est donc décroissante sur $\mathbb{R}_-$ de plus l'infini à $h(0) = \mathrm{e}^0 - 0 = 1$, puis croissante sur $\mathbb{R}_+$ de $h(0) = 1$ à plus l'infini.

3. h étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, $\quad 0 < a < b \Rightarrow h(0) < h(a) < h(b)$.
Comme $h(0) = 1$, on a donc $1 < h(a) < h(b) \Rightarrow h(a) - h(b) < 0$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$.

1. On a $M(x\,;\ y) \in T \iff y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.
On a $f'(x) = f(x) = \mathrm{e}^x$ d'où $f'(0) = \mathrm{e}^0 = 1$ et $f(0) = \mathrm{e}^0 = 1$.
$M(x\,;\ y) \in T \iff y - 1 = 1(x - 0) \iff y = x + 1$.

Dans la suite de l'exercice on s'intéresse à l'écart entre T et $\mathscr{C}_f$ au voisinage de 0.
Cet écart est défini comme la différence des ordonnées des points de T et $\mathscr{C}_f$ de même abscisse.
On s'intéresse aux points d'abscisse $\dfrac{1}{n}$, avec n entier naturel non nul.
On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} - 1$$

2. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^0 = 1$ et enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 - 0 - 1 = 0$.

3. **a.** On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} - u_n = \exp\left(\dfrac{1}{n+1}\right) - \dfrac{1}{n+1} - 1 - \left(\exp\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n} - 1\right) =$
$\exp\left(\dfrac{1}{n+1}\right) - \dfrac{1}{n+1} - 1 - \exp\left(\dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{n} + 1 = \exp\left(\dfrac{1}{n+1}\right) - \dfrac{1}{n+1} - \exp\left(\dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{n} =$
$\exp\left(\dfrac{1}{n+1}\right) - \dfrac{1}{n+1} - \left[\exp\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}\right] = h\left(\dfrac{1}{n+1}\right) - h\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

b. On a n non nul, donc $0 < n < n+1 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} \Rightarrow h\left(\dfrac{1}{n+1}\right) < h\left(\dfrac{1}{n}\right) \Rightarrow$
$h\left(\dfrac{1}{n+1}\right) - h\left(\dfrac{1}{n}\right) < 0$.
Finalement pour n non nul, $u_{n+1} - u_n < 0$ ce qui montre que la suite (u_n) est décroissante.

4. Le tableau montre que $u_8 \approx 0{,}008 < 10^{-2}$.
Donc pour $x = \dfrac{1}{8}$, l'écart entre la courbe et la tangente est inférieur à un centième.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 8

Centres Étrangers 12 mai 2022

1. • On sait que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

   • Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, on a par produit de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty$ et enfin $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. **a.** La fonction f est continue et dérivable sur $]0~;~+\infty[$. En utilisant le formule de la dérivée d'un produit, $\forall x \in]0~;~+\infty[$, $f'(x) = 1\times\ln(x) + x\times\dfrac{1}{x} = \ln(x)+1$

   b. $f'(x) \geqslant 0 \iff \ln(x)+1 \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant -1 \iff x \geqslant \text{e}^{-1}$.

   Dans le tableau : $f\left(\text{e}^{-1}\right) = \text{e}^{-1}\ln(\text{e}^{-1}) + 1 = -\text{e}^{-1}+1 = 1-\text{e}^{-1} > 0$

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$			
$f(x)$	$\Vert$ 1	$\searrow$	$1-\text{e}^{-1}\approx 0{,}632$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

   c. $f(1) = 1$. D'après les variations de la fonction f,

   — $\forall x \in]0~;~\text{e}^{-1}]$, $f(x) \in [1-\text{e}^{-1}~;~1[$;

   — $\forall x \in [\text{e}^{-1}~;~1]$, $f(x) \in [1-\text{e}^{-1}~;~1]$.

   Donc $\forall x \in]0~;~1]$, $f(x) \in \left[1-\text{e}^{-1}~;~1\right]$. Or $1-\text{e}^{-1} > 0$ donc $f(x) \in]~0~;~1]$ pour tout réel x dans $]0~;~1]$.

3. **a.** L'équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation :

   $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

   Avec $f'(1) = 1$ et $f(1) = 1$, on en déduit l'équation de $(T)~:~y = x-1+1 = x$, soit

   $M(x~;~y) \in (T) \iff y = x$.

   b. Nous savons que $\forall x \in]0~;~+\infty[$, $f'(x) = \ln(x)+1$.

   La fonction f' est continue et dérivable sur $]0~;~+\infty[$, et $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$, donc f est convexe sur $]0~;~+\infty[$.

   c. La courbe représentative d'une fonction convexe est au-dessus de toutes ses tangentes. En particulier $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (T). Donc $\forall x \in]0~;~+\infty[$, $f(x) \geqslant x$.

4. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0~;~1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Montrons par récurrence que $0 < u_n < 1$ pour tout entier naturel n.
Initialisation : on a $u_0 \in]0~;~1[$, soit $0 < u_0 < 1$: l'encadrement est vrai au rang 0 ;
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $0 < u_n < 1$.
On a vu à la question **2. b.** que si $0 < x < 1$, alors $0 < f(x) < 1$.
Donc si $0 < u_n < 1$, alors $0 < f(u_n) < 1$, soit $0 < u_{n+1} < 1$.
Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$, il l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < 1$.

b. D'après la question **3.c**, pour tout réel x positif, $f(x) > x$.
De plus pour tout entier naturel n, $u_n > 0$
Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) > u_n$ donc $u_{n+1} > u_n$. La suite (u_n) est donc croissante.

c. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite finie notée l.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 9

Asie 17 mai 2022

Principaux domaines abordés : Suites numériques. Algorithmique et programmation.

Un médicament est administré à un patient par voie intraveineuse.

Partie A : modèle discret de la quantité médicamenteuse

1. Au bout de 30 min, 10 % de 1 mg ont disparu : il en reste donc 0,9 mg et on donne alors 0,25 mg supplémentaires : on a donc $u_1 = 1{,}15$.
2. Si u_n est la quantité de médicament présente au bout de n périodes de 30 min, à la $(n+1)^{\text{e}}$ période 10 % auront disparu ; il en restera donc $0{,}9u_n$ et on donne alors 0,25 mg de médicament supplémentaire ; on a donc $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 0{,}25$.
3. **a.** *Initialisation* Pour $n = 0$. On a $u_0 = 1$ et $u_1 = 1{,}15$ soit $u_0 \leqslant u_1 < 5$:l'encadrement est réalisé au rang 0.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $u_n \leqslant u_{n+1} < 5$.
Alors en multipliant par 0,9 : $0{,}9u_n \leqslant 0{,}9u_{n+1} < 0{,}9 \times 5$ et en ajoutant 0,25 à chaque membre : $0{,}9u_n + 0{,}25 \leqslant 0{,}9u_{n+1} + 0{,}25 < 0{,}9 \times 5 + 0{,}25$, soit $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 4{,}75 < 5$.
On a donc : $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 5$: l'encadrement est vrai au rang $(n+1)$.
L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang n, il l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence : pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} < 5$.

b. La première partie du résultat précédent montre que la suite (u_n) est croissante et la deuxième que cette suite est majorée par 5 : elle est donc convergente vers une limite $\ell \leqslant 5$.

4. **a.** Recopier et compléter le script écrit en langage Python suivant de manière à déterminer au bout de combien de périodes de trente minutes le médicament commence à être réellement efficace.

```
def efficace():
  u=1
  n=0
  while u < 1.8 :
      u=0.9*u+0.25
      n = n+1
   return n
```

b. Le script renvoie $n = 8$,car $u_8 \approx 1{,}854 > 1{,}8$.
Le médicament est réellement efficace après 4 heures.

5. **a.** On a donc $v_{n+1} = 2{,}5 - u_{n+1} \iff u_{n+1} = 2{,}5 - v_{n+1} = 0{,}9u_n + 0{,}25$.
Or $v_n = 2{,}5 - u_n \iff u_n = 2{,}5 - v_n$; l'égalité précédente devient donc :
$2{,}5 - v_{n+1} = 0{,}9\,(2{,}5 - v_n) + 0{,}25 \iff 2{,}5 - v_{n+1} = 2{,}25 - 0{,}9v_n + 0{,}25 \iff v_{n+1} = 0{,}9v_n$: cette égalité montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 de premier terme $v_0 = 2{,}5 - u_0 = 2{,}5 - 1 = 1{,}5$.

b. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}, , v_n = v_0 \times 0{,}9^n$, soit $v_n = 1{,}5 \times 0{,}9^n$, d'où puisque $u_n = 2{,}5 - v_n$:
Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2{,}5 - 1{,}5 \times 0{,}9^n$.

c. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}, 0{,}9^n < 1$, car $-1 < 0{,}9 < 1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}9^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2{,}5 < 3$.
Conclusion : à aucun moment le traitement ne sera dangereux pour le patient.

Partie B : modèle continu de la quantité médicamenteuse

$$f(t) = 2{,}5 - 1{,}5\mathrm{e}^{-0{,}2t},$$

1. $3\text{ h }45\text{ min} = 3 + \dfrac{45}{60} = 3 + \dfrac{3}{4} = 3 + \dfrac{75}{100} = 3 + 0{,}75 = 3{,}75$.
On a donc $f(3{,}75) = 2{,}5 - 1{,}5\mathrm{e}^{-0{,}2\times3{,}75} = 2{,}5 - 1{,}5 \times \mathrm{e}^{-0{,}75} \approx 1{,}791 < 1{,}8$. Le traitement n'est pas efficace au bout de 3 h 45 min.

2. Il faut trouver t tel que $f(t) \geqslant 1{,}8$, soit
$2{,}5 - 1{,}5\mathrm{e}^{-0{,}2t} \geqslant 1{,}8 \iff 0{,}7 \geqslant 1{,}5\mathrm{e}^{-0{,}2t} \iff \frac{7}{15} \geqslant \mathrm{e}^{-0{,}2t}$, soit par croissance du logarithme :
$\ln\frac{7}{15} \geqslant -0{,}2t \iff -5\ln\frac{7}{15} \leqslant -5 \times (-0{,}2t)$ car $-5 < 0$, soit enfin $t \geqslant -5\ln\frac{7}{15}$.
Or $-5\ln\frac{7}{15} \approx 3{,}8107$ soit 3 h et $0{,}8107 \times 60 = 48{,}64$ min soit environ 3 h 49 min.

3. Ce temps est inférieur à celui de la question 4. b. La perfusion est donc plus rapidement efficace.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 10

Asie 18 mai 2022

Principaux domaines abordés : Suites numériques. Algorithmique et programmation.

Dans cet exercice, on modélise le développement d'une bactérie avec les hypothèses suivantes : cette bactérie a une probabilité 0,3 de mourir sans descendance et une probabilité 0,7 de se diviser en deux bactéries filles. Pour tout entier naturel n, on appelle p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie.
On admet que, d'après ce modèle, la suite $\left(p_n\right)$ est définie de la façon suivante :
$p_0 = 0,3$ et, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,3 + 0,7p_n^2$.

1. La feuille de calcul ci-dessous donne des valeurs approchées de la suite $\left(p_n\right)$

a.
- $p_1 = 0,3 + 0,7 \times 0,3^2 = 0,3 + 0,7 \times 0,09 = 0,3 + 0,063 = 0,363$;
- $p_2 = 0,3 + 0,7 \times 0,363^2 = 0,3 + 0,7 \times 0,131\,769 = 0,3 + 0,092\,238\,3 = 0,392\,238\,3$.

b. La probabilité d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type est égale à $1 - p_{10} \approx 1 - 0,428\,020\,18 \approx 0,571\,980 \approx 0,572$ au millième près.

c. D'après le tableau la suite $\left(p_n\right)$ semble être croissante et semble aussi avoir une limite puisque les quatre derniers résultats commencent par 0,428 5...

2. **a.** On veut démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel $n, 0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$.

Initialisation : On a $0 \leqslant 0,3 \leqslant 0,363 \leqslant 0,5$, soit $0 \leqslant p_0 \leqslant p_1 \leqslant 0,5$: la relation est vraie au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$.

Si ces nombres positifs sont rangés dans dans cet ordre, leurs carrés aussi, soit
$0 \leqslant p_n^2 \leqslant p_{n+1}^2 \leqslant 0,5^2$, puis en multipliant par 0,7 :
$0 \leqslant 0,7 \times p_n^2 \leqslant 0,7 \times p_{n+1}^2 \leqslant 0,7 \times 0,5^2$ et enfin en ajoutant à chaque membre 0,3 :
$0,3 \leqslant 0,3 + 0,7 \times p_n^2 \leqslant 0,3 + 0,7 \times p_{n+1}^2 \leqslant 0,3 + 0,7 \times 0,5^2$, soit
$0,3 \leqslant p_{n+1} \leqslant p_{n+2} \leqslant 0,475$. On peut donc écrire :
$0 \leqslant p_{n+1} \leqslant p_{n+2} \leqslant 0,5$: la relation est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et si elle vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est encore vraie au rang $n+1$: d'après la principe de récurrence, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$

b. Le résultat précédent montre que la suite $\left(p_n\right)$ est croissante et majorée par 0,5 : elle est donc convergente vers une limite L telle que $L \leqslant 0,5$.

3. **a.** Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} p_{n+1} = L$, la relation de récurrence donne :

$$L = 0{,}3 + 0{,}7L^2 \iff 0{,}7L^2 - L + 0{,}3 = 0$$

L est solution de l'équation $0{,}7x^2 - x + 0{,}3 = 0$.

b. On a $\Delta = 1 - 4\times 0{,}7\times 0{,}3 = 1 - 0{,}84 = 0{,}16 = 0{,}4^2 > 0$. Il y a donc deux solutions :

$$L_1 = \frac{1+0{,}4}{2\times 0{,}7} = 1, \quad \text{et} \quad L_2 = \frac{1-0{,}4}{2\times 0{,}7} = \frac{0{,}6}{1{,}4} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} \approx 0{,}43$$

On ne peut retenir la solution L_1 puisque (p_n) est majorée par 0,5. Il reste donc L_2 : $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{3}{7}$.

4. La fonction suivante, écrite en langage Python, a pour objectif de renvoyer les n premiers termes de la suite (p_n).
On complète, les lignes 2, 4 et 5 de cette fonction de façon à ce que la fonction `suite (n)` retourne, sous forme de liste, les n premiers termes de la suite.

```
1 def suite(n) :
2   p = 0.3
3   s = [p]
4   for i in range (n - 1)
5       p = 0.3+0.7*p**2
6       s.append(p)
7   return (s)
```

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 11

Centre Etrangers Groupe 1 - 18 mai 2022

Principaux domaines abordés : Suites ; Fonctions, Fonction exponentielle.

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 1 + x - \mathrm{e}^{0{,}5x-2}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa dérivée.

1. **a.** On a $\lim\limits_{x \to -\infty} 0{,}5x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} 0{,}5x - 2 = -\infty$ et par composition de limites avec $X = 0{,}5x - 2$, $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$ et comme $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ par somme de limites :
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

b. Démontrer que, pour tout réel x non nul, $f(x) = 1 + 0{,}5x\left(2 - \dfrac{\mathrm{e}^{0,5x}}{0{,}5x} \times \mathrm{e}^{-2}\right)$.

On a $f(x) = 1 + \left[x - \mathrm{e}^{0,5x-2}\right]$ et en factorisant $0{,}5x$ dans le crochet :
$f(x) = 1 + 0{,}5x\left[2 - \dfrac{\mathrm{e}^{0,5x-2}}{0{,}5x}\right] = 1 + 0{,}5x\left(2 - \dfrac{\mathrm{e}^{0,5x}}{0{,}5x} \times \mathrm{e}^{-2}\right)$.
En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
Avec $X = 0{,}5x$, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} 0{,}5x = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} X = +\infty$.
mais $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} \times \mathrm{e}^{-2} = +\infty$, puis $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{\mathrm{e}^X}{X} \times \mathrm{e}^{-2} = -\infty$ et enfin
$\lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} \times \mathrm{e}^{-2} = -\infty$
Enfin par produit de limites :
$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} 0{,}5x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} \times \mathrm{e}^{-2} = -\infty \end{array}\right. \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

2. **a.** f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = 1 - 0{,}5\mathrm{e}^{0,5x-2}$.

b. On a dans $\mathbb{R}$,
$f'(x) < 0 \iff 1 - 0{,}5\mathrm{e}^{0,5x-2} < 0 \iff 1 < 0{,}5\mathrm{e}^{0,5x-2} \iff 2 < \mathrm{e}^{0,5x-2}$. par croissance sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction logarithme népérien $\ln 2 < 0{,}5x - 2 \iff 2 + \ln 2 < 0{,}5x \iff 4 + 2\ln 2 < x$.
Conclusion : $S =]4 + 2\ln(2)\,;\, +\infty[$

3. On démontrerait de la même façon que $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $]-\infty\,;\, 4 + 2\ln 2[$.
La fonction f est donc croissante sur $]-\infty\,; 4+2\ln 2[$ puis décroissante sur $]4+2\ln(2)\,;\, +\infty[$.
$f(4 + 2\ln 2) = 1 + 4 + 2\ln 2 - \mathrm{e}^{2+\ln 2-2} = 5 + 2\ln 2 - \mathrm{e}^{\ln 2} = 5 + 2\ln 2 - 2 = 3 + 2\ln 2$. C'est le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{0,5x-2} = 0$, on a par somme de limites $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

4. L'intervalle $[-1\,;\, 0]$ est inclus dans l'intervalle $]-\infty\,; 4 + 2\ln 2[$, donc est croissante sur cet intervalle de $f(-1) = 1 - 1 - \mathrm{e}^{-1,5} = -\mathrm{e}^{-1,5} < 0$ à $f(0) = 1 - \mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}85 > 0$.
La fonction f étant continue puisque dérivable le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'il existe un réel unique $\alpha \in [-1\,;\, 0]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie à la partie A.

1. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4.$$

Initialisation : On a $u_0 = 0$, puis $u_1 = f(u_0) = f(0) = 1 - \mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}85$.
On a donc bien pour $n = 0$: $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
On a vu dans la partie A que sur l'intervalle $]-\infty\,;\ 4 = 2\ln 2[$, donc sur l'intervalle $]-\infty\,;\ 4[$, la fonction est croissante et l'hypothèse de récurrence donne
$f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(4)$.
Or $f(4) = 1 + 4 - \mathrm{e}^{2-2} = 5 - 1 = 4$.
On a donc $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.
Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0, et s'il est vrai pour $n \in \mathbb{N}$, il l'est aussi pour $n+1$. Le principe de récurrence montre donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

b. Le résultat précédent montre que la suite (u_n) est croissante et majorée par 4 : elle donc convergente vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant 4$.

2. **a.** $\ell = f(\ell) \iff \ell = 1 + \ell - \mathrm{e}^{0{,}5\ell - 2} \iff \mathrm{e}^{0{,}5\ell-2} = 1 \iff 0{,}5\ell - 2 = 0$ (par croissance de la fonction logarithme népérien sur $\mathbb{R}_+^*$), d'où $0{,}5\ell = 2 \iff \ell = 4$.
La suite (u_n) a pour limite 4.

b.

L'algorithme calcule les premiers termes de la suite (u_n) jusqu'à celui qui est supérieur à 3,99 : 12 signifie que u_{12} est le premier terme supérieur à 3,99.

Éléments de la correction de l'exercice 12

centres Etrangers 19 mai 2022

1. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est continue en 0 et $\mathrm{e}^{-0} = 1$. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty$

2. La fonction f est continue et dérivable sur $]0\,;\ 1]$.
$\forall x \in]0\,;\ 1]$, $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-x\mathrm{e}^{-x} + 1}{x} = \dfrac{1 - x\mathrm{e}^{-x}}{x}$

3. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est continue, dérivable de dérivée $x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}$. Or $\forall x \in]0~;~1]$, $-\mathrm{e}^{-x} < 0$. donc la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est strictement décroissante sur $]0~;~1]$.
Donc $\forall x \in]0~;~1]$, : $e^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-x} < \mathrm{e}^{0} < 1$ donc $0 < \mathrm{e}^{-x} < \mathrm{e}^{0} < 1$. De plus $0 < x \leqslant 1$ donc $0 < x\mathrm{e}^{-x} < 1$.
Cela signifie que $\forall x \in]0~;~1]$, $1 - x\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0~;~1]$. $f(1) = \mathrm{e}^{-1} + \ln(1) = \mathrm{e}^{-1}$.
Ci-dessous le tableau de variation de la fonction f :

x	0		1
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	
f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}

4. La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0~;~1]$ à valeurs dans $]-\infty~;~\mathrm{e}^{-1}]$. Or $0 \in]-\infty~;~\mathrm{e}^{-1}]$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée ℓ, dans $]0~;~1]$.
À la calculatrice : $\ell \approx 0{,}567$.

Partie B

On définit deux suites (a_n) et (b_n) par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_0 & = & \dfrac{1}{10} \\ b_0 & = & 1 \end{array}\right. \text{ et, pour tout entier naturel } n, \left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \mathrm{e}^{-b_n} \\ b_{n+1} & = & \mathrm{e}^{-a_n} \end{array}\right.$$

1. **a.** $a_1 = \mathrm{e}^{-b_0} = \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}37$ et $b_1 = \mathrm{e}^{a_0} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{10}} \approx 0{,}90$.

b. Pour utiliser en Python la fonction exponentielle, il faut charger en premier la fonction *exp()* de la librairie "math" : *from math import exp*.

```
from math import exp
def termes(n) :
  a = 1/10
  b = 1
  for k in range(0, n) :
    c = exp(-b)
    b = exp(-a)
    a = c
  return(a, b)
```

2. **a.** Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$.
Initialisation : $a_0 = \dfrac{1}{10}$ $\quad a_1 = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ $\quad b_0 = 1 = \mathrm{e}^{0}$ $\quad b_1 = \mathrm{e}^{-\frac{1}{10}}$.
La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $-1 \leqslant -\dfrac{1}{10} \leqslant 0$ donc , $\mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{10}} \leqslant \mathrm{e}^{0}$ et $\dfrac{1}{\mathrm{e}} > \dfrac{1}{10}$ donc on peut alors affirmer que $0 < a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0 \leqslant 1$.

L'initialisation est vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et supposons que $0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$.

Montrons que $0 < a_{n+1} \leqslant a_{n+2} \leqslant b_{n+2} \leqslant b_{n+1} \leqslant 1$.

La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc

$0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1 \iff \mathrm{e}^{-0} > \mathrm{e}^{-a_n} \geqslant \mathrm{e}^{-a_{n+1}} \geqslant \mathrm{e}^{-b_{n+1}} \geqslant \mathrm{e}^{-b_n} \geqslant \mathrm{e}^{-1}$

soit $0 < \mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-b_n} \leqslant \mathrm{e}^{-b_{n+1}} \leqslant \mathrm{e}^{-a_{n+1}} \leqslant \mathrm{e}^{-a_n} < 1 \leqslant 1$ donc

$0 < a_{n+1} \leqslant a_{n+2} \leqslant b_{n+2} \leqslant b_{n+1} \leqslant 1$. On obtient ce qu'il fallait démontrer.

L'hérédité est démontrée.

Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$. D'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$.

b. Nous venons de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant 1$ et que $0 \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$.

La suite (a_n) est croissante et majorée par 1. D'après le théorème de convergence monotone, la suite (a_n) converge.

De même, la suite (b_n) est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de convergence monotone, la suite (b_n) converge.

3. **a.** $A = \mathrm{e}^{-B}$ et $B = \mathrm{e}^{-A}$.

$A = \mathrm{e}^{-B} \iff \ln(A) = -B = -\mathrm{e}^{-A}$ donc $\ln(A) + \mathrm{e}^{-A} = 0$ donc $f(A) = 0$.

b. De même $B = \mathrm{e}^{-A} \iff \ln(B) = -A = -\mathrm{e}^{B}$ donc $\ln(B) + \mathrm{e}^{-B} = 0$ donc $f(B) = 0$.

Donc A et B sont deux solutions de l'équation $f(x) = 0$. Or d'après la question A.4, cette équation admet une unique solution, donc $A = B$ et $A - B = 0$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 13

Amérique du Nord 18 mai 2022

On considère la suite (T_n) définie par : $T_0 = 180$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} = 0{,}955T_n + 0{,}9$

1. **a.** Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n \geqslant 20$.

Initialisation : $T_0 = 180 \geqslant 20$. L'initialisation est vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons que $T_n \geqslant 0$. Montrons que $T_{n+1} \geqslant 20$.

$T_n \geqslant 20 \iff 0{,}955 \times T_n \geqslant 0{,}955 \times 20 \iff 0{,}955T_n \geqslant 19{,}1$

$\iff 0{,}955T_n + 0{,}9 \geqslant 19{,}1 + 0{,}9 \iff 0{,}955T_n + 0{,}9 \geqslant 20$. Donc $T_{n+1} \geqslant 20$. L'hérédité est démontrée.

Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$. D'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n \geqslant 20$.

b. $\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+1} - T_n = 0{,}955\ T_n + 0{,}9 - T_n = -0{,}045\ T_n + 0{,}9 = -0{,}045\left(T_n - \dfrac{0{,}9}{0{,}045}\right)$
$= -0{,}045(T_n - 20)$.
Or d'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n \geqslant 20$ donc $T_n - 20 \geqslant 0$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+1} - T_n \leqslant 0$. La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

c. La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée par 20. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie supérieure ou égale à 20.

2. On note $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = T_n - 20$.

a. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = T_{n+1} - 20 = 0{,}955 \times T_n + 0{,}9 - 20 = 0{,}955\ T_n - 19{,}1 = 0{,}955\left(T_n - \dfrac{19{,}1}{0{,}955}\right)$
$= 0{,}955(T_n - 20) = 0{,}955\ u_n$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 0{,}955 u_n$ donc la suite (u_n) est géométrique de raison 0,955 et de premier terme $u_0 = T_0 - 20 = 160$.

b. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times q^n = 160 \times 0{,}955^n$.
De plus $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = T_n - 20$ donc $T_n = u_n + 20 = 160 \times 0{,}955^n + 20$.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}955^n = 0$ car $0{,}955 \in]-1\ ;\ 1[$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = 20$.

d. $T_n \leqslant 120 \iff 160\times0{,}955^n+20 \leqslant 120 \iff 160\times0{,}955^n \leqslant 120-20 \iff 160\times0{,}955^n \leqslant 100$
$\iff 0{,}955^n \leqslant \dfrac{100}{160} \iff 0{,}955^n \leqslant \dfrac{5}{8}$.
Sachant que la fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, on obtient :
$\ln\left(0{,}955^n\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{5}{8}\right) \iff n \times \ln(0{,}955) \leqslant \ln\left(\dfrac{5}{8}\right)$. Or $\ln(0{,}955) < 0$ donc,
$n \geqslant \dfrac{\ln\left(\dfrac{5}{8}\right)}{\ln(0{,}955)}$. À la calculatrice, $\dfrac{\ln\left(\dfrac{5}{8}\right)}{\ln(0{,}955)} \approx 10{,}21$ donc $n \geqslant 11$.

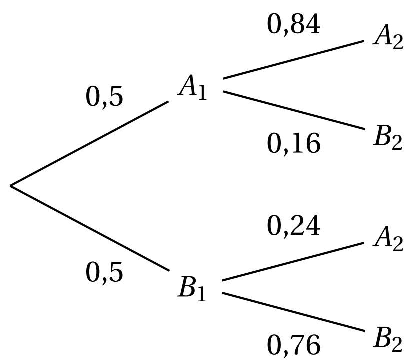
3. **a.** Lorsque le gâteau est sorti du four, il va céder son énergie (sa chaleur) à l'extérieur (environnement ambiant). Sa masse étant très faible par rapport à celle de l'extérieur, il va diminuer sa température pour atteindre celle de l'extérieur, soit 20° C.

b. La fonction Python décrite est un algorithme de seuil : on cherche à partir de quand, la température devient inférieure ou égale au seuil fixé (ici l'argument de la fonction *seuil()* qui est x). La valeur renvoyée sera le premier entier vérifiant $T_n \leqslant x$.
temp(120) fournira le premier nombre entier n tel que $T_n \leqslant 120$, soit d'après la question précédente, $n = 11$. Dans le contexte de l'exercice, il faudra donc 11 minutes avant que la température du plat soit inférieure ou égale à 120° C

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 14

Amérique du Nord 19 mai 2022

1. L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



2. **a.** Utilisons la formule des probabilités totales pour calculer $a_2 = p(A_2)$:

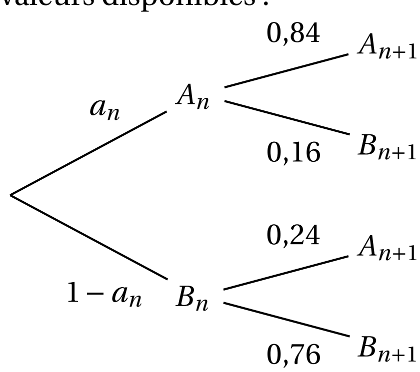
$a_2 = p(A_2 \cap A_1) + p(A_2 \cap B_1) = p_{A_1}(A_2) \times p(A_1) + p_{B_1}(A_2) \times p(B_1)$
$= 0{,}84 \times 0{,}5 + 0{,}24 \times 0{,}5 = 0{,}54$. Donc $a_2 = 0{,}54$.

b. Utilisons la formule de Bayes pour calculer $p_{A_2}(B_1)$:

$$p_{A_2}(B_1) = \frac{p(A_2 \cap B_1)}{p(A_2)} = \frac{p_{B_1}(A_2) \times p(B_1)}{p(A_2)} = \frac{0{,}24 \times 0{,}5}{0{,}54} \approx 0{,}222$$

3. **a.** On remarquera au préalable que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n + b_n = 1$.

L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



b. Utilisons là encore, la formule des probabilités totales pour déterminer a_{n+1} en fonction de a_n, pour tout entier naturel non nul :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap B_n) = p_{A_n}(A_{n+1}) \times p(A_n) + p_{B_n}(A_{n+1}) \times p(B_n)$
$= 0{,}84 \times p(A_n) + 0{,}24 \times p(B_n) = 0{,}84\ a_n + 0{,}24\ b_n$. Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 1 - a_n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = 0{,}84\ a_n + 0{,}24(1 - a_n) = 0{,}6\ a_n + 0{,}24$

c. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}$.

Initialisation : $a_1 = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{1-1} = 0{,}6 - 0{,}1 = 0{,}5$. L'initialisation est vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et supposons que $a_n = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}$.

Montrons que $a_{n+1} = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^n$.

D'après la question précédente, $a_{n+1} = 0{,}6\ a_n + 0{,}24$, donc en utilisant l'hypothèse de récurrence,
$a_{n+1} = 0{,}6\left(0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}\right) + 0{,}24 = 0{,}36 - 0{,}1 \times 0{,}6 \times 0{,}6^{n-1} + 0{,}24 = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n}$.
On obtient ce qu'il fallait démontrer. L'hérédité est démontrée.

Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$. D'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}$.

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}6^{n-1} = 0$ car $0{,}6 \in]-1\,;\,1[$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0{,}6$.
Cela signifie qu'au bout d'un certain temps, la probabilité qu'un vélo soit à la station A est de 60 %.

e. Résolvons : $a_n \geqslant 0{,}599$. $a_n \geqslant 0{,}599 \iff 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1} \geqslant 0{,}599$
$\iff -0{,}1 \times 0{,}6^{n-1} \geqslant -0{,}001 \iff 0{,}6^{n-1} \leqslant \dfrac{-0{,}001}{-0{,}1} \iff 0{,}6^{n-1} \leqslant \dfrac{1}{100}$.
Sachant que la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$,
$0{,}6^{n-1} \leqslant \dfrac{1}{100} \iff \ln\left(0{,}6^{n-1}\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{100}\right) \iff (n-1)\times\ln(0{,}6) \leqslant -\ln(100)$. Or $\ln(0{,}6) < 0$, donc $n - 1 \geqslant \dfrac{-\ln(100)}{\ln(0{,}6)} \iff n \geqslant 1 - \dfrac{2\ln(10)}{\ln(0{,}6)}$.
À la calculatrice, $1 - \dfrac{2\ln(10)}{\ln(0{,}6)} \approx 10{,}02$ donc $n \geqslant 11$.
La probabilité que le vélo se trouve au point A est supérieure à 0,599 à partir du 11-ième jour.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 15

Amérique du Sud 26 septembre 2022

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n^2$.

1. **a.** $u_1 = \dfrac{1}{5}u_0^2 = \dfrac{16}{5}$ et $u_2 = \dfrac{1}{5}u_1^2 = \dfrac{\left(\frac{16}{5}\right)^2}{5} = \dfrac{256}{125}$

b. On complète la fonction ci-dessous qui renvoie la valeur du terme de rang p de la suite (u_n).

```
def suite_u(p) :
  u = 4
  for i in range(1,p + 1) :
      u = u*u/5
  return u
```

2. **a.** Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $0 < u_n \leqslant 4$.

- **Initialisation**
  $u_0 = 4$ et $0 < 4 \leqslant 4$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité**
  On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie, c'est-à-dire $0 < u_n \leqslant 4$ (hypothèse de récurrence).
  $0 < u_n \leqslant 4$ donc $0 < u_n^2 \leqslant 16$ donc $0 < \dfrac{1}{5}u_n^2 \leqslant \dfrac{16}{5}$
  Or $\dfrac{16}{5} = 3{,}2 \leqslant 4$ donc $0 < \dfrac{1}{5}u_n^2 \leqslant 4$, c'est-à-dire $0 < u_{n+1} \leqslant 4$.
  Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel.

On a donc démontré que pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n \leqslant 4$.

b. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{5}u_n^2 - u_n = u_n\left(\dfrac{u_n}{5} - 1\right) = u_n\left(\dfrac{u_n - 5}{5}\right)$

$u_n \leqslant 4$ donc $u_n - 5 < 0$; or $u_n > 0$ donc $u_n(u_n - 5) < 0$ et donc $u_{n+1} - u_n < 0$

On en conclut que la suite (u_n) est décroissante.

c. Pour tout n, $0 < u_n$ donc la suite (u_n) est minorée par 0.

La suite (u_n) est décroissante et minorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

3. **a.**
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{5}u_n^2 = \dfrac{1}{5}\ell^2$;
- Pour tout n, on a : $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n^2$.

On peut en conclure que $\ell = \dfrac{1}{5}\ell^2$.

b. ℓ est solution de l'équation $x = \dfrac{1}{5}x^2$; on résout cette équation.

$x = \dfrac{1}{5}x^2 \iff x\left(1 - \dfrac{1}{5}x\right) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 5$

Or, pour tout n, on a : $0 < u_n \leqslant 4$ donc ℓ vérifie $0 \leqslant \ell \leqslant 4$. La solution $\ell = 5$ n'est donc pas valable donc $\ell = 0$.

4. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \ln(u_n)$ et $w_n = v_n - \ln(5)$.

a. $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln\left(\dfrac{1}{5}u_n^2\right) = \ln\left(\dfrac{1}{5}\right) + \ln\left(u_n^2\right) = -\ln(5) + 2\ln(u_n) = 2\ln(u_n) - \ln(5)$
$= 2v_n - \ln(5)$

b. $w_n = v_n - \ln(5)$ donc $v_n = w_n + \ln(5)$

$w_{n+1} = v_{n+1} - \ln(5) = 2v_n - \ln(5) - \ln(5) = 2(w_n + \ln(5)) - 2\ln(5)$
$= 2w_n + 2\ln(5) - 2\ln(5) = 2w_n$

Donc la suite (w_n) est géométrique de raison 2.

c. $v_0 = \ln(u_0) = \ln(4)$ donc $w_0 = v_0 - \ln(5) = \ln(4) - \ln(5) = \ln\left(\dfrac{4}{5}\right)$

La suite (w_n) est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $w_0 = \ln\left(\dfrac{4}{5}\right)$ donc, pour tout entier naturel n, on a : $w_n = w_0 \times q^n = \ln\left(\dfrac{4}{5}\right) \times 2^n$.

Pour tout n, $v_n = w_n + \ln(5)$ donc $v_n = \ln\left(\dfrac{4}{5}\right) \times 2^n + \ln(5)$.

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$; $\dfrac{4}{5} < 1$ donc $\ln\left(\dfrac{4}{5}\right) < 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{4}{5}\right) \times 2^n = -\infty$, et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.
$v_n = \ln(u_n)$ donc $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$
Or $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{v_n} = 0$.
On a donc redémontré que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Éléments de la correction de l'exercice 16

Amérique du Sud 27 septembre 2022

La population d'une espèce en voie de disparition est surveillée de près dans une réserve naturelle.
Les conditions climatiques ainsi que le braconnage font que cette population diminue de 10 % chaque année.
Afin de compenser ces pertes, on réintroduit dans la réserve 100 individus à la fin de chaque année.
On souhaite étudier l'évolution de l'effectif de cette population au cours du temps. Pour cela, on modélise l'effectif de la population de l'espèce par la suite (u_n) où u_n représente l'effectif de la population au début de l'année $2020 + n$.
On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.
Au début de l'année 2020, la population étudiée compte 2 000 individus, ainsi $u_0 = 2\,000$.

1. Diminuer de 10 % c'est multiplier par $1 - \dfrac{10}{100} = 1 - 0{,}10 = 0{,}9$.

On multiplie donc l'effectif de l'année n, u_n par 0,9 puis on augmente cet effectif de 100 : on a donc

$$u_{n+1} = 0{,}9u_n + 100.$$

2. • $u_0 = 2\,000$,d'où $u_1 = 0,9\times 2\,000+100 = 1\,800+100 = 1\,900$;
   • $u_1 = 1\,900$,d'où $u_2 = 0,9\times 1\,900+100 = 1\,710+100 = 1\,810$.

3. *Initialisation* : $1\,000 < 1\,900 \leqslant 2\,000$, soit $1\,000 < u_1 \leqslant u_0$: l'encadrement est vrai au rang $n = 0$.

   Hérédité : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}, \quad 1\,000 < u_{n+1} \leqslant u_n$.

   En multipliant chaque membre par 0,9, on obtient : $0,9\times 1\,000 < 0,9\times u_{n+1} \leqslant 0,9\times u_n$ puis en ajoutant 100 à chaque membre on obtient :

   $900+100 < 0,9u_{n+1}+100 \leqslant 0,9u_n+100$, soit :

   $1\,000 < u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.

   L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang n, il l'est encore au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel n : $1\,000 < u_{n+1} \leqslant u_n$.

4. La récurrence précédente montre que :

   — la suite (u_n) est décroissante ($u_{n+1} \leqslant u_n$) ;

   — la suite (u_n) est minorée par 1 000

   La suite (u_n) converge.

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1\,000$.

   a. Pour tout entier naturel $n, \quad v_{n+1} = u_{n+1} - 1\,000$, soit $v_{n+1} = 0,9u_n + 100 - 1\,000$, ou encore $v_{n+1} = 0,9u_n - 900 = 0,9\,(u_n - 1\,000)$ et enfin :

   $$v_{n+1} = 0,9v_n.$$

   Cette égalité vraie pour tout naturel n montre que la suite (v_n) rdt une suite géométrique de raison 0,9.

   b. On a donc $v_0 = u_0 - u_0 - 1\,000 = 2\,000 - 1\,000 = 1\,000$.

   On sait que pour tout naturel $n, \quad v_n = v_0 \times q^n$ (avec $q = 0,9$), soit $v_n = 1\,000\times 0,9^n$.

   Or $v_n = u_n - 1\,000 \iff u_n = v_n + 1\,000$, soit $u_n = 1\,000\times 0,9^n + 1\,000 = 1\,000\,(1+0,9^n)$.

   c. Comme $0 < 0,9 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+0,9^n = 1$ et par conséquent :

   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1\,000.$$

   Cela signifie qu'au bout de nombreuses années la population va se rapprocher de 1 000 individus.

6. On souhaite déterminer le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous d'un certain seuil S (avec $S > 1\,000$).

   a. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant 1\,020$.

   On a $u_n \leqslant 1\,020 \iff 1\,000\,(1+0,9^n) \leqslant 1\,020 \iff 1\,000 + 1\,000\times 0,9^n \leqslant 1\,020$

   $\iff 1\,000\times 0,9^n \leqslant 20 \iff 0,9^n \leqslant 0,02 \iff n\ln 0,9 \leqslant \ln 0,02 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0,02}{\ln 0,9}$ (car $\ln 0,9 < 0$).

   La calculatrice donne $\dfrac{\ln 0,02}{\ln 0,9} \approx 37,1$, donc le plus petit entier tel que $u_n \leqslant 1\,020$ est $n = 38$ ($u_{38} \approx 1\,018,25$).

b.

```
def population(S) :
  n=0
  u=2000

  while u >1 020:
    u= 0.9*u+100
    n = n + 1
  return n
```

Éléments de la correction de l'exercice 17

Nouvelle Calédonie 26 octobre 2022

1. On définit la suite (u_n) par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. • $u_1 = (-1)^3\mathrm{e}^{-1} = -\mathrm{e}^{-1} = -\dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx -0{,}368$;

• $u_2 = f(u_1) = \left(-\mathrm{e}^{-1}\right)^3\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}}\right) = -\mathrm{e}^{-3} \times \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}}\right) = -\mathrm{e}^{-3-\mathrm{e}^{-1}} \approx -0{,}034$.

b. On a `fonc(2)`$= u_2 \approx -0{,}034$.

2. **a.** En dérivant $f(x)$ comme un produit on obtient :

$f'(x) = 3x^2\mathrm{e}^x + x^3\mathrm{e}^x = x^2\mathrm{e}^x(3+x)$.

b.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
f	0		$+\infty$
		$-27\mathrm{e}^{-3}$	

• Quel que soit le réel x, $x^2 \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $3+x$ qui s'annule pour $x = -3$, d'où les deux intervalles de variations ;

$3 + x < 0 \iff x < -3$: sur $]-\infty\,;\,-3[$, $f'(x) < 0$: la fonction f est donc décroissante sur $]-\infty\,;\,-3[$;

$3 + x > 0 \iff x > -3$: sur $]-3\,;\,+\infty[$, $f'(x) > 0$: la fonction f est donc croissante sur $]-3\,;\,+\infty[$;

$f(-3) = (-3)^3 \times \mathrm{e}^{-3} = -27\mathrm{e}^{-3} = -\dfrac{27}{\mathrm{e}^3} \approx -1{,}344$ est le minimum de la fonction sur $\mathbb{R}$.

- On a $f(0) = 0^3 \times \mathrm{e}^0 = 0 \times 1 = 0$;
- De $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, on a par produit de limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

c. *Initialisation* : avec $u_0 = -1$ et $u_1 \approx -0{,}368$, on a bien : $-1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 0$: l'encadrement est vrai au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0$.

On a vu que sur l'intervalle $]-3~;~+\infty[$, donc a fortiori sur l'intervalle $]-1~;~+\infty[$, la fonction est strictement croissante.

On a donc par croissance de f : $f(-1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(0)$, ou encore :

$u_1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant f(0)$

et comme $u_1 \approx -0{,}338$, $-1 \leqslant u_1$ et $f(0) = 0$, on a bien :

$-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 0$.

La relation est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang n, $n \in \mathbb{N}$, il est encore vrai au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, on a : $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0$.

d. La question précédente montre que :

- la suite (u_n) est croissante ;
- la suite (u_n) est majorée par 0 ;

La suite (u_n) est donc convergente vers une limite ℓ, avec $\ell \leqslant 0$.

e. On résout dans $]-1~;~0[$, (car d'après la question précédente tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle) l'équation :

$f(x) = x \iff x^3\mathrm{e}^x = x \iff x^3\mathrm{e}^x - x = 0 \iff x\left(x^2\mathrm{e}^x - 1\right) = 0 \iff x = 0$, car on admet que l'équation $x^2\mathrm{e}^x - 1 = 0$ n'a pas de solution dans l'intervalle $]-1~;~0[$.

Conclusion $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.