LYCÉE FRANÇAIS
Saint
Exupéry
CONGO BRAZZAVILLE

LYCÉE FRANÇAIS SAINT-EXUPÉRY DE BRAZZAVILLE
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES

BAC PAR THEME

QCM

14 EXERCICES DE BAC 2022
AVEC DES ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION

EXTRAITS DE FICHIERS LATEX DU SITE DE L'APMEP

LYCEE FRANCAIS SAINT EXUPERY

BRAZZAVILLE - REP. DU CONGO

PAR VALÉRIEN EBERLIN
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

38 PAGES

SOMMAIRE

- QCM 1 : fonctions, suites (polynésie 4 mai 2022) .... page 3
  Solution du QCM 1 .... page 22
- QCM 2 : fonctions, primitives, probabilités (polynésie 6 mai 2022) .... page 4
  Solution du QCM 2 .... page 23
- QCM 3 : fonctions numériques (Métropole 11 mai 2022) .... page 5
  Solution du QCM 3 .... page 24
- QCM 4 : fonctions logarithmes (Centres Etrangers 11 mai 2022) .... page 6
  Solution du QCM 4 .... page 25
- QCM 5 : fonctions numériques, suites (Métropole 12 mai 2022) .... page 8
  Solution du QCM 5 .... page 27
- QCM 6 : fonctions exponentielles (Centres Etrangers 12 mai 2022) .... page 9
  Solution du QCM 6 .... page 28
- QCM 7 : suites, fonctions exponentielle, logarithme (Centres Etrangers Groupe 1 - 18 mai 2022) .... page 11
  Solution du QCM 7 .... page 29
- QCM 8 : fonctions exponentielles (Amérique du Nord 18 mai 2022) .... page 12
  Solution du QCM 8 .... page 31
- QCM 9 : suites, fonctions exponentielle, logarithme (Centres Etrangers Groupe 1 - 19 mai 2022) .... page 13
  Solution du QCM 9 .... page 32
- QCM 10 : fonction logarithme, probabilités (Amérique du Nord 19 mai 2022) .... page 14
  Solution du QCM 10 .... page 33
- QCM 11 : fonctions, suites (Métropole 8 septembre 2022) .... page 16
  Solution du QCM 11 .... page 34
- QCM 12 : fonctions, suites (Métropole 9 septembre 2022) .... page 17
  Solution du QCM 12 .... page 35
- QCM 13 : probabilités (Nouvelle-Calédonie 26 octobre 2022) .... page 18
  Solution du QCM 13 .... page 36
- QCM 14 : suites, fonctions, primitives (Nouvelle-Calédonie 27 octobre 2022) .... page 20
  Solution du QCM 14 .... page 37

QCM 1

Thème : fonctions, suites Polynésie 4 mai 2022

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des six questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction g définie et dérivable sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln\left(x^2+x+1\right).$$

Pour tout nombre réel x strictement positif :

a. $g'(x) = \dfrac{1}{2x+1}$ **b.** $g'(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$

c. $g'(x) = \ln(2x+1)$ **d.** $g'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

2. La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ admet pour primitive sur $]0~;~+\infty[$ la fonction :

a. $x \longmapsto \ln(x)$ **b.** $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ **c.** $x \longmapsto x\ln(x) - x$ **d.** $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$

3. On considère la suite (a_n) définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par :

$$a_n = \frac{1-3^n}{1+2^n}.$$

La limite de la suite (a_n) est égale à :

a. $-\infty$ **b.** -1 **c.** 1 **d.** $+\infty$

4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-2~;~2]$. Le tableau de variations de la fonction f' dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[2~;~2]$ est donné par :

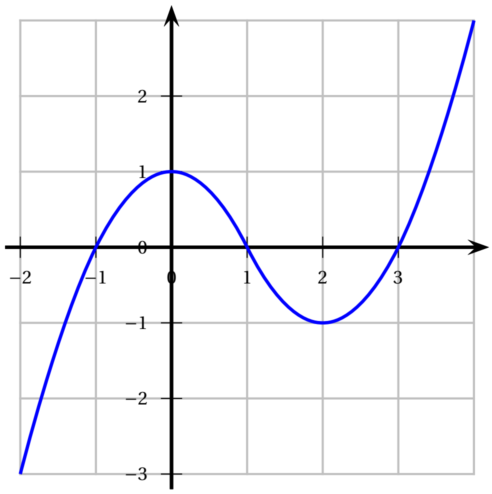
x	-2	-1	0	2
variations de f'	1	0	-2	-1

La fonction f est :

a. convexe sur $[-2~;~-1]$ **b.** concave sur $[0;~1]$

c. convexe sur $[-1~;~2]$ **d.** concave sur $[-2~;~0]$

5. On donne ci-dessus la courbe représentative de la dérivée f' d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2~;~4]$.



Par lecture graphique de la courbe de f', déterminer l'affirmation correcte pour f :

a. f est décroissante sur $[0\,;\,2]$

b. f est décroissante sur $[-1\,;\,0]$

c. f admet un maximum en 1 sur $[0\,;2]$

d. f admet un maximum en 3 sur $[2\,;\,4]$

6. Une action est cotée à 57 €. Sa valeur augmente de 3 % tous les mois.
La fonction python seuil() qui renvoie le nombre de mois à attendre pour que sa valeur dépasse 200 € est :

a.
```
def seuil() :
    m=0
    v=57
    while v < 200 :
        m=m+1
        v = v*1.03
    return m
```

b.
```
def seuil() :
    m=0
    v=57
    while v > 200 :
        m=m+1
        v = v*1.03
    return m
```

c.
```
def seuil() :
    v=57
    for i in range (200) :
        v = v*1.03
    return v
```

d.
```
def seuil() :
    m=0
    v=57
    if v < 200 :
        m=m+1
    else :
        v = v*1.03
    return m
```

QCM 2

Thème : fonctions, primitives, probabilités   Polynésie 6 mai 2022

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des six questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - x + 1.$$

Parmi les quatre expressions suivantes, laquelle est celle de la fonction dérivée de f ?

a. $\ln(x)$	**b.** $\frac{1}{x} - 1$	**c.** $\ln(x) - 2$	**d.** $\ln(x) - 1$

2. On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x^2[1 - \ln(x)]$.
Parmi les quatre affirmations suivantes, laquelle est correcte ?

a. $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$	**b.** $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$	**c.** $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$	**d.** La fonction g n'admet pas de limite en 0.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 0{,}9x^2 - 0{,}1x$. Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$ est :

a. 0	**b.** 1	**c.** 2	**d.** 3

4. Si H est une primitive d'une fonction h définie et continue sur $\mathbb{R}$, et si k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = h(2x)$, alors, une primitive K de k est définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $K(x) = H(2x)$	**b.** $K(x) = 2H(2x)$	**c.** $K(x) = \frac{1}{2}H(2x)$	**d.** $K(x) = 2H(x)$

5. L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 de la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$ est :

a. $y = \mathrm{e}x + \mathrm{e}$	**b.** $y = 2\mathrm{e}x - \mathrm{e}$	**c.** $y = 2\mathrm{e}x + \mathrm{e}$	**d.** $y = \mathrm{e}x$

6. Les nombres entiers n solutions de l'inéquation $(0{,}2)^n < 0{,}001$ sont tous les nombres entiers n tels que :

a. $n \leqslant 4$	**b.** $n \leqslant 5$	**c.** $n \geqslant 4$	**d.** $n \geqslant 5$

QCM 3

Thème : fonctions numériques   Métropole 11 mai 2022

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Les six questions sont indépendantes

1. La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-2x^2+3x-1}{x^2+1}$ admet pour asymptote la droite d'équation :

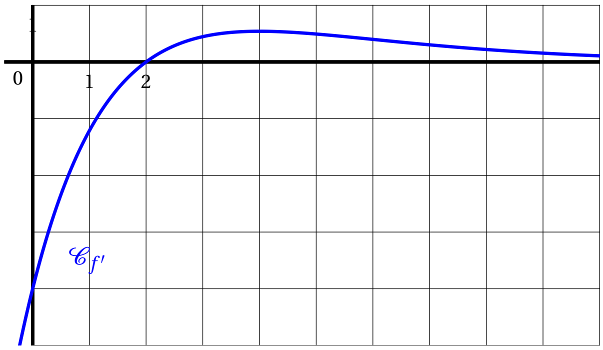
a. $x = -2$; **b.** $y = -1$;
c. $y = -2$; **d.** $y = 0$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$.
La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(0) = 1$ est définie par :

a. $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^{x^2}$; **b.** $F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$
c. $F(x) = \left(1+2x^2\right)\mathrm{e}^{x^2}$; **d.** $F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + \dfrac{1}{2}$

3.

On donne ci-contre la représentation graphique $\mathscr{C}_{f'}$ de **la fonction dérivée f'** d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
On peut affirmer que la fonction f est :
a. concave sur $]0\,;\,+\infty[$;
b. convexe sur $]0\,;\,+\infty[$;
c. convexe sur $[0\,;\,2]$;
d. convexe sur $[2\,;\,+\infty[$.



4. Parmi les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\mathrm{e}^{-x^2} + 2$:

a. toutes sont croissantes sur $\mathbb{R}$; **b.** toutes sont décroissantes sur $\mathbb{R}$;
c. certaines sont croissantes sur $\mathbb{R}$ et d'autres décroissantes sur $\mathbb{R}$; **d.** toutes sont croissantes sur $]-\infty\,;\,0]$ et décroissantes sur $[0\,;\,+\infty[$.

5. La limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2\ln x}{3x^2+1}$ est égale à :

a. $\dfrac{2}{3}$; **b.** $+\infty$; **c.** $-\infty$; **d.** 0.

6. L'équation $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 12 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$:

a. trois solutions ; **b.** deux solutions ; **c.** une seule solution ; **d.** aucune solution.

QCM 4

Thème : fonctions logarithmes Centres Etrangers 11 mai 2022

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Les six questions sont indépendantes.

Une réponse incorrecte, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \ln\left(1 + x^2\right)$.
Sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 2022$

a. n'admet aucune solution.
b. admet exactement une solution.
c. admet exactement deux solutions.
d. admet une infinité de solutions.

2. Soit la fonction g définie pour tout réel x strictement positif par :

$$g(x) = x\ln(x) - x^2$$

On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

a. La fonction g est convexe sur $]0\,;\,+\infty[$.
b. La fonction g est concave sur $]0\,;\,+\infty[$.
c. La courbe $\mathscr{C}_g$ admet exactement un point d'inflexion sur $]0\,;\,+\infty[$.
d. La courbe $\mathscr{C}_g$ admet exactement deux points d'inflexion sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. On considère la fonction f définie sur $]-1\,;\,1[$ par

$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$$

Une primitive de la fonction f est la fonction g définie sur l'intervalle $]-1\,;\,1[$ par :

a. $g(x) = -\dfrac{1}{2}\ln\left(1 - x^2\right)$
b. $g(x) = \dfrac{1 + x^2}{\left(1 - x^2\right)^2}$
c. $g(x) = \dfrac{x^2}{2\left(x - \dfrac{x^3}{3}\right)}$
d. $g(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln\left(1 - x^2\right)$

4. La fonction $x \longmapsto \ln\left(-x^2 - x + 6\right)$ est définie sur

a. $]-3\,;\,2[$
b. $]-\infty\,;\,6]$
c. $]0\,;\,+\infty[$
d. $]2\,;\,+\infty[$

5. On considère la fonction f définie sur $]0{,}5\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 4x + 3\ln(2x - 1)$$

Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

a. $y = 4x - 7$
b. $y = 2x - 4$
c. $y = -3(x - 1) + 4$
d. $y = 2x - 1$

6. L'ensemble S des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\ln(x + 3) < 2\ln(x + 1)$ est :

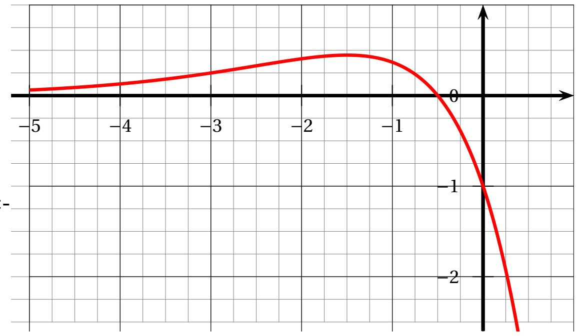
a. $S =]-\infty\,;\,-2[\cup]1\,;\,+\infty[$
b. $S =]1\,;\,+\infty[$
c. $S = \emptyset$
d. $S =]-1\,;\,1[$

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Pour les questions 1 à 3 ci-dessous, on considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. La courbe de sa fonction dérivée f' est donnée ci-dessous.

On admet que f' admet un maximum en $-\frac{3}{2}$ et que sa courbe coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$.

On rappelle que la courbe ci-dessous représente la fonction dérivée f' de f.



Question 1 :

a. La fonction f admet un maximum en $-\frac{3}{2}$;

b. La fonction f admet un maximum en $-\frac{1}{2}$;

c. La fonction f admet un minimum en $-\frac{1}{2}$;

d. Au point d'abscisse -1, la courbe de la fonction f admet une tangente horizontale.

Question 2 :

a. La fonction f est convexe sur $\left]-\infty\ ;\ -\frac{3}{2}\right[$;

b. La fonction f est convexe sur $\left]-\infty\ ;\ -\frac{1}{2}\right[$;

c. La courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f n'admet pas de point d'inflexion ;

d. La fonction f est concave sur $\left]-\infty\ ;\ -\frac{1}{2}\right[$.

Question 3 :

La dérivée seconde f'' de la fonction f vérifie :

a. $f''(x) \geqslant 0$ pour $x \in \left]-\infty\ ;\ -\frac{1}{2}\right[$;

b. $f''(x) \geqslant 0$ pour $x \in [-2\ ;\ -1]$;

c. $f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$;

d. $f''(-3) = 0$.

Question 4 :

On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n). On sait que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et de plus : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 3$.

On peut alors affirmer que :

a. la suite (v_n) converge ;

b. Si la suite (u_n) est croissante alors la suite (v_n) est minorée par u_0 ;

c. $1 \leqslant v_0 \leqslant 3$;

d. la suite (v_n) diverge.

Question 5 :

On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n non nul : $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{n}$.

On peut alors affirmer que :

a. la suite (u_n) diverge;
b. la suite (u_n) converge;
c. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$;
d. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

Question 6 :

On considère (u_n) une suite réelle telle que pour tout entier naturel n, on a : $n < u_n < n+1$.
On peut affirmer que :

a. Il existe un entier naturel N tel que u_N est un entier;
b. la suite (u_n) est croissante;
c. la suite (u_n) est convergente;
d. La suite (u_n) n'a pas de limite.

QCM 6

Thème : fonctions exponentielles   Centres étrangers 12 mai 2022

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Une réponse incorrecte, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

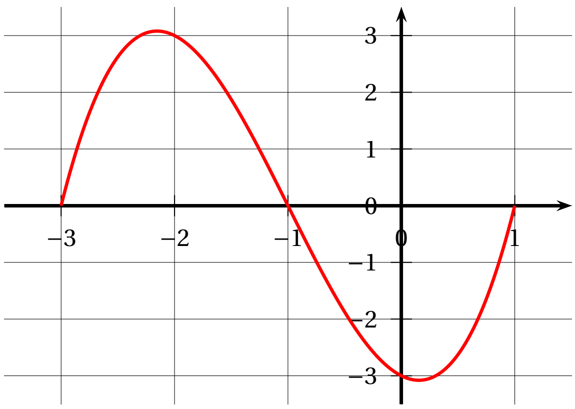
1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

a. $f'(x) = e^{-x}$
b. $f'(x) = xe^{-x}$
c. $f'(x) = (1-x)e^{-x}$
d. $f'(x) = (1+x)e^{-x}$

2. Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $[-3\ ;\ 1]$. On donne ci-dessous la représentation graphique de sa fonction dérivée seconde f''.



On peut alors affirmer que :

a. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$

b. La fonction f est concave sur l'intervalle $[-2\ ;\ 0]$

c. La fonction f' est décroissante sur l'intervalle $[-2\ ;\ 0]$

d. La fonction f' admet un maximum en $x = -1$

Pour $x < -1$, $f''(x) > 0$, donc f' est croissante et pour $x > -1$, $f''(x) < 0$, donc f' est décroissante. La fonction f' admet donc un maximum en $x = -1$. Réponse **d.**

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 \mathrm{e}^{-x^2}$$

Si F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$,

a. $F(x) = -\frac{1}{6}\left(x^3+1\right)\mathrm{e}^{-x^2}$

b. $F(x) = -\frac{1}{4}x^4\mathrm{e}^{-x^2}$

c. $F(x) = -\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\mathrm{e}^{-x^2}$

d. $F(x) = x^2\left(3-2x^2\right)\mathrm{e}^{-x^2}$

4. Que vaut :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}$$

a. -1

b. 1

c. $+\infty$

d. n'existe pas

5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2x+1}$.
La seule primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction f telle que $F(0) = 1$ est la fonction :

a. $x \longmapsto 2\mathrm{e}^{2x+1} - 2\mathrm{e} + 1$

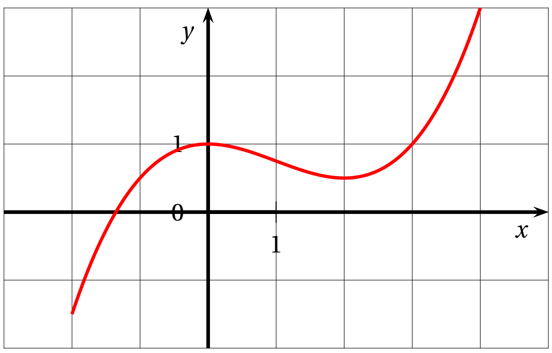
b. $x \longmapsto 2\mathrm{e}^{2x+1} - \mathrm{e}$

c. $x \longmapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x+1} - \frac{1}{2}\mathrm{e} + 1$

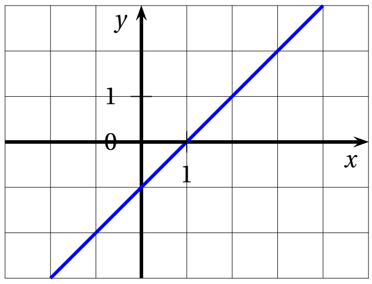
d. $x \longmapsto \mathrm{e}^{x^2+x}$

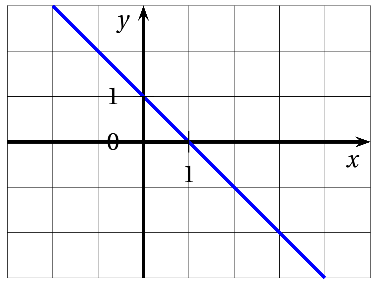
6.

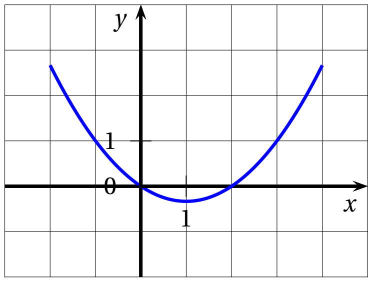
Dans un repère, on a tracé ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $[-2\ ;\ 4]$

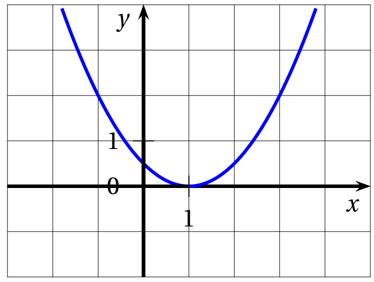


Parmi les courbes suivantes, laquelle représente la fonction f'', dérivée seconde de f ?

a. 

b. 

c. 

d. 

QCM 7

Thème : suites, fonctions exponentielle, fonction logarithme

Centres Etrangers Groupe 1 - 18 mai 2022

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. Un récipient contenant initialement 1 litre d'eau est laissé au soleil.
Toutes les heures, le volume d'eau diminue de 15 %.
Au bout de quel nombre entier d'heures le volume d'eau devient-il inférieur à un quart de litre ?

a. 2 heures **b.** 8 heures . **c.** 9 heures **d.** 13 heures

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $f(x) = 4\ln(3x)$.
Pour tout réel x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, on a :

a. $f(2x) = f(x) + \ln(24) - \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ **b.** $f(2x) = f(x) + \ln(16)$
c. $f(2x) = \ln(2) + f(x)$ **d.** $f(2x) = 2f(x)$

3. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{x-1}.$$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal. La courbe $\mathscr{C}_g$ admet :

a. une asymptote verticale et une asymptote horizontale.

b. une asymptote verticale et aucune asymptote horizontale.

c. aucune asymptote verticale et une asymptote horizontale.

d. aucune asymptote verticale .et aucune asymptote horizontale.

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;2]$ par :

$$h(x) = x^2(1+2\ln(x)).$$

On note $\mathcal{C}_h$ la courbe représentative de h dans un repère du plan.
On admet que h est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;2]$.
On note h' sa dérivée et h'' sa dérivée seconde.
On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;2]$, on a :

$$h'(x) = 4x(1+\ln(x)).$$

4. Sur l'intervalle $\left]\frac{1}{\mathrm{e}}\,;\,2\right]$, la fonction h s'annule :

a. exactement 0 fois.

b. exactement 1 fois.

c. exactement 2 fois.

d. exactement 3 fois.

5. Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_h$ au point d'abscisse $\sqrt{\mathrm{e}}$ est :

a. $y = \left(6\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right).x$

b. $y = \left(6\sqrt{\mathrm{e}}\right).x + 2\mathrm{e}$

c. $y = 6\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$

d. $y = \left(6\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right).x - 4\mathrm{e}.$

6. Sur l'intervalle $]0\,;2]$, le nombre de points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_h$ est égal à :

a. 0 **b.** 1 **c.** 2 **d.** 3

7. [1] On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \quad \text{et} \quad u_0 = 6.$$

On peut affirmer que :

a. la suite (u_n) est strictement croissante.

b. la suite (u_n) est strictement décroissante.

c. la suite (u_n) n'est pas monotone.

d. la suite (u_n) est constante.

QCM 8

Thème : fonctions exponentielles Amérique du Nord 18 mai 2022

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse.

1. Affirmation 1 : Pour tout réel x : $1 - \dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

1. Uniquement au Liban

2. On considère la fonctiong définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

   Affirmation 2 : L'équation $g(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2e^{-x}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

   Affirmation 3 : L'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathscr{C}$ en un seul point.

4. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^x\left(1 - x^2\right)$.

   Affirmation 4 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction h n'admet pas de point d'inflexion.

5. **Affirmation 5 :** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x + x} = 0$.

6. **Affirmation 6 :** Pour tout réel x, $1 + e^{2x} \geqslant 2e^x$.

QCM 9

Thème : suites, fonctions exponentielle, fonction logarithme

Centres Etrangers Groupe 1 - 19 mai 2022

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^{1\,000} + x$.

   On peut affirmer que :

   a. la fonction g est concave sur $\mathbb{R}$.

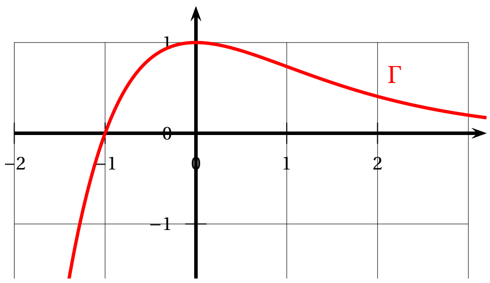
   b. la fonction g est convexe sur $\mathbb{R}$.

   c. la fonction g possède exactement un point d'inflexion.

   d. la fonction g possède exactement deux points d'inflexion.

2. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

   On note f' sa fonction dérivée.
   On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.
   On note Γ la courbe représentative de f'.
   On a tracé ci-contre la courbe Γ.



   On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   On peut affirmer que la tangente T est parallèle à la droite d'équation :

   a. $y = x$ **b.** $y = 0$
   c. $y = 1$ **d.** $x = 0$

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.
On peut affirmer que la suite (u_n) est :

a. majorée et non minorée. **b.** minorée et non majorée.
c. bornée. **d.** non majorée et non minorée.

4. Soit k un nombre réel non nul.
Soit (v_n) une suite définie pour tout entier naturel n.
On suppose que $v_0 = k$ et que pour tout n, on a $v_n \times v_{n+1} < 0$.
On peut affirmer que v_{10} est :

a. positif. **a.** négatif.
c. du signe de k. **d.** du signe de $-k$.

5. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$w_{n+1} = 2w_n - 4 \quad \text{et} \quad w_2 = 8.$$

On peut affirmer que :

a. $w_0 = 0$ **b.** $w_0 = 5$.
c. $w_0 = 10$. **d.** Il n'est pas possible de calculer w_0.

6. [2] On considère la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$a_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^n + 1} a_n \quad \text{et} \quad a_0 = 1.$$

On peut affirmer que :

a. la suite (a_n) est strictement croissante. **b.** la suite (a_n) est strictement décroissante.
c. la suite (a_n) n'est pas monotone. **d.** la suite (a_n) est constante.

7. Une cellule se reproduit en se divisant en deux cellules identiques, qui se divisent à leur tour, et ainsi de suite.
On appelle temps de génération le temps nécessaire pour qu'une cellule donnée se divise en deux cellules.
On a mis en culture 1 cellule. Au bout de 4 heures, il y a environ 4 000 cellules.
On peut affirmer que le temps de génération est environ égal à :

a. moins d'une minute. **b.** 12 minutes.
c. 20 minutes. **d.** 1 heure.

QCM 10

Amérique du Nord - 19 mai 2022

Thème : fonction logarithme, probabilités

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM) qui comprend six questions. Les six questions sont indépendantes. Pour chacune des questions, ***une seule des quatre réponses est***

2. Cette question ne fait pas partie du sujet donné à Madagascar

exacte. *Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse exacte.*
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point

Question 1

Le réel a est définie par $a = \ln(9) + \ln\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ln\left(\dfrac{1}{9}\right)$ est égal à :

a. $1 - \dfrac{1}{2}\ln(3)$ **b.** $\dfrac{1}{2}\ln(3)$ **c.** $3\ln(3) + \dfrac{1}{2}$ **d.** $-\dfrac{1}{2}\ln(3)$

Question 2

On note (E) l'équation suivante $\ln x + \ln(x - 10) = \ln 3 + \ln 7$ d'inconnue le réel x.

a. 3 est solution de (E).
b. $5 - \sqrt{46}$ est solution de (E).
c. L'équation (E) admet une unique solution réelle.
d. L'équation (E) admet deux solutions réelles.

Question 3

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par l'expression $f(x) = x^2(-1 + \ln x)$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

a. Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$.
b. La fonction f est croissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
c. $f'\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$ est différent de 0.
d. La droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\sqrt{\mathrm{e}}$.

Question 4

Un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons du sac.
La probabilité de tirer exactement 2 jetons jaunes, arrondie au millième, est :

a. 0,683 **b.** 0,346 **c.** 0,230 **d.** 0,165

Question 5

Un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons du sac.
La probabilité de tirer au moins un jeton jaune, arrondie au millième, est :

a. 0,078 **b.** 0,259 **c.** 0,337 **d.** 0,922

Question 6

Un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus.
On réalise l'expérience aléatoire suivante : on tire successivement et avec remise cinq jetons du sac.
On note le nombre de jetons jaunes obtenus après ces cinq tirages.
Si on répète cette expérience aléatoire un très grand nombre de fois alors, en moyenne, le nombre de jetons jaunes est égal à :

a. 0,4 **b.** 1,2 **c.** 2 **d.** 2,5

QCM 11

Thème : fonctions, suites Métropole 8 septembre 2022

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

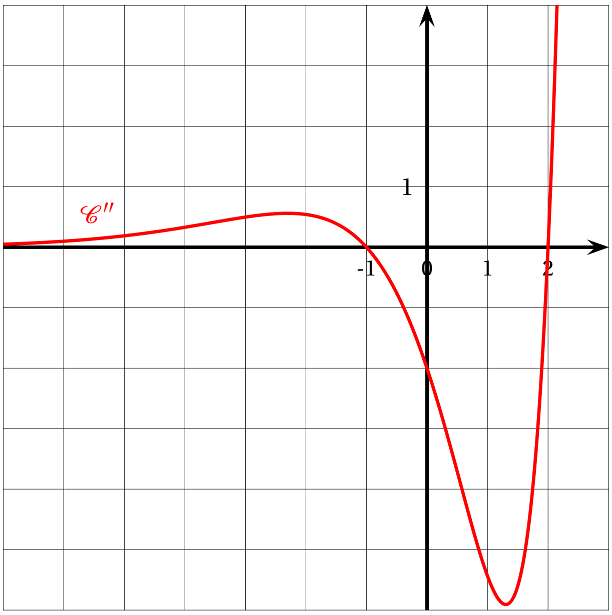
$$g(x) = \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

La courbe représentative de la fonction g admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation :

a. $x = 2$; **b.** $y = 2$; **c.** $y = 0$; **d.** $x = -1$

2.

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.
On désigne par f'' la dérivée seconde de f.
On a représenté sur le graphique ci-contre la courbe de f'', notée $\mathscr{C}''$.



a. $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion ; **b.** f est convexe sur l'intervalle $[-1 ; 2]$;
c. f est convexe sur $]-\infty ; -1]$ et sur $[2 ; +\infty[$; **d.** f est convexe sur $\mathbb{R}$.

3. On donne la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.
La suite (v_n), définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 2$, est :

a. arithmétique de raison -2 ; **b.** géométrique de raison -2 ;
c. arithmétique de raison 1 ; **d.** géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

4. On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel, on a :

$$1+\left(\frac{1}{4}\right)^n \leqslant u_n \leqslant 2-\frac{n}{n+1}$$

On peut affirmer que la suite (u_n) :

a. converge vers 2 ; **b.** converge vers 1 ;
c. diverge vers $+\infty$; **d.** n'a pas de limite.

5. Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $f(x)=x^2\ln x$.
Une primitive F de f sur $]0~;~+\infty[$ est définie par :

a. $F(x)=\frac{1}{3}x^3\left(\ln x-\frac{1}{3}\right)$; **b.** $F(x)=\frac{1}{3}x^3(\ln x-1)$;
c. $F(x)=\frac{1}{3}x^2$; **d.** $F(x)=\frac{1}{3}x^2(\ln x-1)$.

6. Pour tout réel x, l'expression $2+\dfrac{3\mathrm{e}^{-x}-5}{\mathrm{e}^{-x}+1}$ est égale à :

a. $\dfrac{5-3\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$; **b.** $\dfrac{5+3\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}$;
c. $\dfrac{5+3\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$; **d.** $\dfrac{5-3\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}$.

QCM 12

Thème : fonctions, suites Métropole 9 septembre 2022

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère les suites (a_n) et (b_n) définie par $a_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1}=0{,}5a_n+1$ et $b_n=a_n-2$.
On peut affirmer que :

a. (a_n) est arithmétique ; **b.** (b_n) est géométrique ;
c. (a_n) est géométrique ; **d.** (b_n) est arithmétique.

Dans les questions 2. et 3., on considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0=2,\ v_0=1 \text{ et, pour tout entier naturel } n : \left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & u_n+3v_n \\ v_{n+1} & = & u_n+v_n. \end{array}\right.$$

2. On peut affirmer que :

a. $\left\{\begin{array}{lcl} u_2 & = & 5 \\ v_2 & = & 3 \end{array}\right.$ **b.** $u_2^2-3v_2^2=-2^2$ **c.** $\dfrac{u_2}{v_2}=1{,}75$ **d.** $5u_1=3v_1$.

3. On considère le programme ci-dessous écrit en langage Python :

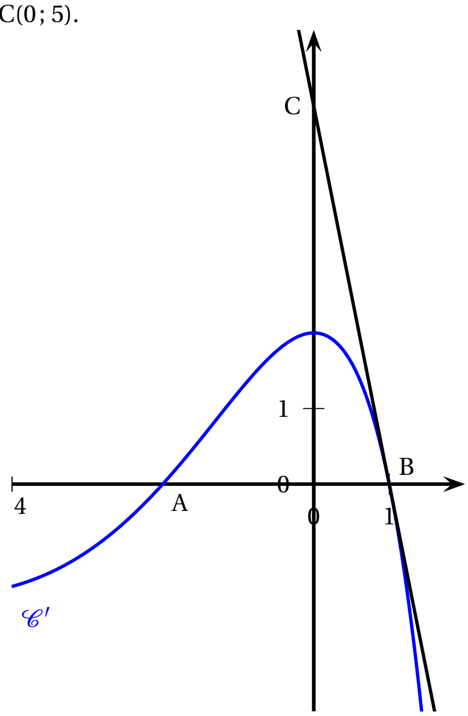
```
def valeurs() :
  u = 2
  v = 1
  for k in range(1,11)
    c = u
    u = u + 3*v
    v = c + v
  return (u, v)
```

Ce programme renvoie :

a. u_{11} et v_{11} ; **b.** u_{10} et v_{11} ; **c.** les valeurs de u_n et v_n pour n allant de 1 à 10 ; **d.** u_{10} et v_{10}.

Pour les questions 4. et 5., on considère une fonction f deux fois dérivable sur l'intervalle $[-4\,;\,2]$. On note f' la fonction dérivée de f et f'' la dérivée seconde de f.

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}'$ de la fonction dérivée f' dans un repère du plan. On donne de plus les points A$(-2\,;\,0)$, B$(1\,;\,0)$ et C$(0\,;\,5)$.



4. La fonction f est :

a. concave sur $[-2\,;\,1]$; **b.** convexe sur $[-4\,;\,0]$;
c. convexe sur $[-2\,;\,1]$; **d.** convexe sur $[0\,;\,2]$.

5. On admet que la droite (BC) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}'$ au point B. On a :

a. $f'(1) < 0$; **b.** $f'(1) = 5$;
c. $f''(1) > 0$; **d.** $f''(1) = -5$.

6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2+1\right)\mathrm{e}^x$.
La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 1$ est définie par :

a. $F(x) = \left(x^2-2x+3\right)\mathrm{e}^x$; **b.** $F(x) = \left(x^2-2x+3\right)\mathrm{e}^x - 2$;

c. $F(x) = \left(\dfrac{1}{3}x^3+x\right)\mathrm{e}^x + 1$; **d.** $F(x) = \left(\dfrac{1}{3}x^3+x\right)\mathrm{e}^x$.

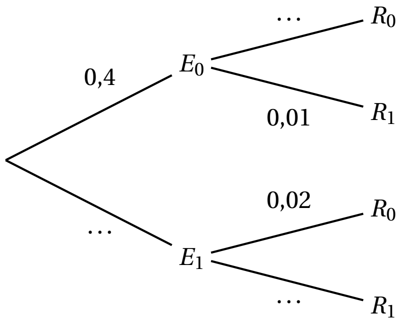
QCM 13

Thème : probabilités Nouvelle Calédonie 26 octobre 2022

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

On considère un système de communication binaire transmettant des 0 et des 1.
Chaque 0 ou 1 est appelé bit.
En raison d'interférences, il peut y avoir des erreurs de transmission :
un 0 peut être reçu comme un 1 et, de même, un 1 peut être reçu comme un 0.
Pour un bit choisi au hasard dans le message, on note les évènements :

- E_0 : « le bit envoyé est un 0 » ;
- E_1 : « le bit envoyé est un 1 » ;
- R_0 : « le bit reçu est un 0 »
- R_1 : « le bit reçu est un 1 ».



On sait que :
$p(E_0) = 0{,}4$; $p_{E_0}(R_1) = 0{,}01$; $p_{E_1}(R_0) = 0{,}02$.
On rappelle que la probabilité conditionnelle de A sachant B est notée $p_B(A)$.
On peut ainsi représenter la situation par l'arbre de probabilités ci-dessus.

1. La probabilité que le bit envoyé soit un 0 et que le bit reçu soit un 0 est égale à :

a. 0,99 **b.** 0,396 **c.** 0,01 **d.** 0,4

2. La probabilité $p(R_0)$ est égale à :

a. 0,99 **b.** 0,02 **c.** 0,408 **d.** 0,931

3. Une valeur, approchée au millième, de la probabilité $p_{R_1}(E_0)$ est égale

a. 0,004 **b.** 0,001 **c.** 0,007 **d.** 0,010

4. La probabilité de l'évènement « il y a une erreur de transmission » est égale à :

a. 0,03 **b.** 0,016 **c.** 0,16 **d.** 0,015

Un message de longueur huit bits est appelé un octet.
On admet que la probabilité qu'un octet soit transmis sans erreur est égale à 0,88.

5. On transmet successivement 10 octets de façon indépendante.
La probabilité, à 10^{-3} près, qu'exactement 7 octets soient transmis sans erreur est égale à :

a. 0,915 **b.** 0,109 **c.** 0,976 **d.** 0,085

6. On transmet successivement 10 octets de façon indépendante.
La probabilité qu'au moins 1 octet soit transmis sans erreur est égale à :

a. $1 - 0{,}12^{10}$ **b.** $0{,}12^{10}$ **c.** $0{,}88^{10}$ **d.** $1 - 0{,}88^{10}$

7. Soit N un entier naturel. On transmet successivement N octets de façon indépendante.
Soit N_0 la plus grande valeur de N pour laquelle la probabilité que les N octets soient tous transmis sans erreur est supérieure ou égale à 0,1.
On peut affirmer que :

a. $N_0 = 17$ **b.** $N_0 = 18$ **c.** $N_0 = 19$ **d.** $N_0 = 20$

QCM 14 Thème : suites, fonctions, primitives Nouvelle Calédonie 27 octobre 2022

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

On peut affirmer que :

a. la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
b. la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.
c. la suite (u_n) n'a pas de limite.
d. la suite (u_n) converge.

✧✧✧

Dans les questions 2 et 3, on considère deux suites (v_n) et (w_n) vérifiant la relation :

$$w_n = \mathrm{e}^{-2v_n} + 2.$$

2. Soit a un nombre réel strictement positif. On a $v_0 = \ln(a)$.

a. $w_0 = \dfrac{1}{a^2} + 2$
b. $w_0 = \dfrac{1}{a^2 + 2}$
c. $w_0 = -2a + 2$
d. $w_0 = \dfrac{1}{-2a} + 2$

3. On sait que la suite (v_n) est croissante. On peut affirmer que la suite (w_n) est :

a. décroissante et majorée par 3.
b. décroissante et minorée par 2 .
c. croissante et majorée par 3 .
d. croissante et minorée par 2.

4. On considère la suite (a_n) ainsi définie :

$$a_0 = 2 \text{ et, pour tout entier naturel } n, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{8}{3}.$$

Pour tout entier naturel n, on a :

a. $a_n = 4 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n - 2$
b. $a_n = -\dfrac{2}{3^n} + 4$
c. $a_n = 4 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$
d. $a_n = 2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{8n}{3}$

5. On considère une suite (b_n) telle que, pour tout entier naturel n, on a :

$$b_{n+1} = b_n + \ln\left(\frac{2}{(b_n)^2 + 3}\right).$$

On peut affirmer que :

a. la suite (b_n) est croissante.

b. la suite (b_n) est décroissante.

c. la suite (b_n) n'est pas monotone.

d. le sens de variation de la suite (b_n) dépend de b_0.

6. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^{x}}{x}.$$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal.
La courbe $\mathscr{C}_g$ admet :

a. une asymptote verticale et une asymptote horizontale.

b. une asymptote verticale et aucune asymptote horizontale.

c. aucune asymptote verticale et une asymptote horizontale.

d. aucune asymptote verticale et aucune asymptote horizontale.

7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2+1}.$$

Soit F une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f. Pour tout réel x, on a :

a. $F(x) = \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{x^2+1}$

b. $F(x) = \left(1+2x^2\right)\mathrm{e}^{x^2+1}$

c. $F(x) = \mathrm{e}^{x^2+1}$

d. $F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2+1}$

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DU QCM 1

Polynésie 4 mai 2022

1. On considère la fonction g définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = \ln\left(x^2+x+1\right)$.
   La fonction g est dérivable comme composée de fonctions dérivables.
   x^2+x+1 est une fonction positive sur $]0\,;\,+\infty[$ comme somme de fonctions positives.
   On pose $u(x) = x^2+x+1$ et on a $u'(x) = 2x+1$.
   La fonction dérivée de $\ln(u(x))$ est la fonction $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$: $g'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ **Réponse d**

2. Pour déterminer si $f(x) = \ln(x)$ admet pour primitive l'une des fonctions citées, il suffit de les dériver.
   Soit $g(x) = x\ln(x) - x$. La fonction g est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ et on a $g'(x) = 1\times\ln(x) + x\times\dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x)+1-1 = \ln(x) = f(x)$.
   La fonction g est donc une primitive de f. **Réponse c**

3. On considère la suite (a_n) définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par :

$$a_n = \frac{1-3^n}{1+2^n} = \frac{3^n\left(\dfrac{1}{3^n}-1\right)}{2^n\left(\dfrac{1}{2^n}+1\right)} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{\dfrac{1}{3^n}-1}{\dfrac{1}{2^n}+1}$$

   On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3^n} - 1 = -1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3^n} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} + 1 = 1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{3^n}-1}{\dfrac{1}{2^n}+1} = -1$.
   D'autre part $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^n = +\infty$ car $\dfrac{3}{2} > 1$, donc finalement par produit de limites, la limite de la suite (a_n) est égale à $-\infty$. **Réponse a**

4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-2\,;\,2]$. Le tableau de variations de la fonction f' dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[2\,;\,2]$ est donné par :

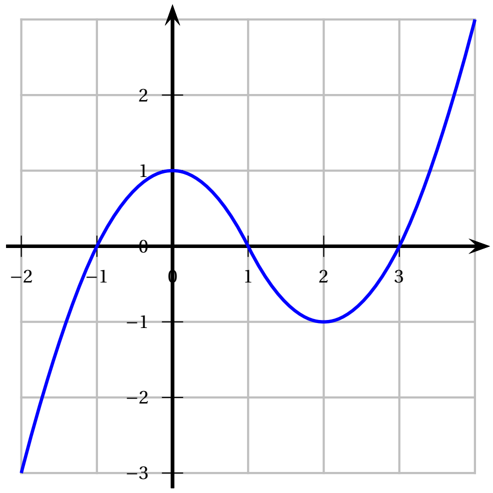
x	-2		-1		0		2
variations de f'	1	↘	0	↘	-2	↗	-1

   La fonction f est :

   a. convexe sur $[-2\,;\,-1]$
   b. concave sur $[0\,;\,1]$
   c. convexe sur $[-1\,;\,2]$
   d. concave sur $[-2\,;\,0]$

   Les variations de la dérivée donnent la convexité de la fonction ; si f' est décroissante alors la fonction est concave.
   Comme f' est décroissante sur $[-2\,;\,0]$, f est donc concave sur cet intervalle. **Réponse d**

5. On donne ci-dessus la courbe représentant la dérivée f' d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$.



Le signe de la dérivée donne les variations de la fonction f.

En 1, $f'(x)$ s'annule en changeant de signe et en passant du positif au négatif, la fonction f va donc admettre un maximum en 1. **Réponse c**

6. Une action est cotée à 57 €. Sa valeur augmente de 3 % tous les mois.

   Pour que la fonction seuil fonctionne, il faut que la boucle while s'exécute tant que $v < 200$ et que le nombre de mois soit augmenté de 1 à chaque exécution de la boucle. **Réponse a**

Éléments de la correction du QCM 2

Polynésie 6 mai 2022

1. **Réponse a.**

   En effet, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, en tant que produit et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout x réel strictement positif, on a :

   $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 + 0 = \ln(x) + \dfrac{x}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$

2. **Réponse c.** On a $f(x) = x^2 - x^2\ln(x)$.

   - On a $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$;
   - On sait (croissances comparées) que $\lim\limits_{x \to 0} x^2\ln(x) = 0$;

   Donc par somme de limites $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

3. **Réponse d.**

   Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x\left(x^2 - 0{,}9x - 0{,}1\right)$.

   On a donc $f(x) = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ x^2 - 0{,}9x - 0{,}1 & = & 0 \end{array}\right.$

   0 est donc une solution et pour l'équation du second degré le nombre 1 est une racine évidente ; le produit des racines étant égal à $-0{,}1$ l'autre racine est donc $-0{,}1$.

   L'équation $f(x) = 0$ a donc trois solutions : $-0{,}1$; 0 et 1.

4. **Réponse c.**

   On dérive la proposition, en pensant bien à utiliser la formule pour dériver une fonction composée ($x \longmapsto H(2x)$ a pour dérivée $x \longmapsto 2H'(2x)$) et on vérifie.

   Si $K_{\mathbf{c}} : x \longmapsto \dfrac{1}{2}H(2x)$, alors,

$\forall x \in \mathbb{R}, K_{\mathbf{c}}'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2H'(2x) = H'(2x) = h(2x)$, car H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$
et donc on a : $\forall x \in \mathbb{R}, K_{\mathbf{c}}'(x) = k(x)$.
On en déduit donc que $K_{\mathbf{c}}$ est une primitive de k sur $\mathbb{R}$.

5. Réponse b.
Dérivons la fonction f, qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, en tant que produit de fonctions dérivables sur cet ensemble.
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 \times \mathrm{e}^x + x \times \mathrm{e}^x = (1+x)\mathrm{e}^x$.
On a donc $f'(1) = (1+1)\mathrm{e}^1 = 2\mathrm{e}$.
Par ailleurs $f(1) = 1 \times \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.
L'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est donc :
$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ &= 2\mathrm{e}(x-1) + \mathrm{e} \\ &= 2\mathrm{e}x - 2\mathrm{e} + \mathrm{e} \\ y &= 2\mathrm{e}x - \mathrm{e} \end{aligned}$$

6. Réponse d.
Résolvons cette inéquation :
$$\begin{aligned} (0{,}2)^n < 0{,}001 &\iff \ln\left(0{,}2^n\right) < \ln(0{,}001) \qquad \text{car ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{*+} \\ &\iff n\ln(0{,}02) < \ln(0{,}001) \\ &\iff n > \frac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}2)} \qquad \text{car } \ln(0{,}2) < 0 \end{aligned}$$
On a $\dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}2)} \approx 4{,}3$, donc les solutions à cette inéquation sont les entiers naturels supérieurs ou égaux à 5.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DU QCM 3

Métropole 11 mai 2022

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-2x^2+3x-1}{x^2+1}$.
Pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{x^2\left(-2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{-2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -2$.
Donc la droite horizontale d'équation $y = -2$ est une asymptote à la courbe représentative de la fonction f. **Réponse c**

2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives. Soit F une primitive de f.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est de la forme $u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)}$, et admet pour primitives les fonctions $x \longmapsto \mathrm{e}^{u(x)} + k$, $k \in \mathbb{R}$.
En posant $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$, et en remarquant que $f(x) = \dfrac{1}{2} \times 2x\ \mathrm{e}^{x^2}$, on peut donc écrire :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{1}{2} \times \mathrm{e}^{x^2} + k$.
Sachant que $F(0) = 1$ on en déduit que : $\dfrac{1}{2} + k = 1$ donc $k = \dfrac{1}{2}$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{1}{2}\ \mathrm{e}^{x^2} + \dfrac{1}{2}$ **Réponse d**

3. La courbe représentative est celle de la fonction f'. Avec la précision permise par le graphique, on peut affirmer que la fonction f' est croissante sur $]-\infty\,;\,3]$ et décroissante sur $[3\,;\,+\infty[$. $[0\,;\,2] \subset]-\infty\,;\,3]$, donc f' est croissante $[0\,;\,2]$.
La fonction est donc convexe sur $[0\,;\,2]$. $\boxed{\textbf{Réponse c}}$

4. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\,\mathrm{e}^{-x^2} + 2$ est continue et dérivable. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.
Les primitives de la fonction f, ont pour dérivée f, qui est positive sur $\mathbb{R}$.
Donc les fonctions F sont croissantes sur $\mathbb{R}$. $\boxed{\textbf{Réponse a}}$

5. $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$, $f(x) = \dfrac{2\ln(x)}{3x^2+1} = \dfrac{2}{3}\dfrac{x^2 \times \dfrac{\ln(x)}{x^2}}{x^2\left(1+\dfrac{1}{3x^2}\right)} = \dfrac{2}{3}\dfrac{\dfrac{\ln(x)}{x^2}}{1+\dfrac{1}{3x^2}}$.
Nous savons que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ (croissances comparées) et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{3x^2} = 1$
donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ $\boxed{\textbf{Réponse d}}$

6. $\forall x \in \mathbb{R}$, (E) $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 12 = 0 \iff (\mathrm{e}^{x})^2 + \mathrm{e}^{x} - 12 = 0$.
On pose comme changement de variable : $X = \mathrm{e}^{x}$: $(E) \iff X^2 + X - 12 = 0$. Cette équation a pour solutions $X = -4$ et $X = 3$.
Or $X = \mathrm{e}^{x} > 0$ donc l'unique solution sera celle de l'équation $X = \mathrm{e}^{x} = 3 \iff x = \ln(3)$.
$\boxed{\textbf{Réponse c}}$

Éléments de la correction du QCM 4

Centres Etrangers 11 mai 2022

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Les six questions sont indépendantes.

Une réponse incorrecte, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \ln\left(1+x^2\right)$.
Sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 2022$

a. n'admet aucune solution.
b. admet exactement une solution.
c. admet exactement deux solutions.
d. admet une infinité de solutions.

On a : $f(x) = 2022 \iff \ln\left(1+x^2\right) = 2022 \iff \mathrm{e}^{\ln\left(1+x^2\right)} = \mathrm{e}^{2022} \iff 1+x^2 = \mathrm{e}^{2022} \iff x^2 = \mathrm{e}^{2022}-1$: ce nombre étant positif, l'équation a deux solutions : $\sqrt{\mathrm{e}^{2022}-1}$ et $-\sqrt{\mathrm{e}^{2022}-1}$
Réponse **c.**

2. Soit la fonction g définie pour tout réel x strictement positif par :

$$g(x) = x\ln(x) - x^2$$

On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

a. La fonction g est convexe sur $]0\,;\,+\infty[$.
b. La fonction g est concave sur $]0\,;\,+\infty[$.
c. La courbe $\mathcal{C}_g$ admet exactement un point d'inflexion sur $]0\,;\,+\infty[$.
d. La courbe $\mathcal{C}_g$ admet exactement deux points d'inflexion sur $]0\,;\,+\infty[$.

Sur $\mathbb{R}_+$, g est dérivable et sur cet intervalle, $f'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 2x = \ln(x) - 2x + 1$.

Puis $f''(x) = \frac{1}{x} - 2$.

On a donc $f''(x) = 0 \iff \frac{1}{x} - 2 = 0 \iff \frac{1}{x} = 2 \iff x = \frac{1}{2}$.

Sur $]0\,;\,+\infty[$, f a un seul point d'inflexion d'abscisse $\frac{1}{2}$. Réponse **c.**

3. On considère la fonction f définie sur $]-1\,;\,1[$ par

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

Une primitive de la fonction f est la fonction g définie sur l'intervalle $]-1\,;\,1[$ par :

a. $g(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)$

b. $g(x) = \frac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2}$

c. $g(x) = \frac{x^2}{2\left(x - \frac{x^3}{3}\right)}$

d. $g(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(1-x^2\right)$

Soit la fonction g définie sur $]-1\,;\,1[$ par $g(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)$.

En posant $u(x) = 1-x^2$, dérivable et non nulle sur $]-1\,;\,1[$, on a $g'(x) = -2x$ et on sait que $g(x) = -\frac{1}{2}\ln u(x)$ entraîne $g'(x) = -\frac{1}{2}\frac{u'(x)}{u(x)} = -\frac{1}{2} \times \frac{-2x}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2} = f(x)$. Réponse **a.**

4. La fonction $x \longmapsto \ln\left(-x^2 - x + 6\right)$ est définie sur

a. $]-3\,;\,2[$

b. $]-\infty\,;\,6]$

c. $]0\,;\,+\infty[$

d. $]2\,;\,+\infty[$

La fonction est définie si $-x^2 - x + 6 > 0 \iff x^2 + x - 6 < 0$.

Le trinôme $x^2 + x - 6$ a une racine évidente : 2. Le produit des racines étant égal à -6, l'autre racine est donc -3.

Donc $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$. On sait que ce trinôme est positif sauf (ce que l'on cherche) entre les racines -3 et 2.

La fonction est donc définie sur l'intervalle $]-3\,;\,2[$. Réponse **a.**

5. On considère la fonction f définie sur $]0{,}5\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 4x + 3\ln(2x-1)$$

Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

a. $y = 4x - 7$

b. $y = 2x - 4$

c. $y = -3(x-1) + 4$

d. $y = 2x - 1$

Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est : $y - f(1) = f'(1)(x-1)$.

- $f(1) = 1 - 4 + 3\ln(2-1) = -3 + 3 \times 0 = -3$;
- $f'(x) = 2x - 4 + 3 \times \frac{2}{2x-1} = 2x - 4 + \frac{6}{2x-1}$, d'où $f'(1) = 2 - 4 + \frac{6}{1} = -2 + 6 = 4$.

Une équation de la tangente est donc $y - (-3) = 4(x-1) \iff y = 4x - 4 - 3 \iff y = 4x - 7$. Réponse **a.**

6. L'ensemble S des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\ln(x+3) < 2\ln(x+1)$ est :

a. $S =]-\infty\,;\,-2[\cup]1\,;\,+\infty[$

b. $S =]1\,;\,+\infty[$

c. $S = \emptyset$

d. $S =]-1\,;\,1[$

D'après l'énoncé il faut que $x > -3$ et que $x > -1$. Il faut donc résoudre l'inéquation dans l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.
$\ln(x+3) < 2\ln(x+1) \iff \ln(x+3) < \ln(x+1)^2 \iff x+3 < (x+1)^2 \iff 0 < x^2+2x+1-x-3 \iff 0 < x^2+x-2$.
Le trinôme x^2+x-2 a une racine évidente 1 ; comme le produit des racines est égal à -2, l'autre racine est -2. On a donc :
$x^2+x-2 > 0 \iff (x-1)(x+2) > 0$: le trinôme est positif (ce que l'on cherche) sauf entre les racines. D'après la remarque préliminaire $S =]1\,;\,+\infty[$. Réponse **b.**

Éléments de la correction du QCM 5

Métropole 12 mai 2022

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Pour les questions 1 à 3 ci-dessous, on considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. La courbe de sa fonction dérivée f' est donnée ci-dessous.

On admet que f' admet un maximum en $-\dfrac{3}{2}$ et que sa courbe coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,0\right)$.

On rappelle que la courbe ci-dessous représente la fonction dérivée f' de f.

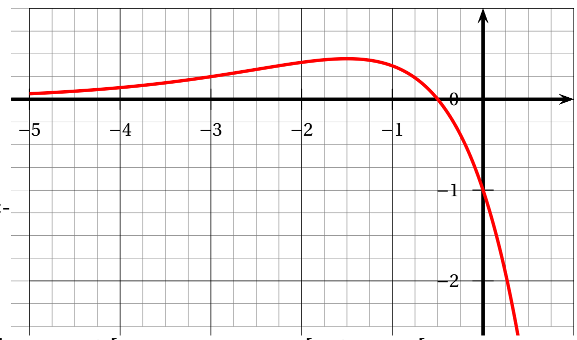
Question 1 :

a. La fonction f admet un maximum en $-\dfrac{3}{2}$;

b. La fonction f admet un maximum en $-\dfrac{1}{2}$;

c. La fonction f admet un minimum en $-\dfrac{1}{2}$;

d. Au point d'abscisse -1, la courbe de la fonction f admet une tangente horizontale.



Par lecture graphique, la dérivée est positive sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{2}\right[$ et négative sur $\left[-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$; f est donc croissante puis décroissante : elle admet donc un maximum en $-\dfrac{1}{2}$. Réponse **b.**

Question 2 :

a. La fonction f est convexe sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{3}{2}\right[$;

b. La fonction f est convexe sur $\left]-\infty;\,-\dfrac{1}{2}\right[$;

c. La courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f n'admet pas de point d'inflexion ;

d. la fonction f est concave sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{2}\right[$.

f' est croissante sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{3}{2}\right[$: f est convexe sur cet intervalle. Réponse **a.**

Question 3 :
La dérivée seconde f'' de la fonction f vérifie :

a. $f''(x) \geqslant 0$ pour $x \in \left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{2}\right[$;

b. $f''(x) \geqslant 0$ pour $x \in [-2\,;\,-1]$;

c. $f''\left(-\dfrac{3}{2}\right) = 0$;

d. $f''(-3) = 0$.

On a déjà vu que f' est croissante sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{3}{2}\right[$; elle est décroissante sur $\left]-\dfrac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$, donc $f''\left(-\dfrac{3}{2}\right) = 0$. Réponse **c.**

Question 4 :

On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n). On sait que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et de plus : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = 3$.
On peut alors affirmer que :

a. la suite (v_n) converge ;

b. Si la suite (u_n) est croissante alors la suite (v_n) est minorée par u_0 ;

c. $1 \leqslant v_0 \leqslant 3$;

d. la suite (v_n) diverge.

Si (u_n) est croissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n$, donc la suite (v_n) est minorée par u_0. Réponse **b.**

Question 5 :

On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n non nul : $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n}$.
On peut alors affirmer que :

a. la suite (u_n) diverge ;

b. la suite (u_n) converge ;

c. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$;

d. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n}$: la suite (u_n) est donc croissante.
D'autre part : pour $n \neq 0$, on peut écrire : $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant 1$.
Conclusion : la suite (u_n) est croissante et elle majorée par 1 : elle converge donc. Réponse **b.**

Question 6 :

On considère (u_n) une suite réelle telle que pour tout entier naturel n, on a : $n < u_n < n+1$.
On peut affirmer que :

a. Il existe un entier naturel N tel que u_N est un entier ;

b. la suite (u_n) est croissante ;

c. la suite (u_n) est convergente ;

d. La suite (u_n) n'a pas de limite.

On a au rang n : $n < u_n < n+1$ et au rang $n+1$:
$n+1 < u_{n+1} < u_{n+2}$, donc $u_n < n+1 < u_{n+1}$: la suite (u_n) est croissante. Réponse **b.**

Éléments de la correction du QCM 6

Centres Etrangers 12 mai 2022

1. Soit f la fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, définie par $x \longmapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.
   En utilisant la formule de la dérivée d'un quotient, on peut écrire :
   $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{1 \times \mathrm{e}^{\,x} - x \times \mathrm{e}^{\,x}}{\left(\mathrm{e}^{\,x}\right)^2} = \dfrac{(1-x)\,\mathrm{e}^{\,x}}{\mathrm{e}^{\,2x}} = \dfrac{1-x}{\mathrm{e}^{\,x}} = (1-x)\,\mathrm{e}^{\,-x}$. **Réponse c**

2. La courbe représentative donnée est celle de f''. Avec la précision permise par ce graphique, on peut affirmer que f'' est positive sur $[-3\,;\,-1]$, négative sur $[-1\,;\,1]$ et s'annule pour $x = -1$.
Cela signifie donc que f' est croissante sur $[-3\,;\,-1]$ puis décroissante sur $[-1\,;\,1]$. Donc la fonction f' admet un maximum en $x = -1$. **Réponse d**

3. Les fonctions F proposées sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. Dérivons chacune d'entre-elles. $\forall x \in \mathbb{R}$,
   a. $F'(x) = -\dfrac{1}{6}\left(3x^2\,\mathrm{e}^{-x^2} + (x^3+1)\times -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\right) = -\dfrac{1}{6}\,\mathrm{e}^{-x^2}(3x^2-2x^3-2x)$
   $= -\dfrac{1}{6}\,\mathrm{e}^{-x^2}(-2x^3+3x^2-2x)$
   b. $F'(x) = -\dfrac{1}{4}\left(4x^3\times\mathrm{e}^{-x^2} + x^4\times -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\right) = -\dfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-x^2}(4x^3-2x^5)$
   c. $F'(x) = -\dfrac{1}{2}\left(2x\times\mathrm{e}^{-x^2} + (x^2+1)\times -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\right) = -\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2}(2x-2x^3-2x) = x^3\,\mathrm{e}^{-x^2}$
   d. $F'(x) = (6x-8x^3)\times\mathrm{e}^{-x^2} + (3x^2-2x^4)\times -2x\,\mathrm{e}^{-x^2} = (4x^5-14x^3+6x)\,\mathrm{e}^{-x^2}$
   Réponse c

4. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}\right)}{\mathrm{e}^{x}\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}\right)} = \dfrac{1+\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$. Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. **Réponse b**

5. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives notées F. De plus $f(x)$ est de la forme $u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$ avec $u(x) = 2x+1$. En remarquant que $f(x) = \dfrac{1}{2}\times 2\,\mathrm{e}^{2x+1}$, on peut alors écrire que pour tout réel x, $F(x) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x+1} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$. Sachant que $F(0) = 1$ alors
$\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{1} + k = 1 \iff k = 1 - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x+1} + 1 - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}$. **Réponse c**

6. Avec la précision permise par le graphique, on peut affirmer que la fonction f est concave sur $[-2\,;\,1]$, convexe sur $[1\,;\,4]$ et $f''(1) = 0$ (point d'inflexion). f''est donc négative sur $[-2\,;\,1]$, positive sur $[1\,;\,4]$ s'annulant en 1. **Réponse a**

Éléments de la correction du QCM 7

Centres Etrangers Groupe 1 - 18 mai 2022

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. Un récipient contenant initialement 1 litre d'eau est laissé au soleil.
Toutes les heures, le volume d'eau diminue de 15 %.
Au bout de quel nombre entier d'heures le volume d'eau devient-il inférieur à un quart de litre ?

   a. 2 heures **b.** 8 heures . **c.** 9 heures **d.** 13 heures

Enlever 15 %, revient à multiplier par 0,85 $\left(1-\dfrac{15}{100}=\dfrac{85}{100}=0{,}85\right)$.

Il faut donc trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $1\times 0{,}85^n < 0{,}25$ soit en prenant le logarithme népérien $n\ln 0{,}95 < \ln 0{,}25 \iff n > \dfrac{\ln 0{,}25}{\ln 0{,}85}$.

Or $\dfrac{\ln 0{,}25}{\ln 0{,}85} \approx 8{,}5$: il faut donc attendre au moins la 9e heure.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=4\ln(3x)$.
Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on a :

a. $f(2x)=f(x)+\ln(24)$ **b.** $f(2x)=f(x)+\ln(16)$
c. $f(2x)=\ln(2)+f(x)$ **d.** $f(2x)=2f(x)$

- On a $f(x)+\ln(16)=4\ln(3x)+\ln 2^4=\ln(3x)^4+\ln 2^4=\ln\left[2^4\times(3x)^4\right]=\ln\left[(6x)^4\right]=4\ln(6x)=f(2x)$ Réponse **b.**
- Autre solution : $f(2x)=4\ln(3\times 2x)=4\ln(2\times 3x)=4\ln 2+4\ln(3x)=\ln 2^4+4\ln(3x)=\ln 16+4\ln(3x)=f(x)+\ln 16$.

3. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{\ln(x)}{x-1}.$$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal. La courbe $\mathscr{C}_g$ admet :

- Limite de la fonction g au voisinage de plus l'infini :

$g(x)=\dfrac{\ln x}{x}\times\dfrac{x}{x-1}$.

Or on sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}=1$, donc par produit de limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$: l'axe des abscisses est asymptote horizontale au voisinage de plus l'infini.

- Limite de la fonction g au voisinage de 1 : on a :

$g(x)=\dfrac{\ln(x)}{x-1}=\dfrac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1}$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1}=[\ln(x)]'_{x=1}$, nombre dérivé de la fonction logarithme népérien en $x=1$, soit $\dfrac{1}{1}=1$: il n'y a as d'asymptote verticale au voisinage de 1. Réponse : **c.**

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;2]$ par :

$$h(x)=x^2(1+2\ln(x)).$$

On note $\mathscr{C}_h$ la courbe représentative de h dans un repère du plan.
On admet que h est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;2]$.
On note h' sa dérivée et h'' sa dérivée seconde.
On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;2]$, on a :

$$h'(x)=4x(1+\ln(x)).$$

4. Sur l'intervalle $]0\,;2]$, la fonction h s'annule :

a. exactement 0 fois. **b.** exactement 1 fois.
c. exactement 2 fois. **d.** exactement 3 fois.

On a $h(x)=0 \iff x^2(1+2\ln(x))=0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} x^2 &=& 0\\ 1+2\ln(x) &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ 1+2\ln(x) &=& 0\end{array}\right. \iff$
$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ 2\ln(x) &=& -1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ \ln(x) &=& -\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ x &=& \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\end{array}\right.$

Comme 0 ne peut être solution et que $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\in]0\,;\,2]$, l'équation a une solution : réponse **b.**

5. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse $\sqrt{\mathrm{e}}$ est :

a. $y=\left(6\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right).x$ **b.** $y=\left(6\sqrt{\mathrm{e}}\right).x+2\mathrm{e}$

c. $y=6\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ **d.** $y=\left(6\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right).x-4\mathrm{e}$.

Une équation de la tangente est $y-h\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)=f'\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)\left(x-\sqrt{\mathrm{e}}\right)$.

- $h'\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)=4\times\sqrt{\mathrm{e}}\left(1+\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)\right)=4\times\sqrt{\mathrm{e}}\times\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=6\sqrt{\mathrm{e}}$.
- $h\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)=\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)^2\left(1+2\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)\right)=\mathrm{e}\ln\left(1+2\times\dfrac{1}{2}\ln\mathrm{e}\right)=\mathrm{e}\times(1+1)=2\mathrm{e}$.

L'équation de la tangente s'écrit donc :

$y-2\mathrm{e}=6\sqrt{\mathrm{e}}\left(x-\sqrt{\mathrm{e}}\right)\iff y=2\mathrm{e}+6x\sqrt{\mathrm{e}}-6\mathrm{e}\iff y=6x\sqrt{\mathrm{e}}-4\mathrm{e}$. Réponse **d.**

6. Sur l'intervalle $]0\,;\,2]$, le nombre de points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_h$ est égal à :

a. 0 **b.** 1 **c.** 2 **d.** 3

La fonction h' produit de fonctions dérivables sur $]0;2]$ est dérivable et sur cet intervalle :

$f''(x)=4(1+\ln(x))+4x\times\dfrac{1}{x}=4+4\ln(x))+4=8+4\ln(x)=4(2+\ln(x)$.

De même $h'''(x)=\dfrac{4}{x}$. Sur l'intervalle $]0;2]$, $h'''(x)>0$, donc $h''(x)$ est croissante et s'annule si $h''(x)=0\iff 2+\ln(x)=0\iff\ln(x)=-2\iff x=\mathrm{e}^{-2}\approx 0{,}135\in]0\,;\,2]$.

La dérivée seconde s'annule donc une seule fois sur l'intervalle $]0;2]$ en changeant de signe.

Donc un seul point d'inflexion. Réponse **b.**

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DU QCM 8

Amérique du Nord 18 mai 2022

1. $\forall x\in\mathbb{R}$, $1-\dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}-\dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=\dfrac{2\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=\dfrac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)}=\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}}=\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}}$

Affirmation 1 : Vraie

2. $g(x)=\dfrac{1}{2}\iff\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}=\dfrac{1}{2}\iff 2\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x+1\iff\mathrm{e}^x=1\iff x=0$ **Affirmation 2 : Vraie**

3. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=2x\mathrm{e}^{-x}+x^2\times-\mathrm{e}^{-x}=\left(2x-x^2\right)\mathrm{e}^{-x}$.

L'équation d'une tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a a pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$. Pour que l'axe des abscisses soit tangent à $\mathscr{C}$, il faut que la courbe $\mathscr{C}$ admette une tangente d'équation $y=0$ (équation de l'axe des abscisses), donc il faut que $f(a)=0$ et $f'(a)=0$. Sachant que $\forall a\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-a}\neq 0$,

$f(a)=0\iff a^2\mathrm{e}^{-a}=0\iff a^2=0\iff a=0$.

$f'(a)=0\iff(2a-a^2)\mathrm{e}^{-a}=0\iff 2a-a^2=0\iff a(2-a)=0\iff a=0$ ou $a=2$.

Donc $a=0$. Il n'existe donc qu'un seul point où l'axe des abscisses est tangent à $\mathscr{C}$.

Affirmation 3 : Vraie

4. La fonction h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathscr{C}_h$ sa courbe représentative.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $h'(x)=\mathrm{e}^x\times\left(1-x^2\right)+\mathrm{e}^x\times-2x=\mathrm{e}^x\left(1-x^2-2x\right)=\left(-x^2-2x+1\right)\,\mathrm{e}^x$.

La fonction h' est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $h''(x)=(-2x-2)\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x\times\left(-x^2-2x+1\right)=\mathrm{e}^x\left(-2x-2-x^2-2x+1\right)=\left(-x^2-4x-1\right)\mathrm{e}^x$

Si $\mathscr{C}_h$ admet des points d'inflexions, alors $h''(x)$ peut s'annuler et changer de signe. Or $\mathrm{e}^x>0$ pour tout réel x, donc étudions le signe de $-x^2-4x-1$ sur $\mathbb{R}$.

$-x^2-4x-1$ s'annule pour $x_1=-2-\sqrt{3}$ et pour $x_2=-2+\sqrt{3}$ car $\Delta=12$.
Le trinôme du second degré s'annule donc deux fois et change donc aussi de signe.

Affirmation 4 : Fausse

5. $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+x}=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}\left(1+\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}\right)}=\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}}$.

   D'après les croissances comparées, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}=+\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^{x}}=0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}f(x)=1$

   Affirmation 5 : Fausse

6. $1+\mathrm{e}^{2x}\geqslant 2\mathrm{e}^{x}\iff \mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^{x}+1\geqslant 0\iff(\mathrm{e}^{x}-1)^2\geqslant 0$.
   Cette dernière inégalité est vraie pour tout réel x.

   Affirmation 6 : Vraie

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DU QCM 9

Centres Etrangers Groupe 1 - 19 mai 2022

1. La fonction g est continue et dérivable. $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=1\,000x^{999}+1$.
   La fonction g' est continue et dérivable. $\forall x\in\mathbb{R},\ g''(x)=999\times 1\,000x^{998}=999\,000x^{998}$.
   $\forall x\in\mathbb{R},\ 999\,000x^{998}\geqslant 0$ et g'' s'annule sans changer de signe sur $\mathbb{R}$.
   La fonction g est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

   Réponse b

2. D'après la représentation graphique de f', on peut affirmer que $f'(0)=1$. La pente de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est égale à 1. Toute droite ayant la même pente est donc parallèle à cette tangente. C'est le cas de la droite d'équation $y=x$.

   Réponse a

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

   $\forall n\in\mathbb{N},\ -1\leqslant(-1)^n\leqslant 1$ donc $-\dfrac{1}{n+1}\leqslant u_n\leqslant\dfrac{1}{n+1}$.

   Or $\forall n\in\mathbb{N},\ n+1\geqslant 1$ donc $\dfrac{1}{n+1}\leqslant 1$ et $-\dfrac{1}{n+1}\geqslant -1$.
   Donc $\forall n\in\mathbb{N},\ -1\leqslant u_n\leqslant 1$. La suite (u_n) est donc bornée.

   Réponse c

4. Soit (v_n) une suite telle que $v_0=k$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n\times v_{n+1}<0$. Cette inégalité nous permet d'affirmer que $\forall n\in\mathbb{N}$, deux termes consécutifs v_n et v_{n+1} sont de signes opposés. Donc les termes v_{n+1} et v_{n+2} le sont aussi. Donc on peut en déduire que $\forall n\in\mathbb{N}$, v_n et v_{n+2} sont de même signe.
   Donc $v_0,\ v_2,\ \ldots,\ v_{2k}$, avec $k\in\mathbb{N}$ (tous les termes de rangs pairs), sont de même signe, donc du signe de k.

   Réponse c

5. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_{n+1}=2w_n-4$ et $w_2=8$.

   Donc $\forall n\in\mathbb{N},\ w_n=\dfrac{w_{n+1}+4}{2}$.

   $w_1=\dfrac{w_2+4}{2}=\dfrac{8+4}{2}=6$ et $w_0=\dfrac{w_1+4}{2}=\dfrac{6+4}{2}=5$

   Réponse b

6. Il est facile de démontrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n>0$ car $\dfrac{\mathrm{e}^{n}}{\mathrm{e}^{n}+1}>0$ et $a_0>0$.

   $\forall n\in\mathbb{N},\ \mathrm{e}^{n}<\mathrm{e}^{n}+1$ donc $\dfrac{\mathrm{e}^{n}}{\mathrm{e}^{n}+1}<1$ donc $\dfrac{\mathrm{e}^{n}}{\mathrm{e}^{n}+1}a_n<a_n$ donc $a_{n+1}<a_n$. La suite (a_n) est donc strictement décroissante.

   Réponse b

7. D'après l'énoncé, nous savons que le nombre de cellules double à chaque intervalle de temps écoulé. Cherchons le premier entier n tel que $2^n \geqslant 4000$. La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc

$2^n \geqslant 4000 \iff \ln\left(2^n\right) \geqslant \ln(4000) \iff n \times \ln(2) \geqslant \ln(4000) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(4000)}{\ln(2)}$.

À la calculatrice : $\dfrac{\ln(4000)}{\ln(2)} \approx 11{,}97$ donc $n \geqslant 12$.

Il s'est donc écoulé 12 intervalles de temps pour que le nombre de cellules atteigne 4000 en 4 heures. Chaque intervalle de temps est donc : $\dfrac{4 \times 60}{12} = 20$ (min.). **Réponse c**

Éléments de la correction du QCM 10

Amérique du Nord 19 mai 2022

1. $a = \ln(9) + \ln\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ln\left(\dfrac{1}{9}\right) = \ln\left(3^2\right) + \ln\left(\sqrt{3}\right) - \ln(3) - \ln\left(3^2\right) = 1\dfrac{1}{2}\ln(3) - \ln(3) = -\dfrac{1}{2}\ln(3)$

Réponse d

2. Donnons en premier le domaine de définition. Il faut que $x > 0$ et $x > 10$. Donc $\mathscr{D}_f =]10\,;\,+\infty[$.

Dans $\mathscr{D}_f$, $\ln(x) + \ln(x-10) = \ln(3) + \ln(7) \iff \ln(x(x-10)) = \ln(3 \times 7) \iff x(x-10) = 21$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) ou

$x^2 - 10x - 21 = 0$. $\Delta = 184 > 0$, donc ce trinôme admet deux solutions. Or $\sqrt{\Delta} = \sqrt{184} = \sqrt{4 \times 46} = 2\sqrt{46}$.

Les deux solution sont : $x_1 = \dfrac{10 - 2\sqrt{46}}{2} = 5 - \sqrt{46}$ et $x_2 = \dfrac{10 + 2\sqrt{46}}{2} = 5 + \sqrt{46}$.

Or $5^2 = 25 < 46$, donc $5 < \sqrt{46} \iff 5 - \sqrt{46} < 0$ et $5 - \sqrt{46} \notin \mathscr{D}_f$.

Par contre $\sqrt{46} > 5 \Rightarrow 5 + \sqrt{46} > 5 + 5 = 10$, donc $x_2 \in \mathscr{D}_f$.

La seule solution réelle est donc $5 + \sqrt{46}$. **Réponse c**.

3. La fonction f est définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par l'expression $f(x) = x^2(-1 + \ln(x))$. Elle est continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.

$\forall x \in]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 2x \times (-1 + \ln(x)) + x^2 \times \dfrac{1}{x} = -2x + 2x\ln(x) + x = -x + 2x\ln(x) = x(2\ln(x) - 1)$.

$f'(x) = 0 \iff x(2\ln(x) - 1) = 0 \iff 2\ln(x) - 1 \iff \ln(x) = \dfrac{1}{2} \iff x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}$. La tangente au point d'abscisse $a = \sqrt{\mathrm{e}}$ est horizontale. Son équation est donnée par : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Sachant que $f'\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = 0$ et que $f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = \sqrt{\mathrm{e}}^2\left(-1 + \ln(\sqrt{\mathrm{e}})\right) = \mathrm{e}\left(-1 + \dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}$. L'équation de cette tangente horizontale est donc : $y = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}$.

Réponse d

4. Un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons du sac.

Il s'agit là d'un schéma de Bernoulli : la répétition de 5 expériences aléatoires n'ayant que deux issues, identiques et indépendantes entre elles. Si on note par X la variable aléatoire donnant le nombre de jetons jaune tirés, alors X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \dfrac{20}{50} = \dfrac{2}{5}$: $X \sim \mathscr{B}\left(5\,;\,\dfrac{2}{5}\right)$

Ainsi $p(X=2)=\binom{5}{2}\times\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\left(1-\frac{2}{5}\right)^{5-2}=0{,}3456\approx 0{,}346$.

Réponse b

5. On reprend les conditions précédentes : un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons du sac. X est la variable aléatoire donnant le nombre de jetons jaune tirés et X suit donc une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$: $X\sim\mathscr{B}\left(5\,;\,\frac{2}{5}\right)$.

$p(X\geqslant 1)=1-p(X<1)=1-p(X=0)=1-\left(\frac{3}{5}\right)^5\approx 0{,}922$.

Réponse d

6. On reprend les conditions précédentes : un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons du sac. X est la variable aléatoire donnant le nombre de jetons jaune tirés et X suit donc une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$: $X\sim\mathscr{B}\left(5\,;\,\frac{2}{5}\right)$.

L'espérance d'une loi binomiale est égale à : $E(X)=np$.

Ici, $E(x)=5\times\frac{2}{5}=2$.

Réponse c

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DU QCM 11

Métropole 8 septembre 2022

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=\frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}.$$

On a pour tout réel x, $g(x)=\frac{\mathrm{e}^x\times 2}{\mathrm{e}^x\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)}=\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\mathrm{e}^{-x}=1$ et enfin $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\frac{2}{1}=2$. Réponse **b.**

2. La dérivée seconde f'' est positive sur les intervalles $]-\infty\,;\,-1[$ et $[2\,;\,+\infty[$, donc la fonction f est convexe sur ces intervalles. Réponse **c.**

3. On a pour tout naturel n :

$b_{n+1}=a_{n+1}-2=0{,}5a_n+1-2=0{,}5a_n-1=0{,}5\left(a_n-2\right)=0{,}5b_n$.

L'égalité $b_{n+1}=0{,}5b_n$ montre que la suite (b_n) est une suite géométrique de raison 0,5.

Réponse **d.**

4. • Comme $-1<\frac{1}{4}<1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}1+\left(\frac{1}{4}\right)^n=1$;

• On a $\frac{n}{n+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}2-\frac{n}{n+1}=1$.

On a donc $1+\left(\frac{1}{4}\right)^n\leqslant u_n\leqslant 2-\frac{n}{n+1}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty}1+\left(\frac{1}{4}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}2-\frac{n}{n+1}=1$.

D'après le théorème des gendarmes, on peut dire que la suite (u_n) est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$. Réponse **b.**

5. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln x$.

Si $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3\left(\ln x - \dfrac{1}{3}\right)$, alors $F'(x) = x^2\left(\ln x - \dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{1}{3}x^3 \times \dfrac{1}{x} = x^2 \ln x - \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{3}x^2 = x^2 \ln x = f(x)$. Réponse **a.**

6. $2 + \dfrac{3\mathrm{e}^{-x} - 5}{\mathrm{e}^{-x} + 1} = \dfrac{2\mathrm{e}^{-x} + 2 + 3\mathrm{e}^{-x} - 5}{\mathrm{e}^{-x} + 1} = \dfrac{5\mathrm{e}^{-x} - 3}{\mathrm{e}^{-x} + 1}$; en multipliant chaque terme par e^{x}, on obtient : $\dfrac{5 - 3\mathrm{e}^{x}}{1 + \mathrm{e}^{x}}$. Réponse **a.**

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DU QCM 12

Métropole 9 septembre 2022

1. On considère les suites (a_n) et (b_n) définie par $a_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 1$ et $b_n = a_n - 2$.

On peut affirmer que :

a. (a_n) est arithmétique ; **b.** (b_n) est géométrique ;
c. (a_n) est géométrique ; **d.** (b_n) est arithmétique.

$b_n = a_n - 2$ donc $a_n = b_n + 2$.
$b_{n+1} = a_{n+1} - 2 = 0{,}5a_n + 1 - 2 = 0{,}5(b_n + 2) - 1 = 0{,}5b_n + 1 - 1 = 0{,}5b_n$
donc la suite (b_n) est géométrique de raison 0,5. **Réponse b.**

Dans les questions 2. et 3., on considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 2,\ v_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n : \left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & u_n + 3v_n \\ v_{n+1} & = & u_n + v_n. \end{array}\right.$$

2. On peut affirmer que :

a. $\left\{\begin{array}{lcl} u_2 & = & 5 \\ v_2 & = & 3 \end{array}\right.$ **b.** $u_2^2 - 3v_2^2 = -2^2$ **c.** $\dfrac{u_2}{v_2} = 1{,}75$ **d.** $5u_1 = 3v_1$.

$\left\{\begin{array}{lclclcl} u_1 & = & u_0 + 3v_0 & = & 2 + 3 \times 1 & = & 5 \\ v_1 & = & u_0 + v_0 & = & 2 + 1 & = & 3 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{lclclcl} u_2 & = & u_1 + 3v_1 & = & 5 + 3 \times 3 & = & 14 \\ v_2 & = & u_1 + v_1 & = & 5 + 3 & = & 8 \end{array}\right.$

$\dfrac{u_2}{v_2} = \dfrac{14}{8} = 1{,}75$ **Réponse c.**

3. On considère le programme ci-dessous écrit en langage Python :

```
def valeurs() :
  u = 2
  v = 1
  for k in range(1,11) :
    c = u
    u = u + 3*v
    v = c + v
  return (u,v)
```

Ce programme renvoie :

a. u_{11} et v_{11} ;

b. u_{10} et v_{11} ;

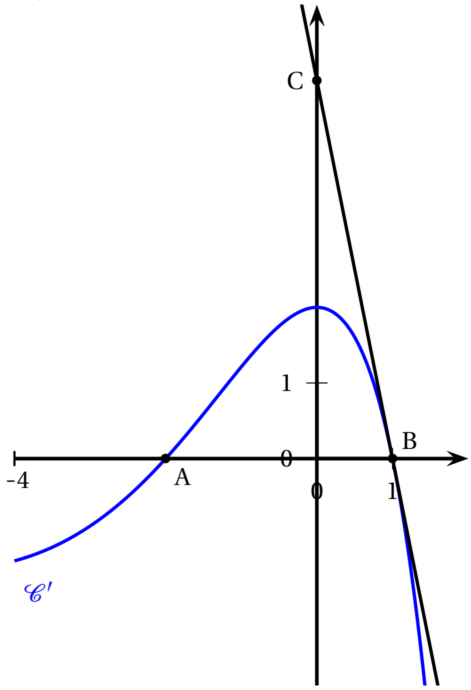
c. les valeurs de u_n et v_n pour n allant de 1 à 10 ;

d. u_{10} et v_{10}.

> **Réponse d.**

Pour les questions 4. et 5., on considère une fonction f deux fois dérivable sur l'intervalle $[-4 ; 2]$. On note f' la fonction dérivée de f et f'' la dérivée seconde de f.

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}'$ de la fonction dérivée f' dans un repère du plan. On donne de plus les points A$(-2 ; 0)$, B$(1 ; 0)$ et C$(0 ; 5)$.



4. La fonction f est :

a. concave sur $[-2 ; 1]$;

b. convexe sur $[-4 ; 0]$;

c. convexe sur $[-2 ; 1]$;

d. convexe sur $[0 ; 2]$.

> La fonction f' est croissante sur $[-4 ; 0]$ donc la fonction f est convexe sur cet intervalle. **Réponse b.**

5. On admet que la droite (BC) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}'$ au point B. On a :

a. $f'(1) < 0$;

b. $f'(1) = 5$;

c. $f''(1) > 0$;

d. $f''(1) = -5$.

> Le coefficient directeur de la droite (BC) est égal à $f''(1)$. **Réponse d.**

6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 + 1\right) e^x$.

La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 1$ est définie par :

a. $F(x) = \left(x^2 - 2x + 3\right) e^x$;

b. $F(x) = \left(x^2 - 2x + 3\right) e^x - 2$;

c. $F(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right) e^x + 1$;

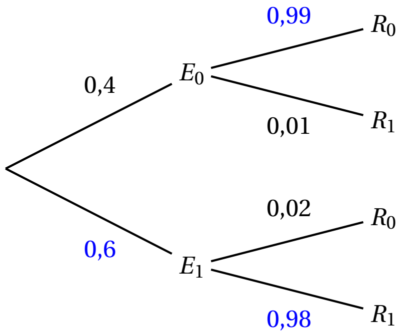
d. $F(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right) e^x$.

> Pour la fonction F de la réponse a. on a $F(0) = 3$, et pour la fonction F de la réponse d., on a $F(0) = 0$. On peut donc éliminer ces deux réponses et tester les deux autres.
> Si $F(x) = \left(x^2 - 2x + 3\right) e^x - 2$,
> alors $F'(x) = (2x - 2) e^x + \left(x^2 - 2x + 3\right) e^x = \left(x^2 + 1\right) e^x = f(x)$.
> De plus $F(0) = 3 e^0 - 2 = 1$. **Réponse b.**

Éléments de la correction du QCM 13

Nouvelle-Calédonie 26 octobre 2022

- E_0 : « le bit envoyé est un 0 » ;
- E_1 : « le bit envoyé est un 1 » ;
- R_0 : « le bit reçu est un 0 »
- R_1 : « le bit reçu est un 1 ».



On sait que :
$p(E_0) = 0{,}4$; $\quad p_{R_0}(R_1) = 0{,}01$; $\quad p_{R_1}(R_0) = 0{,}02$.
On rappelle que la probabilité conditionnelle de A sachant B est notée $p_B(A)$.
On peut ainsi représenter la situation par l'arbre de probabilités ci-dessus.

1. $p(E_0 \cap R_0) = p(E_0) \times p_{E_0}(R_0) = 0{,}4 \times 0{,}99 = 0{,}396$.

2. On a aussi $p(E_1 \cap R_0) = p(E_1) \times p_{E_1}(R_0) = 0{,}6 \times 0{,}02 = 0{,}012$.
D'après la loi des probabilités totales : $p(R_0) = p(E_0 \cap R_0) + p(E_1 \cap R_0) = 0{,}396 + 0{,}012 = 0{,}408$.

3. Avec $p(R_1) = 1 - p(R_0) = 1 - 0{,}408 = 0{,}592$;
$p_{R_1}(E_0) = \dfrac{p(R_1 \cap E_0)}{p(R_1)} = \dfrac{p(E_0 \cap R_1)}{p(R_1)} = \dfrac{0{,}4 \times 0{,}01}{0{,}592} = \dfrac{0{,}004}{0{,}592} \approx 0{,}0067$, soit environ 0,007 au millième près.

4. On a $p(\text{erreur de transmission}) = p(E_0 \cap R_1) + p(E_1 \cap R_0) = 0{,}4 \times 0{,}01 + 0{,}6 \times 0{,}02 = 0{,}004 + 0{,}012 = 0{,}016$.

Un message de longueur huit bits est appelé un octet.
On admet que la probabilité qu'un octet soit transmis sans erreur est égale à 0,88.

5. On a une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}88$. Si x est la variable aléatoire égal au nombre d'octets transmis sans erreur, on a :
$p(X = 7) = \binom{10}{7} \times 0{,}88^7 \times (1 - 0{,}88)^{10-7} = \binom{10}{7} \times 0{,}88^7 \times (0{,}12)^3 \approx 0{,}0847$ soit 0,085 au millième près.

6. On a $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} 0{,}88^0 \times 0{,}12^{10} = 1 - 0{,}12^{10}$.

7. On a $p(X = 18) = 0{,}88^{18} \approx 0{,}109 > 0{,}1$. Donc $N_0 = 18$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DU QCM 14

Nouvelle-Calédonie 27 octobre 2022

1.

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

On a $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, donc puisque $n + 1 \geqslant 1 > 0$ et que $\dfrac{1}{n1} > 0$, on en déduit que pour tout naturel :

$$-\frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

La suite (u_n) encadrée par deux suites ayant pour limite 0 a pour limite 0.

✧✧✧

Dans les questions 2 et 3, on considère deux suites (v_n) et (w_n) vérifiant la relation :

$$w_n = e^{-2v_n} + 2.$$

On a $w_0 = e^{-2v_0} + 2 = e^{-2\ln(a)} + 2 = \dfrac{1}{e^{2\ln(a)}} + 2 = \dfrac{1}{e^{\ln(a^2)}} + 2 = \dfrac{1}{a^2} + 2.$

2. On sait que la suite (v_n) est croissante. On peut affirmer que la suite (w_n) est :

On a successivement :

$v_n \leqslant v_{n+1} \Rightarrow 2v_n \leqslant 2v_{n+1} \Rightarrow -2v_{n+1} \leqslant -2v_n \Rightarrow e^{-2v_{n+1}} \leqslant e^{-2v_n}$ par croissance de la fonction exponentielle et enfin $e^{-2v_{n+1}} + 2 \leqslant e^{-2v_n} + 2$, soit $w_{n+1} \leqslant w_n$: la suite (w_n) est décroissante.

D'autre part on sait que quel que soit le réelα, $e^{\alpha} > 0$ donc la suite est minorée par 2.

3.

$$a_0 = 2 \text{ et, pour tout entier naturel } n, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{8}{3}.$$

Soit la suite (b_n) définie pour tout naturel n par $b_n = a_n + \alpha$.

Alors $b_{n+1} = a_{n+1} + \alpha = \dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{8}{3} + \alpha = \dfrac{1}{3}(b_n - \alpha) + \dfrac{8}{3} + \alpha = \dfrac{1}{3}b_n - \dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{8}{3} + \alpha = \dfrac{1}{3}b_n + \dfrac{8+2\alpha}{3}.$

Prenons $\alpha = -4$, alors $b_{n+1} = \dfrac{1}{3}b_n$: cette égalité montre que la suite (b_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $b_0 = a_0 + \alpha = 2 - 4 = -2$.

On sait qu'alors que, quel que soit le naturel n, $b_n = b_0 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = -2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

Finalement $b_n = a_n - 4 \iff a_n = 4 + b_n = 4 - 2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

4. On considère une suite (b_n) telle que, pour tout entier naturel n, on a :

$$b_{n+1} = b_n + \ln\left(\frac{2}{(b_n)^2 + 3}\right).$$

On a quel que soit le naturel n, $b_{n+1} - b_n = \ln\left(\dfrac{2}{(b_n)^2 + 3}\right)$.

Or quel que soit le réel b_n, $b_n^2 \geqslant 0$, donc $(b_n)^2 + 3 \geqslant 3 > 2$, donc $\dfrac{2}{(b_n)^2 + 3} < 1$ et enfin $\ln\left(\dfrac{2}{(b_n)^2 + 3}\right) < 0$.

Conclusion : $b_{n+1} - b_n < 0$ montre que la suite (b_n) est décroissante.

5.

$$g(x) = \frac{e^x}{x}.$$

- Au voisinage de zéro : $\lim\limits_{x \to 0} e^x = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$: géométriquement l'axe des ordonnées est asymptote verticale à $\mathscr{C}_g$.
- Au voisinage de plus l'infini : on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, donc pas d'asymptote.

6.

$$f(x) = x e^{x^2+1}.$$

En posant $u(x) = x^2 + 1$, on a $u'(x) = 2x$ et l'on peut écrire $f(x) = \dfrac{1}{2} \times 2x \times e^{x^2+1} = \dfrac{1}{2}u' e^u$: on reconnait la dérivée de $\dfrac{1}{2}e^u = \dfrac{1}{2}e^{x^2+1}$.

Donc $F(x) = \dfrac{1}{2}e^{x^2+1}$.