LYCÉE FRANÇAIS
Saint
Exupéry
CONGO BRAZZAVILLE

LYCÉE FRANÇAIS SAINT-EXUPÉRY DE BRAZZAVILLE
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES

BAC PAR THEME

PROBABILITÉS

19 EXERCICES DE BAC 2022
AVEC DES ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION

EXTRAITS DE FICHIERS LATEX DU SITE DE L'APMEP

LYCEE FRANCAIS SAINT EXUPERY

BRAZZAVILLE - REP. DU CONGO

PAR VALÉRIEN EBERLIN
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

45 PAGES

SOMMAIRE

EXERCICE 1

Thèmes : probabilités Polynésie 4 mai 2022

Selon les autorités sanitaires d'un pays, 7 % des habitants sont affectés par une certaine maladie.

Dans ce pays, un test est mis au point pour détecter cette maladie. Ce test a les caractéristiques suivantes :

- Pour les individus malades, le test donne un résultat négatif dans 20 % des cas ;
- Pour les individus sains, le test donne un résultat positif dans 1 % des cas.

Une personne est choisie au hasard dans la population et testée.
On considère les évènements suivants :

- M « la personne est malade » ;
- T « le test est positif ».

1. Calculer la probabilité de l'évènement $M \cap T$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que la probabilité que le test de la personne choisie au hasard soit positif, est de 0,065 3.
3. Dans un contexte de dépistage de la maladie, est-il plus pertinent de connaître $P_M(T)$ ou $P_T(M)$?
4. On considère dans cette question que la personne choisie au hasard a eu un test positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ? On arrondira le résultat à 10^{-2} près.
5. On choisit des personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'individus ayant un test positif parmi les 10 personnes.
   a. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.
   b. Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif. On arrondira le résultat à 10^{-2} près.
6. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elle ait un test positif, soit supérieur à 99 %.

EXERCICE 2

Thèmes : probabilités Polynésie 5 mai 2022

Les douanes s'intéressent aux importations de casques audio portant le logo d'une certaine marque. Les saisies des douanes permettent d'estimer que :

- 20 % des casques audio portant le logo de cette marque sont des contrefaçons ;
- 2 % des casques non contrefaits présentent un défaut de conception ;
- 10 % des casques contrefaits présentent un défaut de conception.

L'agence des fraudes commande au hasard sur un site internet un casque affichant le logo de la marque. On considère les évènements suivants :

- C : « le casque est contrefait » ;
- D : « le casque présente un défaut de conception » ;
- $\overline{C}$ et $\overline{D}$ désignent respectivement les évènements contraires de C et D.

Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront arrondies à 10^{-3} si nécessaire.

Partie 1

1. Calculer $P(C \cap D)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(D) = 0{,}036$.
3. Le casque a un défaut. Quelle est la probabilité qu'il soit contrefait ?

Partie 2

On commande n casques portant le logo de cette marque. On assimile cette expérience à un tirage aléatoire avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans ce lot.

1. Dans cette question, $n = 35$.
   a. Justifier que X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ où $n = 35$ et $p = 0{,}036$.
   b. Calculer la probabilité qu'il y ait parmi les casques commandés, exactement un casque présentant un défaut de conception.
   c. Calculer $P(X \leqslant 1)$.
2. Dans cette question, n n'est pas fixé.
   Quel doit être le nombre minimal de casques à commander pour que la probabilité qu'au moins un casque présente un défaut soit supérieur à 0,99 ?

EXERCICE 3

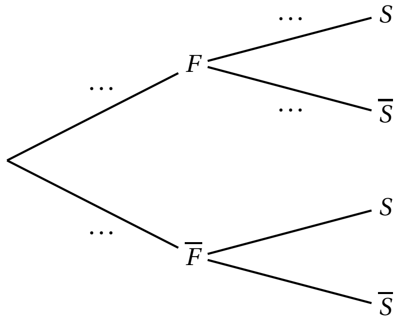
Thèmes : probabilités   Métropole Antilles-Guyanne 2022

Le directeur d'une grande entreprise a proposé à l'ensemble de ses salariés un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel.
Ce stage a été suivi par 25 % des salariés.

1. Dans cette entreprise, 52 % des salariés sont des femmes, parmi lesquelles 40 % ont suivi le stage.
   On interroge au hasard un salarié de l'entreprise et on considère les évènements :
   - F : « le salarié interrogé est une femme »,
   - S : « le salarié interrogé a suivi le stage ».

   $\overline{F}$ et $\overline{S}$ désignent respectivement les évènements contraires des évènements F et S.

a. Donner la probabilité de l'évènement S.
b. Recopier et compléter les pointillés de l'arbre pondéré ci-contre sur les quatre branches indiquées.
c. Démontrer que la probabilité que la personne interrogée soit une femme ayant suivi le stage est égale à 0,208.
d. On sait que la personne interrogée a suivi le stage. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?
e. Le directeur affirme que, parmi les hommes salariés de l'entreprise, moins de 10 % ont suivi le stage.
Justifier l'affirmation du directeur.



2. On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 20 salariés de cette entreprise choisis au hasard associe le nombre de salariés de cet échantillon ayant suivi le stage. On suppose que l'effectif des salariés de l'entreprise est suffisamment important pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.

   a. Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X.

   b. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que 5 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.

   c. Le programme ci-dessous, écrit en langage Python, utilise la fonction **binomiale**(i,n,p) créée pour l'occasion qui renvoie la valeur de la probabilité $P(X = i)$ dans le cas où la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

```
def proba(k) :
    P=0
    for i in range(0,k+1) :
        P=P+binomiale(i,20,0.25)
    return P
```

   Déterminer, à 10^{-3} près, la valeur renvoyée par ce programme lorsque l'on saisit proba(5) dans la console Python.
   Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

   d. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'au moins 6 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.

3. Cette question est indépendante des questions 1 et 2.
   Pour inciter les salariés à suivre le stage, l'entreprise avait décidé d'augmenter les salaires des salariés ayant suivi le stage de 5 %, contre 2 % d'augmentation pour les salariés n'ayant pas suivi le stage.
   Quel est le pourcentage moyen d'augmentation des salaires de cette entreprise dans ces conditions ?

Exercice 4

Thèmes : probabilités   Métropole Antilles-Guyane 12 mai 2022

Le coyote est un animal sauvage proche du loup, qui vit en Amérique du Nord.
Dans l'état d'Oklahoma, aux États-Unis, 70 % des coyotes sont touchés par une maladie appelée ehrlichiose.
Il existe un test aidant à la détection de cette maladie. Lorsque ce test est appliqué à un coyote, son résultat est soit positif, soit négatif, et on sait que :

- Si le coyote est malade, le test est positif dans 97 % des cas.
- Si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans 95 % des cas.

Partie A

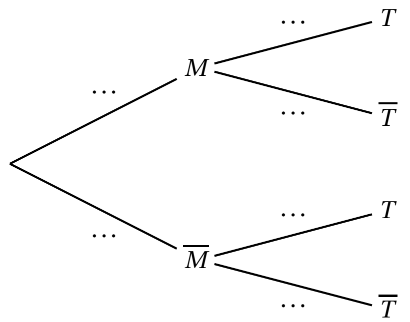
Des vétérinaires capturent un coyote d'Oklahoma au hasard et lui font subir un test pour l'ehrlichiose.
On considère les évènements suivants :

- M : « le coyote est malade » ;

- T : « le test du coyote est positif ».

On note $\overline{M}$ et $\overline{T}$ respectivement les évènements contraires de M et T.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation.



2. Déterminer la probabilité que le coyote soit malade et que son test soit positif.
3. Démontrer que la probabilité de T est égale à 0,694.
4. On appelle « valeur prédictive positive du test » la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test est positif.
   Calculer la valeur prédictive positive du test. On arrondira le résultat au millième.
5. **a.** Par analogie avec la question précédente, proposer une définition de la « valeur prédictive négative du test » et calculer cette valeur en arrondissant au millième.
   b. Comparer les valeurs prédictives positive et négative du test, et interpréter.

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un coyote capturé au hasard présente un test positif est de 0,694.

1. Lorsqu'on capture au hasard cinq coyotes, on assimile ce choix à un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard associe le nombre de coyotes dans cet échantillon ayant un test positif.
   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier et préciser ses paramètres.
   b. Calculer la probabilité que dans un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard, un seul ait un test positif. On arrondira le résultat au centième.
   c. Un vétérinaire affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'au moins quatre coyotes sur cinq aient un test positif : cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.
2. Pour tester des médicaments, les vétérinaires ont besoin de disposer d'un coyote présentant un test positif. Combien doivent-ils capturer de coyotes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux présente un test positif soit supérieure à 0,99 ?

EXERCICE 5

Thèmes : probabilités   Centres Etrangers 11 mai 2022

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Au cours de la fabrication d'une paire de lunettes, la paire de verres doit subir deux traitements notés T1 et T2.

Partie A

On prélève au hasard une paire de verres dans la production.
On désigne par A l'évènement : « la paire de verres présente un défaut pour le traitement T1 ».
On désigne par B l'évènement : « la paire de verres présente un défaut pour le traitement T2 ».
On note respectivement $\overline{A}$ et $\overline{B}$ les évènements contraires de A et B.
Une étude a montré que :

— la probabilité qu'une paire de verres présente un défaut pour le traitement T1 notée $P(A)$ est égale à 0,1.

— la probabilité qu'une paire de verres présente un défaut pour le traitement T2 notée $P(B)$ est égale à 0,2.

— la probabilité qu'une paire de verres ne présente aucun des deux défauts est 0,75.

1. Recopier et compléter le tableau suivant avec les probabilités correspondantes.

	A	$\overline{A}$	Total
B			
$\overline{B}$			
Total			1

2. a. Déterminer, en justifiant la réponse, la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour au moins un des deux traitements T1 ou T2.

   b. Donner la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente deux défauts, un pour chaque traitement T1 et T2.

   c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

3. Calculer la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour un seul des deux traitements.

4. Calculer la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour le traitement T2, sachant que cette paire de verres présente un défaut pour le traitement T1.

Partie B

On prélève, au hasard, un échantillon de 50 paires de verres dans la production. On suppose que la production est suffisamment importante pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de ce type, associe le nombre de paires de verres qui présentent le défaut pour le traitement T1.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

2. Donner l'expression permettant de calculer la probabilité d'avoir, dans un tel échantillon, exactement 10 paires de verres qui présentent ce défaut.
   Effectuer ce calcul et arrondir le résultat à 10^{-3}.

3. En moyenne, combien de paires de verres ayant ce défaut peut-on trouver dans un échantillon de 50 paires ?

EXERCICE 6

Thèmes : probabilités Centres Etrangers 12 mai 2022

Une urne contient des jetons blancs et noirs tous indiscernables au toucher.
Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux jetons de cette urne.
On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux jetons tirés sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux jetons tirés sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux jetons tirés sont de couleurs différentes.

1. On considère que l'urne contient 2 jetons noirs et 3 jetons blancs.

a. Modéliser la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

b. Calculer la probabilité de perdre 9 € sur une partie.

2. On considère maintenant que l'urne contient 3 jetons blancs et au moins deux jetons noirs mais on ne connait pas le nombre exact de jetons noirs. On appellera N le nombre de jetons noirs.

a. Soit X la variable aléatoire donnant le gain du jeu pour une partie.
Déterminer la loi de probabilité de cette variable aléatoire.

b. Résoudre l'inéquation pour x réel :

$$-x^2 + 30x - 81 > 0$$

c. En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer le nombre de jetons noirs que l'urne doit contenir afin que ce jeu soit favorable au joueur.

d. Combien de jetons noirs le joueur doit-il demander afin d'obtenir un gain moyen maximal ?

3. On observe 10 joueurs qui tentent leur chance en effectuant une partie de ce jeu, indépendamment les uns des autres. On suppose que 7 jetons noirs ont été placés dans l'urne (avec 3 jetons blancs).
Quelle est la probabilité d'avoir au moins 1 joueur gagnant 5 euros ?

EXERCICE 7

Thèmes : probabilités Asie 17 mai 2022

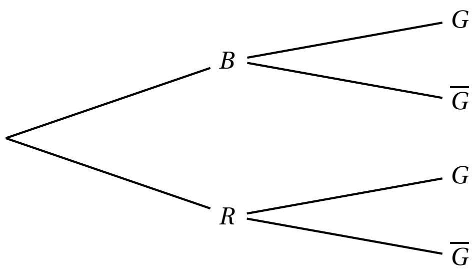
Principaux domaines abordés : Probabilités conditionnelles et indépendance. Variables aléatoires.

Lors d'une kermesse, un organisateur de jeux dispose, d'une part, d'une roue comportant quatre cases blanches et huit cases rouges et, d'autre part, d'un sac contenant cinq jetons portant les numéros 1, 2, 3, 4 et 5.
Le jeu consiste à faire tourner la roue, chaque case ayant la même probabilité d'être obtenue, puis à extraire un ou deux jetons du sac selon la règle suivante :

- si la case obtenue par la roue est blanche, alors le joueur extrait un jeton du sac ;
- si la case obtenue par la roue est rouge, alors le joueur extrait successivement et sans remise deux jetons du sac.

Le joueur gagne si le ou les jetons tirés portent tous un numéro impair.

1. Un joueur fait une partie et on note B l'évènement « la case obtenue est blanche », R l'évènement « la case obtenue est rouge » et G l'évènement « le joueur gagne la partie ».
   a. Donner la valeur de la probabilité conditionnelle $P_B(G)$.
   b. On admettra que la probabilité de tirer successivement et sans remise deux jetons impairs est égale à 0,3.
   Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant :



2. a. Montrer que $P(G) = 0,4$.
   b. Un joueur gagne la partie.
   Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu une case blanche en lançant la roue ?
3. Les évènements B et G sont-ils indépendants ? Justifier.
4. Un même joueur fait dix parties. Les jetons tirés sont remis dans le sac après chaque partie. On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.
   a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
   b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que le joueur gagne exactement trois parties sur les dix parties jouées.
   c. Calculer $P(X \geqslant 4)$ arrondie à 10^{-3} près.
   Donner une interprétation du résultat obtenu.
5. Un joueur fait n parties et on note p_n la probabilité de l'évènement « le joueur gagne au moins une partie ».
   a. Montrer que $p_n = 1 - 0,6^n$.
   b. Déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une partie est supérieure ou égale à 0,99.

EXERCICE 8

Thèmes : probabilités Asie 18 mai 2022

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie 1

Julien doit prendre l'avion ; il a prévu de prendre le bus pour se rendre à l'aéroport.
S'il prend le bus de 8 h, il est sûr d'être à l'aéroport à temps pour son vol.
Par contre, le bus suivant ne lui permettrait pas d'arriver à temps à l'aéroport.
Julien est parti en retard de son appartement et la probabilité qu'il manque son bus est de 0,8.
S'il manque son bus, il se rend à l'aéroport en prenant une compagnie de voitures privées ; il a alors une probabilité de 0,5 d'être à l'heure à l'aéroport.

On notera :

- B l'évènement : « Julien réussit à prendre son bus » ;
- V l'évènement : « Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol ».

1. Donner la valeur de $P_B(V)$.

2. Représenter la situation par un arbre pondéré.

3. Montrer que $P(V) = 0{,}6$.

4. Si Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol, quelle est la probabilité qu'il soit arrivé à l'aéroport en bus ? Justifier.

Partie 2

Les compagnies aériennes vendent plus de billets qu'il n'y a de places dans les avions car certains passagers ne se présentent pas à l'embarquement du vol sur lequel ils ont réservé. On appelle cette pratique le surbooking.
Au vu des statistiques des vols précédents, la compagnie aérienne estime que chaque passager a 5 % de chance de ne pas se présenter à l'embarquement.
Considérons un vol dans un avion de 200 places pour lequel 206 billets ont été vendus. On suppose que la présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres passagers et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers se présentant à l'embarquement.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. En moyenne, combien de passagers vont-ils se présenter à l'embarquement ?

3. Calculer la probabilité que 201 passagers se présentent à l'embarquement. Le résultat sera arrondi à 10^{-3} près.

4. Calculer $P(X \leqslant 200)$, le résultat sera arrondi à 10^{-3} près. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

5. La compagnie aérienne vend chaque billet à 250 euros.
Si plus de 200 passagers se présentent à l'embarquement, la compagnie doit rembourser le billet d'avion et payer une pénalité de 600 euros à chaque passager lésé.
On appelle :

Y la variable aléatoire égale au nombre de passagers qui ne peuvent pas embarquer bien qu'ayant acheté un billet ;

C la variable aléatoire qui totalise le chiffre d'affaire de la compagnie aérienne sur ce vol.

On admet que Y suit la loi de probabilité donnée par le tableau suivant :

y_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y_i)$	0,947 75	0,030 63	0,014 41	0,005 39	0,001 51	0,000 28	

a. Compléter la loi de probabilité donnée ci-dessus en calculant $P(Y = 6)$.

b. Justifier que : $C = 51\,500 - 850Y$.

c. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire C sous forme d'un tableau.
Calculer l'espérance de la variable aléatoire C à l'euro près.

d. Comparer le chiffre d'affaires obtenu en vendant exactement 200 billets et le chiffre d'affaires moyen obtenu en pratiquant le surbooking.

Dans une station de ski, il existe deux types de forfait selon l'âge du skieur :

— un forfait JUNIOR pour les personnes de moins de 25 ans ;

— un forfait SENIOR pour les autres.

Par ailleurs, un usager peut choisir, en plus du forfait correspondant à son âge l'*option coupe-file* qui permet d'écourter le temps d'attente aux remontées mécaniques.
On admet que :

- 20 % des skieurs ont un forfait JUNIOR ;
- 80 % des skieurs ont un forfait SENIOR ;
- parmi les skieurs ayant un forfait JUNIOR, 6 % choisissent l'option coupe-file ;
- parmi les skieurs ayant un forfait SENIOR, 12,5 % choisissent l'option coupe-file.

On interroge un skieur au hasard et on considère les évènements :

- J : « le skieur a un forfait JUNIOR » ;
- C : « le skieur choisit l'option coupe-file ».

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité $P(J \cap C)$.
3. Démontrer que la probabilité que le skieur choisisse l'option coupe-file est égale à 0,112.
4. Le skieur a choisi l'option coupe-file. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un skieur ayant un forfait SENIOR ? Arrondir le résultat à 10^{-3}.
5. Est-il vrai que les personnes de moins de vingt-cinq ans représentent moins de 15 % des skieurs ayant choisi l'option coupe-file ? Expliquer.

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un skieur choisisse l'option coupe-file est égale à 0,112.
On considère un échantillon de 30 skieurs choisis au hasard.
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre des skieurs de l'échantillon ayant choisi t'option coupe-file.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
   Donner les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité qu'au moins un des 30 skieurs ait choisi l'option coupe-file. Arrondir le résultat à 10^{-3}.
3. Calculer la probabilité qu'au plus un des 30 skieurs ait choisi l'option coupe-file. Arrondir le résultat à 10^{-3}.
4. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

EXERCICE 10

Thèmes : probabilités   Centres Etrangers G1 19 mai 2022

Les résultats seront arrondis si besoin à 10^{-4} *près*

Une étude statistique réalisée dans une entreprise fournit les informations suivantes :

- 48 % des salariés sont des femmes. Parmi elles, 16,5 % exercent une profession de cadre;
- 52 % des salariés sont des hommes. Parmi eux, 21,5 % exercent une profession de cadre.

On choisit une personne au hasard parmi les salariés. On considère les évènements suivants :

- F : « la personne choisie est une femme »;
- C : « la personne choisie exerce une profession de cadre ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que la personne choisie soit une femme qui exerce une profession de cadre.
3. **a.** Démontrer que la probabilité que la personne choisie exerce une profession de cadre est égale à 0,191.

   b. Les évènements F et C sont-ils indépendants? Justifier.
4. Calculer la probabilité de F sachant C, notée $P_C(F)$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
5. On choisit au hasard un échantillon de 15 salariés. Le grand nombre de salariés dans l'entreprise permet d'assimiler ce choix à un tirage avec remise.

   On note X la variable aléatoire donnant le nombre de cadres au sein de l'échantillon de 15 salariés.

   On rappelle que la probabilité qu'un salarié choisi au hasard soit un cadre est égale à 0,191.

   a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   b. Calculer la probabilité que l'échantillon contienne au plus 1 cadre.

   c. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X.
6. Soit n un entier naturel.

   On considère dans cette question un échantillon de n salariés.

   Quelle doit être la valeur minimale de n pour que la probabilité qu'il y ait au moins un cadre au sein de l'échantillon soit supérieure ou égale à 0,99?

EXERCICE 11

Thèmes : probabilités   Amérique du Nord 18 mai 2022

Chaque chaque jour où il travaille, Paul doit se rendre à la gare pour rejoindre son lieu de travail en train. Pour cela, il prend son vélo deux fois sur trois et, si il ne prend pas son vélo, il prend sa voiture.

1. lorsqu'il prend son vélo pour rejoindre la gare, Paul ne rate le train qu'une fois sur 50 alors que, lorsqu'il prend sa voiture pour rejoindre la gare Paul rate son train une fois sur 10.

On considère une journée au hasard lors de laquelle Paul sera à la gare pour prendre le train qui le conduira au travail.

On note :

- V l'évènement « Paul prend son vélo pour rejoindre la gare » ;
- R l'évènement « Paul rate son train ».

a. Faire un arbre pondéré résumant la situation.

b. Montrer que la probabilité que Paul rate son train est égale à $\dfrac{7}{150}$.

c. Paul a raté son train. Déterminer la valeur exacte de la probabilité qu'il ait pris son vélo pour rejoindre la gare.

2. On choisit au hasard un mois pendant lequel Paul s'est rendu 20 jours à la gare pour rejoindre son lieu de travail selon les modalités décrites en préambule.

On suppose que, pour chacun de ces 20 jours, le choix entre le vélo et la voiture est indépendant des choix des autres jours.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de jours où Paul prend son vélo sur ces 20 jours.

a. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.

b. Quelle est la probabilité que Paul prenne son vélo exactement 10 jours sur ces 20 jours pour se rendre à la gare ? On arrondira la probabilité cherchée à 10^{-3}.

c. Quelle est la probabilité que Paul prenne son vélo au moins 10 jours sur ces 20 jours pour se rendre à la gare ? On arrondira la probabilité cherchée à 10^{-3}.

d. En moyenne, combien de jours sur une période choisie au hasard de 20 jours pour se rendre à la gare, Paul prend-il son vélo ? On arrondira la réponse à l'entier.

3. Dans le cas où Paul se rend à la gare en voiture, on note T la variable aléatoire donnant le temps de trajet nécessaire pour se rendre à la gare. La durée du trajet est donnée en minutes, arrondie à la minute. La loi de probabilité de T est donnée par le tableau ci-dessous :

k (en minutes)	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$P(T=k)$	0,14	0,13	0,13	0,12	0,12	0,11	0,10	0,08	0,07

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire T et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 12

Thèmes : probabilités   Amérique du Nord 19 mai 2022

Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée.

La société dispose de deux points de location distinctes, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un où l'autre des deux points de location.

On admettra que le nombre total de vélos est constant et que tous les matins, à l'ouverture du service, chaque vélo se trouve au point A ou au point B.

D'après une étude statistique :

- Si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à 0,84 ;
- Si un vélo se trouve au point B un matin la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à 0,76.

À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B.

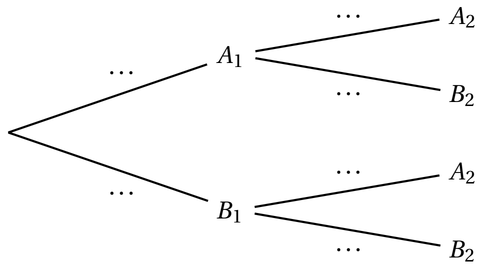
On considère un vélo de la société pris au hasard.

Pour tout entier naturel non nul n, on définit les évènements suivants :

- A_n : « le vélo se trouve au point A le n-ième matin »
- B_n : « le vélo se trouve au point B le n-ième matin ».

Pour tout entier naturel non nul n, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n et b_n la probabilité de l'évènement B_n. Ainsi $a_1 = 0{,}5$ et $b_1 = 0{,}5$.

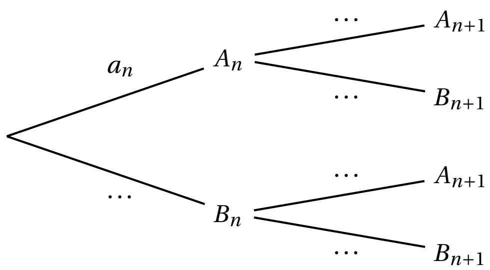
1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premiers matins :



2. **a.** Calculer a_2.

   b. Le vélo se trouve au point A le deuxième matin. Calculer la probabilité qu'il se soit trouvé au point B le premier matin. La probabilité sera arrondie au millième.

3. **a.** Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $n+1$-ième matins.



   b. Justifier que pour tout entier naturel non nul n, $a_{n+1} = 0{,}6a_n + 0{,}24$.

4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $a_n = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}$.
5. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
6. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geqslant 0{,}599$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 13

Thèmes : probabilités Polynésie 30 août 2022

Parmi les angines, un quart nécessite la prise d'antibiotiques, les autres non.
Afin d'éviter de prescrire inutilement des antibiotiques, les médecins disposent d'un test de diagnostic ayant les caractéristiques suivantes :

- lorsque l'angine nécessite la prise d'antibiotiques, le test est positif dans 90 % des cas ;
- lorsque l'angine ne nécessite pas la prise d'antibiotiques, le test est négatif dans 95 % des cas.

Les probabilités demandées dans la suite de l'exercice seront arrondies à 10^{-4} près si nécessaire.

Partie 1

Un patient atteint d'angine et ayant subi le test est choisi au hasard.
On considère les évènements suivants :

- A : « le patient est atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques » ;
- T : « le test est positif » ;
- $\overline{A}$ et $\overline{T}$ sont respectivement les évènements contraires de A et T.

1. Calculer $P(A \cap T)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(T) = 0{,}2625$.
3. On choisit un patient ayant un test positif. Calculer la probabilité qu'il soit atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques.
4. **a.** Parmi les évènements suivants, déterminer ceux qui correspondent à un résultat erroné du test : $A \cap T$, $\overline{A} \cap T$, $A \cap \overline{T}$, $\overline{A} \cap \overline{T}$.

   b. On définit l'évènement E : « le test fournit un résultat erroné ».
   Démontrer que $p(E) = 0{,}0625$.

Partie 2

On sélectionne au hasard un échantillon de n patients qui ont été testés.
On admet que l'on peut assimiler ce choix d'échantillon à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de patients de cet échantillon ayant un test erroné.

1. On suppose que $n = 50$.

   a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}0625$.

   b. Calculer $P(X = 7)$.

   c. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins un patient dans l'échantillon dont le test est erroné.
2. Quelle valeur minimale de la taille de l'échantillon faut-il choisir pour que $P(X \geqslant 10)$ soit supérieure à 0,95 ?

EXERCICE 14

Thèmes : probabilités Métropole Antilles-Guyane 8 septembre 2022

Un hôtel situé à proximité d'un site touristique dédié à la préhistoire propose deux visites dans les environs, celle d'un musée et celle d'une grotte.

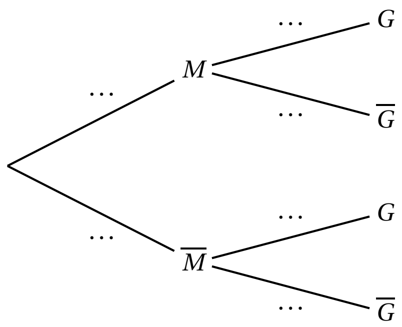
Une étude a montré que 70 % des clients de l'hôtel visitent le musée. De plus, parmi les clients visitant le musée, 60 % visitent la grotte.
Cette étude montre aussi que 6 % des clients de l'hôtel ne font aucune visite.
On interroge au hasard un client de l'hôtel et on note :

- M l'évènement : « le client visite le musée » ;
- G l'évènement : « le client visite la grotte ».

On note $\overline{M}$ l'évènement contraire de M, $\overline{G}$ l'évènement contraire de G, et pour tout évènement E, on note $p(E)$ la probabilité de E.
Ainsi, d'après l'énoncé, on a : $p\left(\overline{M} \cap \overline{G}\right) = 0{,}06$.

1. **a.** Vérifier que $p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right) = 0{,}2$, où $p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right)$ désigne la probabilité que le client interrogé ne visite pas la grotte sachant qu'il ne visite pas le musée.

b. L'arbre pondéré ci-contre modélise la situation. Recopier et compléter cet arbre en indiquant sur chaque branche la probabilité associée.



c. Quelle est la probabilité de l'évènement « le client visite la grotte et ne visite pas le musée » ?

d. Montrer que $p(G) = 0{,}66$.

2. Le responsable de l'hôtel affirme que parmi les clients qui visitent la grotte, plus de la moitié visitent également le musée. Cette affirmation est-elle exacte ?

3. Les tarifs pour les visites sont les suivants :

- visite du musée : 12 euros ;
- visite de la grotte : 5 euros.

On considère la variable aléatoire T qui modélise la somme dépensée par un client de l'hôtel pour ces visites.

a. Donner la loi de probabilité de T. On présentera les résultats sous la forme d'un tableau.

b. Calculer l'espérance mathématique de T.

c. Pour des questions de rentabilité, le responsable de l'hôtel estime que le montant moyen des recettes des visites doit être supérieur à 700 euros par jour.

Déterminer le nombre moyen de clients par journée permettant d'atteindre cet objectif.

4. Pour augmenter les recettes, le responsable souhaite que l'espérance de la variable aléatoire modélisant la somme dépensée par un client de l'hôtel pour ces visites passe à 15 euros, sans modifier le prix de visite du musée qui demeure à 12 euros.

Quel prix faut-il fixer pour la visite de la grotte afin d'atteindre cet objectif ? (On admettra que l'augmentation du prix d'entrée de la grotte ne modifie pas la fréquentation des deux sites).

5. On choisit au hasard 100 clients de l'hôtel, en assimilant ce choix à un tirage avec remise.

Quelle est la probabilité qu'au moins les trois quarts de ces clients aient visité la grotte à l'occasion de leur séjour à l'hôtel ?

On donnera une valeur du résultat à 10^{-3} près.

Dans le magasin d'Hugo, les clients peuvent louer deux types de vélos : vélos de route ou bien vélos tout terrain.
Chaque type de vélo peut être loué dans sa version électrique ou non.
On choisit un client du magasin au hasard, et on admet que :

— Si le client loue un vélo de route, la probabilité que ce soit un vélo électrique est de 0,4 ;

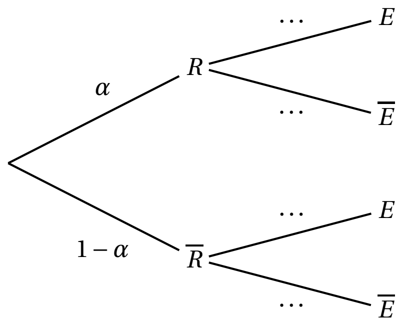
— Si le client loue un vélo tout terrain, la probabilité que ce soit un vélo électrique est de 0,7 ;

— La probabilité que le client loue un vélo électrique est de 0,58.

On appelle α la probabilité que le client loue un vélo de route, avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.
On considère les évènements suivants :

- R : « le client loue un vélo de route » ;
- E : « le client loue un vélo électrique » ;
- $\overline{R}$ et $\overline{E}$, évènements contraires de R et E.

On modélise cette situation aléatoire à l'aide de l'arbre reproduit ci-contre :
Si F désigne un évènement quelconque, on notera $p(F)$ la probabilité de F.



1. Recopier cet arbre sur la copie et le compléter.
2. **a.** Montrer que $p(E) = 0,7 - 0,3\alpha$.
   b. En déduire que : $\alpha = 0,4$.
3. On sait que le client a loué un vélo électrique.
   Déterminer la probabilité qu'il ait loué un vélo tout terrain. On donnera le résultat arrondi au centième.
4. Quelle est la probabilité que le client loue un vélo tout terrain électrique ?
5. Le prix de la location à la journée d'un vélo de route non électrique est de 25 euros, celui d'un vélo tout terrain non électrique de 35 euros.
   Pour chaque type de vélo, le choix de la version électrique augmente le prix de location à la journée de 15 euros.
   On appelle X la variable aléatoire modélisant le prix de location d'un vélo à la journée.
   a. Donner la loi de probabilité de X. On présentera les résultats sous forme d'un tableau.
   b. Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter ce résultat.
6. Lorsqu'on choisit 30 clients d'Hugo au hasard, on assimile ce choix à un tirage avec remise.
   On note Y la variable aléatoire associant à un échantillon de 30 clients choisis au hasard le nombre de clients qui louent un vélo électrique.
   On rappelle que la probabilité de l'événement E est : $p(E) = 0,58$.
   a. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   b. Déterminer la probabilité qu'un échantillon contienne exactement 20 clients qui louent un vélo électrique. On donnera le résultat arrondi au millième.
   c. Déterminer la probabilité qu'un échantillon contienne au moins 15 clients qui louent un vélo électrique. On donnera le résultat arrondi au millième.

EXERCICE 16

Thèmes : probabilités Amérique du Sud 26 septembre 2022

PARTIE A

Le système d'alarme d'une entreprise fonctionne de telle sorte que, si un danger se présente, l'alarme s'active avec une probabilité de 0,97.
La probabilité qu'un danger se présente est de 0,01 et la probabilité que l'alarme s'active est de 0,014 65.
On note A l'évènement « l'alarme s'active » et D l'événement « un danger se présente ».
On note $\overline{M}$ l'évènement contraire d'un évènement M et $P(M)$ la probabilité de l'évènement M.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré qui sera complété au fur et à mesure de l'exercice.
2. **a.** Calculer la probabilité qu'un danger se présente et que l'alarme s'active.

   b. En déduire la probabilité qu'un danger se présente sachant que l'alarme s'active. Arrondir le résultat à 10^{-3}.
3. Montrer que la probabilité que l'alarme s'active sachant qu'aucun danger ne s'est présenté est 0,005.
4. On considère qu'une alarme ne fonctionne pas normalement lorsqu'un danger se présente et qu'elle ne s'active pas ou bien lorsqu'aucun danger ne se présente et qu'elle s'active.

   Montrer que la probabilité que l'alarme ne fonctionne pas normalement est inférieure à 0,01.

PARTIE B

Une usine fabrique en grande quantité des systèmes d'alarme. On prélève successivement et au hasard 5 systèmes d'alarme dans la production de l'usine. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.
On note S l'évènement « l'alarme ne fonctionne pas normalement » et on admet que
$P(S) = 0,005\,25$.
On considère X la variable aléatoire qui donne le nombre de systèmes d'alarme ne fonctionnant pas normalement parmi les 5 systèmes d'alarme prélevés.
Les résultats seront arrondis à 10^{-4}.

1. Donner la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X et préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans le lot prélevé, un seul système d'alarme ne fonctionne pas normalement.
3. Calculer la probabilité que, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme ne fonctionne pas normalement.

PARTIE C

Soit n un entier naturel non nul. On prélève successivement et au hasard n systèmes d'alarme. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.
Déterminer le plus petit entier n tel que la probabilité d'avoir, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme qui ne fonctionne pas normalement soit supérieure à 0,07.

Une entreprise fabrique des composants pour l'industrie automobile. Ces composants sont conçus sur trois chaînes de montage numérotées de 1 à 3.

- La moitié des composants est conçue sur la chaîne n° 1 ;
- 30 % des composants sont conçus sur la chaîne n° 2 ;
- les composants restant sont conçus sur la chaîne n° 3.

À l'issue du processus de fabrication, il apparaît que 1 % des pièces issues de la chaîne n° 1 présentent un défaut, de même que 0,5 % des pièces issues de la chaîne n° 2 et 4 % des pièces issues de la chaîne n° 3.
On prélève au hasard un de ces composants. On note :

- C_1 l'évènement « le composant provient de la chaîne n° 1 » ;
- C_2 l'évènement « le composant provient de la chaîne n° 2 » ;
- C_3 l'évènement « le composant provient de la chaîne n° 3 » ;
- D l'évènement « le composant est défectueux »et $\overline{D}$ son évènement contraire.

Dans tout l'exercice, les calculs de probabilité seront donnés en valeur décimale exacte ou arrondie à 10^{-4} si nécessaire.

PARTIE A

1. Représenter cette situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le composant prélevé provienne de la chaîne n° 3 et soit défectueux.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement D est $P(D) = 0{,}0145$.
4. Calculer la probabilité qu'un composant défectueux provienne de la chaîne n° 3.

PARTIE B

L'entreprise décide de conditionner les composants produits en constituant des lots de n unités. On note X la variable aléatoire qui, à chaque lot de n unités, associe le nombre de composants défectueux de ce lot.
Compte tenu des modes de production et de conditionnement de l'entreprise, on peut considérer que X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}0145$.

1. Dans cette question, les lots possèdent 20 unités. On pose $n = 20$.
   a. Calculer la probabilité pour qu'un lot possède exactement trois composants défectueux.
   b. Calculer la probabilité pour qu'un lot ne possède aucun composant défectueux.
   En déduire la probabilité qu'un lot possède au moins un composant défectueux.
2. Le directeur de l'entreprise souhaite que la probabilité de n'avoir aucun composant défectueux dans un lot de n composants soit supérieure à 0,85.
   Il propose de former des lots de 11 composants au maximum. A-t-il raison ? Justifier la réponse.

PARTIE C

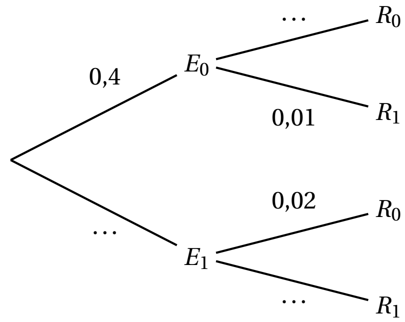
Les coûts de fabrication des composants de cette entreprise sont de 15 euros s'ils proviennent de la chaîne de montage n° 1, 12 euros s'ils proviennent de la chaîne de montage n° 2 et 9 euros s'ils proviennent de la chaîne de montage n° 3.
Calculer le coût moyen de fabrication d'un composant pour cette entreprise.

EXERCICE 18   Thèmes : probabilités   Nouvelle-Calédonie 26 octobre 2022

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

On considère un système de communication binaire transmettant des 0 et des 1.
Chaque 0 ou 1 est appelé bit.
En raison d'interférences, il peut y avoir des erreurs de transmission :
un 0 peut être reçu comme un 1 et, de même, un 1 peut être reçu comme un 0.
Pour un bit choisi au hasard dans le message, on note les évènements :

- E_0 : « le bit envoyé est un 0 » ;
- E_1 : « le bit envoyé est un 1 » ;
- R_0 : « le bit reçu est un 0 »
- R_1 : « le bit reçu est un 1 ».



On sait que :
$p(E_0) = 0,4$; $\quad p_{E_0}(R_1) = 0,01$; $\quad p_{E_1}(R_0) = 0,02$.
On rappelle que la probabilité conditionnelle de A sachant B est notée $p_B(A)$.
On peut ainsi représenter la situation par l'arbre de probabilités ci-dessus.

1. La probabilité que le bit envoyé soit un 0 et que le bit reçu soit un 0 est égale à :

a. 0,99   **b.** 0,396   **c.** 0,01   **d.** 0,4

2. La probabilité $p(R_0)$ est égale à :

a. 0,99   **b.** 0,02   **c.** 0,408   **d.** 0,931

3. Une valeur, approchée au millième, de la probabilité $p_{R_1}(E_0)$ est égale

a. 0,004   **b.** 0,001   **c.** 0,007   **d.** 0,010

4. La probabilité de l'évènement « il y a une erreur de transmission » est égale à :

a. 0,03   **b.** 0,016   **c.** 0,16   **d.** 0,015

Un message de longueur huit bits est appelé un octet.
On admet que la probabilité qu'un octet soit transmis sans erreur est égale à 0,88.

5. On transmet successivement 10 octets de façon indépendante.
La probabilité, à 10^{-3} près, qu'exactement 7 octets soient transmis sans erreur est égale à :

a. 0,915   **b.** 0,109   **c.** 0,976   **d.** 0,085

6. On transmet successivement 10 octets de façon indépendante.
La probabilité qu'au moins 1 octet soit transmis sans erreur est égale à :

a. $1-0{,}12^{10}$ **b.** $0{,}12^{10}$ **c.** $0{,}88^{10}$ **d.** $1-0{,}88^{10}$

7. Soit N un entier naturel. On transmet successivement N octets de façon indépendante.
Soit N_0 la plus grande valeur de N pour laquelle la probabilité que les N octets soient tous transmis sans erreur est supérieure ou égale à 0,1.
On peut affirmer que :

a. $N_0 = 17$ **b.** $N_0 = 18$ **c.** $N_0 = 19$ **d.** $N_0 = 20$

EXERCICE 19

Thèmes : probabilités Nouvelle-Calédonie 27 octobre 2022

Au basket-ball, il existe deux sortes de tir :

— les tirs à deux points.
Ils sont réalisés près du panier et rapportent deux points s'ils sont réussis.

— les tirs à trois points.
Ils sont réalisés loin du panier et rapportent trois points s'ils sont réussis.

Stéphanie s'entraîne au tir. On dispose des données suivantes :

- Un quart de ses tirs sont des tirs à deux points. Parmi eux, 60 % sont réussis.
- Trois quarts de ses tirs sont des tirs à trois points. Parmi eux, 35 % sont réussis.

1. Stéphanie réalise un tir.
On considère les évènements suivants :

D : « Il s'agit d'un tir à deux points ».
R : « le tir est réussi ».

a. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

b. Calculer la probabilité $p\left(\overline{D}\cap R\right)$.

c. Démontrer que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir est égale à 0,4125.

d. Stéphanie réussit un tir. Calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un tir à trois points. Arrondir le résultat au centième.

2. Stéphanie réalise à présent une série de 10 tirs à trois points.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de tirs réussis.
On considère que les tirs sont indépendants. On rappelle que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir à trois points est égale à 0,35.

a. Justifier que X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

b. Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

c. Déterminer la probabilité que Stéphanie rate 4 tirs ou plus. Arrondir le résultat au centième.

d. Déterminer la probabilité que Stéphanie rate au plus 4 tirs. Arrondir le résultat au centième.

3. Soit n un entier naturel non nul.
Stéphanie souhaite réaliser une série de n tirs à trois points.
On considère que les tirs sont indépendants. On rappelle que la probabilité qu'elle réussisse un tir à trois points est égale à 0,35.
Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité que Stéphanie réussisse au moins un tir parmi les n tirs soit supérieure ou égale à 0,99.

Éléments de la correction de l'exercice 1

Polynésie 4 mai 2022

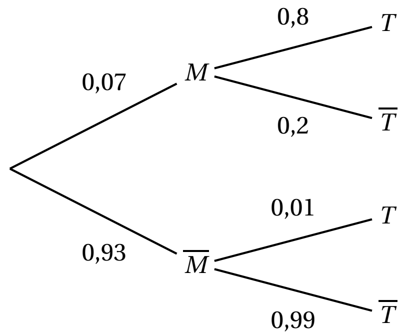
Selon les autorités sanitaires d'un pays, 7 % des habitants sont affectés par une certaine maladie. Dans ce pays, un test est mis au point pour détecter cette maladie. Ce test a les caractéristiques suivantes :

- Pour les individus malades, le test donne un résultat négatif dans 20 % des cas ;
- Pour les individus sains, le test donne un résultat positif dans 1 % des cas.

Une personne est choisie au hasard dans la population et testée.
On considère les évènements suivants :

- M « la personne est malade » ;
- T « le test est positif ».

1. Pour calculer la probabilité de l'évènement $M \cap T$, on s'appuie sur un arbre pondéré :



On a donc $P(M \cap T) = 0{,}07 \times 0{,}8 = 0{,}056$

2. M et $\overline{M}$ formant une partition de l'univers, d'après les probabilités totales,
$P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0{,}07 \times 0{,}8 + 0{,}93 \times 0{,}01 = 0{,}0653$.

3. $P_M(T)$ est la probabilité d'avoir un test positif sachant qu'on est malade, et $P_T(M)$ est la probabilité d'être malade sachant que le test est positif.
Dans un contexte de dépistage de la maladie, il est plus pertinent de calculer la probabilité d'être malade sachant que le test est positif c'est-à-dire $P_T(M)$.

4. On considère dans cette question que la personne choisie au hasard a eu un test positif.
La probabilité qu'elle soit malade est :$P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}07 \times 0{,}8}{0{,}0653} \approx 0{,}86$

5. On choisit des personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'individus ayant un test positif parmi les 10 personnes.

- **a.** Le tirage étant assimilé à un tirage avec remise, on a une indépendance des 10 tirages, le succès étant défini par le test positif, on peut assimiler cette variable aléatoire à une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0{,}0653$
- **b.** La probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif est :
$P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0{,}0653^2 \times (1 - 0{,}0653)^8 \approx 0{,}11$

6. On veut déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles ait un test positif, soit supérieure à 99 %.
Soit n le nombre de personnes testées ; on cherche n pour que $P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}99$.
On a $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0)$ soit

$1-0{,}9347^n \geqslant 0{,}99 \iff 0{,}9347^n \leqslant 0{,}01 \iff n\ln(0{,}9347) \leqslant \ln(0{,}01) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}01}{\ln(0{,}9347}$. Or $\dfrac{\ln(0{,}01}{\ln(0{,}9347} \approx 68{,}2$.

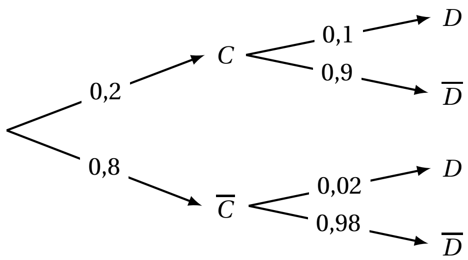
Il faut donc tester 69 personnes dans ce pays pour que au moins une ait un test positif.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 2

Polynésie 5 mai 2022

Partie 1

Puisque la commande est faite au hasard, on assimile les proportions à des probabilités. On en déduit l'arbre pondéré suivant :



1. $\text{P}(C\cap D) = \text{P}(C)\times \text{P}_C(D) = 0{,}2\times 0{,}1 = 0{,}02$.
   La probabilité d'avoir un casque contrefait présentant un défaut est donc de 0,02.
2. Les évènements C et $\overline{C}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on en déduit :
   $$\begin{aligned}\text{P}(D) &= \text{P}(C\cap D)+\text{P}\left(\overline{C}\cap D\right)\\ &= 0{,}02+0{,}8\times 0{,}02\\ &= 1{,}8\times 0{,}02\\ &= 0{,}036\end{aligned}$$
   La probabilité de commander un casque présentant un défaut de conception est donc de 0,036.
3. On demande ici de calculer la probabilité conditionnelle : $\text{P}_D(C)$
   $\text{P}_D(C) = \dfrac{\text{P}(C\cap D)}{\text{P}(D)} = \dfrac{0{,}02}{0{,}036} = \dfrac{5}{9} \approx 0{,}556$ à 10^{-3} près.

Partie 2

1. **a.**
   - On a une expérience aléatoire de base (on commande un casque), pour laquelle on considère deux issues. Pour cette épreuve de Bernoulli, le succès (le casque présente un défaut) a une probabilité $p = 0{,}036$. (d'après la question **2.** de la **partie 1**) ;
   - On répète cette expérience $n = 35$ fois, de façon indépendante (puisque la répétition est assimilable à un tirage **avec** remise) ;
   - La variable aléatoire X compte le nombre de succès sur les 35 répétitions.

   Ces éléments permettent de confirmer que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(35\ ;\ 0{,}036)$

   b. On veut calculer $\text{P}(X=1)$.
   $\text{P}(X=1) = \dbinom{35}{1}\times 0{,}036^1\times(1-0{,}036)^{35-1} = 35\times 0{,}036\times 0{,}964^{34} \approx 0{,}362$ à 10^{-3} près.

c. Calculons : $\mathrm{P}(X \leqslant 1) = \mathrm{P}(X = 0) + \mathrm{P}(X = 1) \approx 0{,}639$ à 10^{-3} près (à la calculatrice).

2. Ici, pour tout entier n naturel non nul, on peut créer une variable aléatoire X_n qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,0{,}036)$.
Pour n un entier naturel non nul, la probabilité qu'un casque au moins présente un défaut sur n casques commandés est donc :
$\mathrm{P}(X_n \geqslant 1) = 1 - \mathrm{P}(X_n = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0{,}036^0 \times 0{,}964^n = 1 - 0{,}964^n$.
On résout donc sur $\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_n \geqslant 1) \geqslant 0{,}99 &\iff 1 - 0{,}964^n \geqslant 0{,}99\\
&\iff -0{,}964^n \geqslant -0{,}01\\
&\iff 0{,}964^n \leqslant 0{,}01\\
&\iff \ln(0{,}964^n) \leqslant \ln(0{,}01) \quad \text{car ln est croissante sur } \mathbb{R}^{*+}\\
&\iff n\ln(0{,}964) \leqslant \ln(0{,}01)\\
&\iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}964)} \qquad \text{car} \ln(0{,}964) < 0
\end{aligned}$$

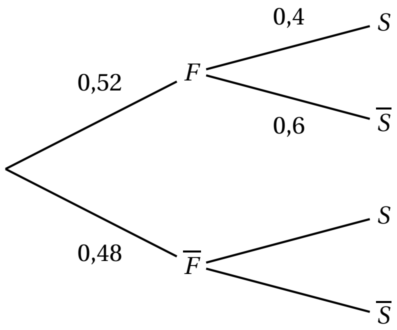
or $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}964)} \approx 125{,}6$, donc les solutions sont les entiers naturels supérieurs ou égaux à 126.
Il faut donc commander au moins 126 casques pour que la probabilité d'en avoir au moins un défectueux soit supérieure à 0,99.

Éléments de la correction de l'exercice 3

Métropole Antilles-Guyane 2022

1. **a.** L'énoncé nous indique que ce stage a été suivi par 25 % des salariés. Donc $p(S) = 0{,}25$.

b. L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



c. On calcule $p(F \cap S)$: $p(F \cap S) = p_S(F) \times p(S) = 0{,}4 \times 0{,}52 = 0{,}208$

d. On cherche calculer $p_S(F)$. D'après la formule de Bayes,
$p_S(F) = \dfrac{p(F \cap S)}{p(S)} = \dfrac{0{,}208}{0{,}25} = 0{,}832$

e. Appliquons la formule des probabilités totales : $p(S) = p(S \cap F) + p(S \cap \overline{F})$.
Donc $p\left(S \cap \overline{F}\right) = p(S) - p(S \cap F) = 0{,}25 - 0{,}208 = 0{,}042$.

Avec la formule de Bayes : $p_{\overline{F}}(S) = \dfrac{p\left(S \cap \overline{F}\right)}{p\left(\overline{F}\right)} = \dfrac{0{,}042}{0{,}48} = 0{,}0875 < 0{,}1$.

L'affirmation du directeur est donc exacte.

2. a. Il s'agit là d'un schéma de Bernoulli : la répétition de 20 expériences aléatoires n'ayant que deux issues, identiques et indépendantes entre elles. X est la variable aléatoire qui compte les succès. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}25$: $X \sim \mathscr{B}(20\ ;\ 0{,}25)$

b. $p(X = 5) = \binom{20}{5} \times 0{,}25^5 \times (1 - 0{,}25)^{20-5} \approx 0{,}202$.

La probabilité qu'exactement 5 salariés suivent le stage est d'environ 0,202.

c. « proba(5) » calcule pour k allant de 0 à 5, la somme des probabilités $p(X = k)$,
Soit $p(X \leqslant 5)$. À la calculatrice, $p(X \leqslant 5) \approx 0{,}617$.
Cela signifie que la probabilité qu'au plus 5 salariés aient effectué le stage, est égale à 0,617.

La probabilité qu'au moins 6 salariés suivent le stage est d'environ 0,617.

d. $p(X \geqslant 6) = 1 - p(X < 6) = 1 - p(X \leqslant 5) \approx 1 - 0{,}617 \approx 0{,}383$

3. • Premier exemple : supposons qu'il y ait 25 salariés à 1 000 € et 75 à 1 200 €, les premiers ayant fait le stage.

Le salaire moyen est égal à $\dfrac{25 \times 1\,000 + 75 \times 1200}{100} = 1\,150$ €.
Après augmentation le salaire moyen passe à :
$\dfrac{25 \times 1\,000 \times 1{,}05 + 75 \times 1\,200 \times 1{,}02}{100} = 1\,180{,}50$ €.
L'augmentation moyenne est donc égale à $\dfrac{1\,180{,}5}{1\,150} \approx 1{,}0265$, soit une augmentation d'environ 2,65 %.

• Deuxième exemple : supposons qu'il y ait 25 salariés à 1 200 € et 75 à 1 000 €, les premiers ayant fait le stage.

Le salaire moyen est égal à $\dfrac{25 \times 1\,200 + 75 \times 1\,000}{100} = 1\,050$ €.
Après augmentation le salaire moyen passe à :
$\dfrac{25 \times 1\,200 \times 1{,}05 + 75 \times 1\,000 \times 1{,}02}{100} = 1\,080$ €.
L'augmentation moyenne est donc égale à $\dfrac{1\,080}{1\,050} \approx 1{,}0285$, soit une augmentation d'environ 2,85 %.

Conclusion : l'augmentation moyenne dépend de la répartition des salaires : on ne peut pas répondre à cette question.

Éléments de la correction de l'exercice 4

Métropole Antilles-Guyane 12 mai 2022

Le coyote est un animal sauvage proche du loup, qui vit en Amérique du Nord.
Dans l'état d'Oklahoma, aux États-Unis, 70 % des coyotes sont touchés par une maladie appelée ehrlichiose.
Il existe un test aidant à la détection de cette maladie. Lorsque ce test est appliqué à un coyote, son résultat est soit positif, soit négatif, et on sait que :

- Si le coyote est malade, le test est positif dans 97 % des cas.
- Si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans 95 % des cas.

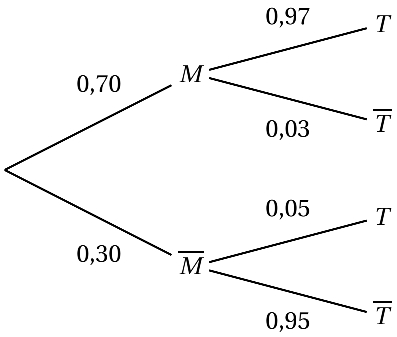
Partie A

Des vétérinaires capturent un coyote d'Oklahoma au hasard et lui font subir un test pour l'ehrlichiose.
On considère les évènements suivants :

- M : « le coyote est malade » ;
- T : « le test du coyote est positif ».

On note $\overline{M}$ et $\overline{T}$ respectivement les évènements contraires de M et T.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation.



2. Déterminer la probabilité que le coyote soit malade et que son test soit positif.
   On calcule $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0{,}7 \times 0{,}97 = 0{,}679$
3. Démontrer que la probabilité de T est égale à 0,694.
   D'après la loi des probabilités totales :
   $P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right)$; or
   $P\left(\overline{M} \cap T\right) = P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(T) = 0{,}3 \times 0{,}05 = 0{,}015$, d'où :
   $P(T) = 0{,}679 + 0{,}015 = 0{,}694$.
4. On appelle « valeur prédictive positive du test » la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test est positif.
   Calculer la valeur prédictive positive du test. On arrondira le résultat au millième.
   On calcule donc $P_T(M) = \dfrac{P(T \cap M)}{P(T)} = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}679}{0{,}694} \approx 0{,}9784$ soit 0,978 au millième près.
5. **a.** Par analogie avec la question précédente, proposer une définition de la « valeur prédictive négative du test » et calculer cette valeur en arrondissant au millième.
   On appelle « valeur prédictive négative du test » la probabilité que le coyote ne soit pas malade sachant que son test est négatif.
   Elle est égale à $P_{\overline{T}}\left(\overline{M}\right) = \dfrac{P\left(\overline{T} \cap \overline{M}\right)}{P\left(\overline{T}\right)}$.
   Or $P\left(\overline{T} \cap \overline{M}\right) = P\left(\overline{T}\right) \times P_{\overline{T}}\left(\overline{M}\right)$;
   - $P\left(\overline{T}\right) = 1 - P(T) = 1 - 0{,}694 = 0{,}306$;
   - $P_{\overline{T}}\left(\overline{M}\right) = \dfrac{P\left(\overline{T} \cap \overline{M}\right)}{P\left(\overline{T}\right)} = \dfrac{0{,}3 \times 0{,}95}{0{,}306} \approx 0{,}9313$, soit 0,931 au millième près.

   b. Comparer les valeurs prédictives positive et négative du test, et interpréter.
   Comme $0{,}978 > 0{,}931$ cela signifie qu'un résultat positif (erreur d'à peu près 2 %) est plus probant qu'un résultat négatif (erreur d'à peu près 7 %).

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un coyote capturé au hasard présente un test positif est de 0,694.

1. Lorsqu'on capture au hasard cinq coyotes, on assimile ce choix à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard associe le nombre de coyotes dans cet échantillon ayant un test positif.
   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier et préciser ses paramètres.
   Le nombre de coyotes est assez important pour que toutes les captures indépendantes sont celles d'animaux dont la probabilité de positivité au test est de 0,694. La variable X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $P = 0,694$.
   b. Calculer la probabilité que dans un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard, un seul ait un test positif. On arrondira le résultat au centième.
   On sait que $P(X = 1) = \binom{5}{1} \times 0,694^1 \times (1 - 0,694)^{5-1} \approx 0,030$ soit 0,03 au centième près.
   c. Un vétérinaire affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'au moins quatre coyotes sur cinq aient un test positif : cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.
   On vérifie si effectivement $P(X \geqslant 4) > \dfrac{1}{2}$.
   Or $P(X \geqslant 4) = P(X = 4) + P(X = 5)$;
   $P(X = 4) = \binom{5}{4} \times 0,694^4 \times 0,306^1 \approx 0,3549$ et
   $P(X = 5) = \binom{5}{5} \times 0,694^5 \times 0,306^0 \approx 0,1609$
   Donc $P(X \geqslant 4) \approx 0,3549 + 0,3549$, soit $P(X \geqslant 4) \approx 0,5158$ valeur supérieure à 0,5 : le vétérinaire a raison.
2. Pour tester des médicaments, les vétérinaires ont besoin de disposer d'un coyote présentant un test positif. Combien doivent-ils capturer de coyotes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux présente un test positif soit supérieure à 0,99 ?
Il faut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(Y \geqslant 1) > 0,99$ avec Y variable aléatoire associée au nombre de coyotes ayant un test positif.
Or $P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,694^0 \times 0,306^n = 1 - 0,306^n$. Il faut donc résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation : $1 - 0,306^n > 0,99 \iff 0,01 > 0,306^n$
Par croissance de la fonction logarithme népérien : $\ln 0,01 > n \ln 0,306 \iff \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,306} < n$ car $\ln 0,306 < 0$.
Comme $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,306} \approx 3,9$: il faut donc capturer au moins 4 coyotes.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 5

Centres Etrangers 11 mai 2022

Partie A

1. Recopier et compléter le tableau suivant avec les probabilités correspondantes.

	A	$\overline{A}$	Total
B	0,05	0,15	0,2
$\overline{B}$	0,05	0,75	0,8
Total	0,1	0,9	1

2. **a.** La probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour au moins un des deux traitements T1 ou T2 est l'évènement contraire de l'évènement « une paire de verres ne présente aucun des deux défauts », donc sa probabilité est égale $1 - 0,75 = 0,25$. Ou encore $P(A \cup B) = 1 - \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$.

b. • On a $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$;

• On a $P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

Donc $P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}8 - 0{,}75 = 0{,}05$ et

$P\left(B \cap \overline{A}\right) = 0{,}9 - 0{,}75 = 0{,}15$.

Donc la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente deux défauts est égale à :

$P(A \cap B) = 1 - P\left(A \cap \overline{B}\right) - P\left(B \cap \overline{A}\right) - P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 1 - 0{,}05 - 0{,}15 - 0{,}75 = 0{,}05$.

c. $P(A) \times P(B) = 0{,}1 \times 0{,}2 = 0{,}02$ et $P(A \cap B) = 0{,}05$.

On a donc $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$: les évènements A et B ne sont pas indépendants.

3. On a $P\left(A \cap \overline{B}\right) + P\left(B \cap \overline{A}\right) = 0{,}05 + 0{,}15 = 0{,}2$

4. On a $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}05}{0{,}1} = \dfrac{1}{2}$.

Partie B

1. La production est suffisamment importante pour que la probabilité d'avoir le déf ut $T1$ est égale à 0,1. Comme il y a 50 tirages indépendants, la variable aléatoire X suit une moi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}1$.

2. On sait que $P(X = 10) = \binom{50}{10} \times 0{,}1^{10} \times (1 - 0{,}1)^{50)10}$.

La calculatrice donne $P(X = 10) \approx 0{,}015$ au millième près.

3. La moyenne est l'espérance de la variable X et on sait que $E(X) = n \times p = 50 \times 0{,}1 = 5$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 6

Centres Etrangers 12 mai 2022

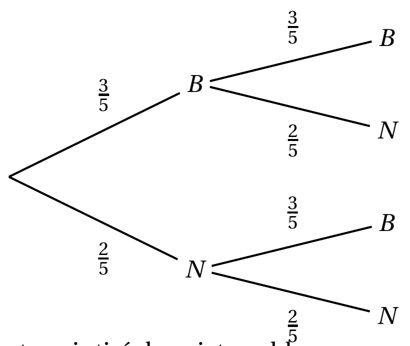
1. On note par

— B l'évènement : « on tire un jeton de couleur blanche » ;

— N l'évènement : « on tire un jeton de couleur noire ».

Ainsi, $p(B) = \dfrac{3}{5}$ et $p(N) = \dfrac{2}{5}$

a. L'arbre complété :



b. Pour perdre 9 euros, il faut avoir tiré deux jetons blancs.

Sachant qu'il s'agit de deux tirages successifs avec remise, et en notant X la variable aléatoire donnant le gain du joueur, on a : $p(X = -9) = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{9}{25}$

2. **a.** On considère à présent qu'il y a 3 jetons blancs et N jetons noirs, pour un total de $N+3$ jetons. On effectue toujours deux tirages avec remise d'un jeton. On note par X la variable aléatoire donnant le gain du joueur. Donc $X \in \{-9\ ;\ -1\ ;\ 5\}$

— Pour perdre 9 euros, il faut tirer deux jetons blancs : $P(X=-9) = \left(\dfrac{3}{N+3}\right)^2 = \dfrac{9}{(N+3)^2}$

— Pour perdre un euro il faut tirer deux jetons noirs : $P(X=-1) = \left(\dfrac{N}{N+3}\right)^2 = \dfrac{N^2}{(N+3)^2}$

— pour gagner cinq euros, il faut tirer un jeton de chaque couleur (B + N ou N + B) : $P(X=5) = 2 \times \dfrac{3}{N+3} \times \dfrac{N}{N+3} = \dfrac{6N}{(N+3)^2}$

La loi de probabilités est donc :

$X = x_i$	-9	-1	5
$P(X = x_i)$	$\dfrac{9}{(N+3)^2}$	$\dfrac{N^2}{(N+3)^2}$	$\dfrac{6N}{(N+3)^2}$

b. $-x^2+30x-81>0 \iff x^2-30x+81<0$. Les racines du trinôme $x^2-30x+81$ sont $x=3$ et $x=27$. Donc en utilisant les signes du trinôme du second degré, $-x^2+30x-81>0 \iff x \in]3\ ;\ 27[$.

c. Calculons l'espérance de cette loi de probabilité :

$E(X) = (-9) \times \dfrac{9}{(N+3)^2} + (-1) \times \dfrac{N^2}{(N+3)^2} + 5 \times \dfrac{6N}{(N+3)^2} = \dfrac{-N^2+30N-81}{(N+3)^2}$.

Le jeu est favorable au joueur si et seulement si $E(X)>0$.

$E(X)>0 \iff -N^2+30N-81>0 \iff N \in]3\ ;\ 27[$ donc $4 \leqslant N \leqslant 26$ ($N \in [\![4\ ;\ 26]\!]$) : il faut donc entre 4 et 26 jetons noirs (4 et 26 compris) pour que le jeu soit favorable au joueur.

d. Le gain moyen (ou l'espérance) est maximal lorsque la fonction $f\ :\ N \mapsto \dfrac{-N^2+30N-81}{(N+3)^2}$ est maximale, c'est-à-dire lorsque $f'(N)=0$.

La fonction f est continue et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$. Pour $N \in [0\ ;\ +\infty[$:

$f'(N) = \dfrac{(-2N+30)\times(N+3)^2 - 2(N+3)\times(-N^2+30N-81)}{\left((N+3)^2\right)^2} = \dfrac{(-2N+30)(N+3)-2(-N^2+30N-81)}{(N+3)^3} = \dfrac{-2N^2-6N+30N+90+2N^2-60N+162}{(N+3)^3} = \dfrac{-36N+252}{(N+3)^3} = \dfrac{-36(N-7)}{(N+3)^3}$

$f'(N)=0 \iff N=7$.

Le gain moyen du joueur est maximal lorsque dans l'urne il y a 7 jetons noirs et 3 jetons blancs.

3. Dans l'urne il y a 7 jetons noirs ($N=7$) et 3 jetons blancs, pour un total de 10 jetons. La probabilité de gagner 5 euros est égale à $p = \dfrac{6\times7}{10^2} = \dfrac{21}{50} = 0{,}42$.

On répète ce jeu pour 10 personnes. On note par Y la variable aléatoire donnant le nombre de personnes gagnant 5 euros. Ainsi $Y \in [\![0\ ;\ 10]\!]$. Y suit une loi binomiale (expérience de Bernoulli n'ayant que deux issues et se répétant indépendamment et à l'identique n fois) de paramètres $n=10$ et $p=\dfrac{21}{50}$: $Y \sim \mathcal{B}\left(10\ ;\ \dfrac{21}{50}\right)$

$P(Y \geqslant 0) = 1 - P(Y<1) = 1-P(Y=0) = 1 - \left(\dfrac{29}{50}\right)^{10} \approx 0{,}996$

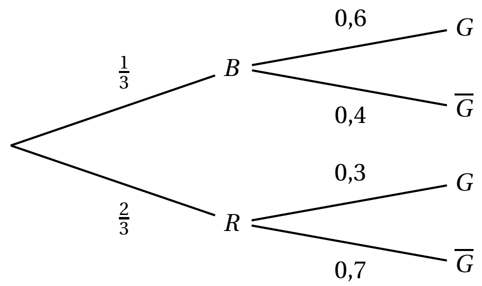
Donc la probabilité d'avoir au moins un gagnant à 5 euros est d'environ 0,996. C'est donc un évènement (presque) certain.

Éléments de la correction de l'exercice 7

Asie 17 mai 2022

Principaux domaines abordés : Probabilités conditionnelles et indépendance. Variables aléatoires.

1. R l'évènement « la case obtenue est rouge » et G l'évènement « le joueur gagne la partie ».
   - **a.** Si la case est blanche on tire 1 seul jeton; comme il y a 3 résultats impairs sur 5 numéros on a $P_B(G) = \frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0{,}6$.
   - **b.** Tout d'abord on a $P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ et donc $P(R) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.
     Si la case est rouge on tire successivement deux jetons : il y a $5 \times 4 = 20$ issues différentes depuis 1–2 jusqu'à 5-4 et parmi celles-ci les issues gagnantes : 1-3; 1-5; 3-1; 3-5; 5-1 et 5-3.
     On a donc $P_R(G) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}3$ (voir l'énoncé).
     On peut donc compléter l'arbre pondéré :



2. **a.** D'après la loi des probabilités totales :
   $P(G) = P(B \cap G) + P(R \cap G)$
   - $P(B \cap G) = P(B) \times P_B(G) = \frac{1}{3} \times 0{,}6 = \frac{0{,}6}{3} = 0{,}2$;
   - $P(R \cap G) = P(R) \times P_R(G) = \frac{2}{3} \times 0{,}3 = \frac{0{,}6}{3} = 0{,}2$.

   Donc $P(G) = 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4$.

   b. Il faut trouver $P_G(B) = \frac{P(G \cap B)}{P(G)} = \frac{P(B \cap G)}{P(G)} = \frac{0{,}2}{0{,}4} = \frac{2}{=}0{,}5$.
3. - $P(B) \times P(G) = \frac{1}{3} \times 0{,}4 = \frac{0{,}4}{3} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$;
   - $P(B \cap G) = \frac{1}{3} \times 0{,}6 = 0{,}2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

   Donc $P(B) \times P(G) \neq P(B \cap G)$: les évènements ne sont pas indépendants.
4. Un même joueur fait dix parties. Les jetons tirés sont remis dans le sac après chaque partie. On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.
   - **a.** Les 10 épreuves sont indépendantes et à chacune la probabilité de gagner est égale à 0,4. La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale $\mathscr{B}(10\ ;\ 0{,}4)$.
   - **b.** On a $P(X = 3 = \binom{10}{3} \times 0{,}4^3 \times (1 - 0{,}4)^7 \approx 0{,}215$ au millième près.
   - **c.** La calculatrice donne $P(X \leqslant 3) \approx 0{,}3823$, donc $P(X \geqslant 4) \approx 0{,}6177$, soit 0,618 au millième près.
     Il y a plus de 6 chances sur 10 de gagner au moins 4 parties.
5. **a.** On a $p_n = P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}6^n$.

   b. Il faut trouver le plus petit entier n tel que $p_n \geqslant 0{,}99$, soit :
   $1 - 0{,}6^n \geqslant 0{,}99 \iff 0{,}01 \geqslant 0{,}6^n$ soit par croissance de la fonction logarithme : $\ln 0{,}01 \geqslant n \ln 0{,}6 \iff \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}6} \leqslant n$, car $\ln 0{,}6 < 0$.
   Or $\frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}6} \approx 9{,}02$.
   Il faut donc jouer au moins 10 parties pour avoir une probabilité d'en gagner une avec une probabilité d'au moins 99 %.

Éléments de la correction de l'exercice 8

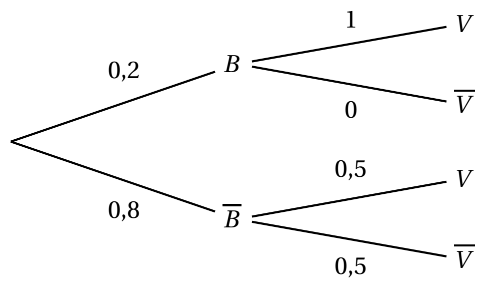
Asie 18 mai 2022

Principaux domaines abordés : Probabilités conditionnelles et indépendance. Variables aléatoires.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie 1

1. S'il a pris le bus il est à l'heure pour son vol, donc $P_B(V) = 1$.
2. On représente la situation par un arbre pondéré.



3. D'après la loi des probabilités totales :
$P(V) = P(B \cap V) + P\left(\overline{B} \cap V\right) = 0{,}2 \times 1 + 0{,}8 \times 0{,}5 = 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}6$.
4. On calcule $P_V(B) = \dfrac{P(V \cap B)}{P(V)} = \dfrac{P(B \cap V)}{P(V)} = \dfrac{0{,}2}{0{,}6} = \dfrac{1}{3}$.

Partie 2

1. La présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres et chaque passager a la même probabilité 0,95 d'être présent, donc la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 206$ et $p = 0{,}95$.
2. On a $\text{E} = n \times p = 206 \times 0{,}95 = 195{,}7 \approx 196$.
En moyenne sur 206 titulaires d'un billet à peu près 196 vont se présenter.
3. On a $P(X = 201) = \binom{206}{201} \times 0{,}95^{201} \times 0{,}05^5 \approx 0{,}030\,63$, soit 0,031 au millième près.
4. La calculatrice donne $P(X \leqslant 200) \approx 0{,}947\,7$, soit 0,948 au millième près.
Il est donc à peu près certain que l'avion sera au mieux juste rempli.
5. On admet que Y suit la loi de probabilité donnée par le tableau suivant :

y_i	0	1	2	3	4	5	6
$P\left(Y = y_i\right)$	0,947 75	0,030 63	0,014 41	0,005 39	0,001 51	0,000 28	0,000 03
c_i	51 500	50 650	49 800	48 950	48 100	47 250	46 400

   a. En complétant à 1 la somme des probabilités données dans le tableau on trouve :
   $P(Y = 6) = 1 - \left(P(Y = 0) + P(Y = 1) + \cdots + P(Y = 5)\right) = 0{,}000\,03$.

   b. La compagnie a encaissé $206 \times 250 = 51\,500$ € et elle devra rembourser 850 € à chaque client ne pouvant embarquer, donc $C = 51\,500 - 850Y$

   c. Voir le tableau ci-dessus.
   On a $\text{E}(C) = 51\,500 \times 0{,}947\,75 + \ldots 46\,400 \times 0{,}000\,03 \approx 51\,429{,}2$, soit 51 429 € à l'euro près

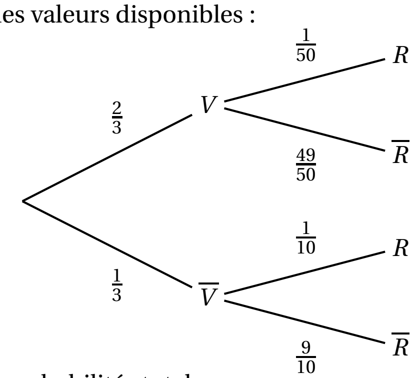
d. En vendant exactement 200 billets, la compagnie fera un chiffre d'affaires de 200×250 soit 50 000 euros.
En pratiquant le surbooking, la compagnie peut espérer un chiffre d'affaires de 51 429 euros.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 9

Centres Etrangers G1 18 mai 2022

Partie A

1. **a.** L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



b. D'après la formule des probabilités totales :
$p(R) = p(R \cap V) + p\left(R \cap \overline{V}\right) = p_V(R) \times p(V) + p_{\overline{V}}(R) \times p\left(\overline{V}\right) = \dfrac{1}{50} \times \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{150}$

c. On cherche la probabilité : $p_R(V)$.

D'après la formule de Bayes, $p_R(V) = \dfrac{p(R \cap V)}{p(R)} = \dfrac{\dfrac{1}{50} \times \dfrac{2}{3}}{\dfrac{7}{150}} = \dfrac{2}{7}$.

2. **a.** Il s'agit là d'un schéma de Bernoulli : la répétition de 20 expériences aléatoires n'ayant que deux issues, identiques et indépendantes entre elles. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \dfrac{2}{3}$: $X \sim \mathscr{B}\left(20\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$

b. $p(X = 10) = \dbinom{20}{10} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{10} \times \left(1 - \dfrac{2}{3}\right)^{20-10} \approx 0{,}054$.

c. $p(X \geqslant 10) = 1 - p(X < 10) = 1 - p(X \leqslant 9) \approx 0{,}962$

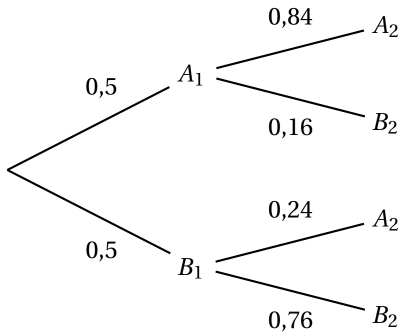
d. Calculons l'espérance $E(X)$ de cette loi binomiale : $E(X) = n \times p = 20 \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{40}{3} \approx 13{,}333$.
En moyenne, il se rendra à la gare en vélo 13,33 jours par mois soit 13 jours à l'unité près.

3. Calculons l'espérance de la loi de probabilité de T :
$E(t) = 0{,}14 \times 10 + 0{,}13 \times 11 + 0{,}13 \times 12 + 0{,}12 \times 13 + 0{,}12 \times 14 + 0{,}11 \times 15 + 0{,}10 \times 16 + 0{,}08 \times 17 + 0{,}07 \times 18$
$= 13{,}5$
Il mettra en moyenne 13 minutes et demie pour se rendre à la gare en voiture.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 10

Centres Etrangers 19 mai 2022

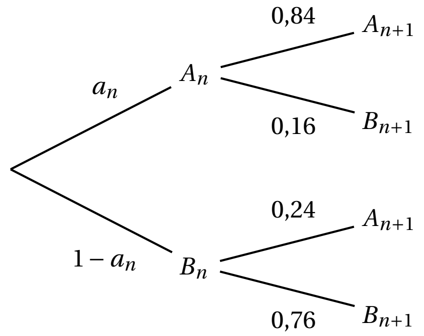
1. L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



2. **a.** Utilisons la formule des probabilités totales pour calculer $a_2 = p(A_2)$:
$a_2 = p(A_2 \cap A_1) + p(A_2 \cap B_1) = p_{A_1}(A_2) \times p(A_1) + p_{B_1}(A_2) \times p(B_1)$
$= 0{,}84 \times 0{,}5 + 0{,}24 \times 0{,}5 = 0{,}54$. Donc $a_2 = 0{,}54$.

b. Utilisons la formule de Bayes pour calculer $p_{A_2}(B_1)$:
$p_{A_2}(B_1) = \dfrac{p(A_2 \cap B_1)}{p(A_2)} = \dfrac{p_{B_1}(A_2) \times p(B_1)}{p(A_2)} = \dfrac{0{,}24 \times 0{,}5}{0{,}54} \approx 0{,}222$

3. **a.** On remarquera au préalable que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n + b_n = 1$.
L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



b. Utilisons là encore, la formule des probabilités totales pour déterminer a_{n+1} en fonction de a_n, pour tout entier naturel non nul :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap B_n) = p_{A_n}(A_{n+1}) \times p(A_n) + p_{B_n}(A_{n+1}) \times p(B_n)$
$= 0{,}84 \times p(A_n) + 0{,}24 \times p(B_n) = 0{,}84\ a_n + 0{,}24\ b_n$. Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 1 - a_n$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = 0{,}84\ a_n + 0{,}24(1 - a_n) = 0{,}6\ a_n + 0{,}24$

c. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}$.
Initialisation : $a_1 = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{1-1} = 0{,}6 - 0{,}1 = 0{,}5$. L'initialisation est vérifiée.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et supposons que $a_n = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}$.
Montrons que $a_{n+1} = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^n$.
D'après la question précédente,$a_{n+1} = 0{,}6\ a_n + 0{,}24$, donc en utilisant l'hypothèse de récurrence,
$a_{n+1} = 0{,}6\left(0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}\right) + 0{,}24 = 0{,}36 - 0{,}1 \times 0{,}6 \times 0{,}6^{n-1} + 0{,}24 = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^n$.
On obtient ce qu'il fallait démontrer. L'hérédité est démontrée.
Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$. D'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}$.

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}6^{n-1} = 0$ car $0{,}6 \in]-1\,;\,1[$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0{,}6$.
Cela signifie qu'au bout d'un certain temps, la probabilité qu'un vélo soit à la station A est de 60 %.

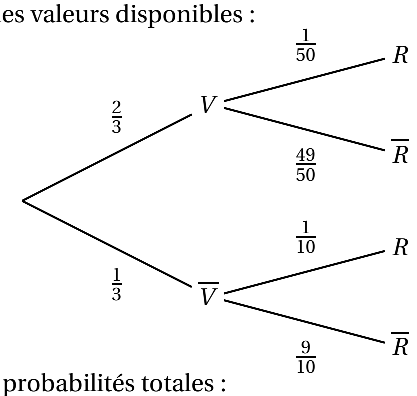
e. Résolvons : $a_n \geqslant 0{,}599$. $a_n \geqslant 0{,}599 \iff 0{,}6 - 0{,}1\times 0{,}6^{n-1} \geqslant 0{,}599$
$\iff -0{,}1\times 0{,}6^{n-1} \geqslant -0{,}001 \iff 0{,}6^{n-1} \leqslant \dfrac{-0{,}001}{-0{,}1} \iff 0{,}6^{n-1} \leqslant \dfrac{1}{100}$.
Sachant que la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$,
$0{,}6^{n-1} \leqslant \dfrac{1}{100} \iff \ln\left(0{,}6^{n-1}\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{100}\right) \iff (n-1)\times\ln(0{,}6) \leqslant -\ln(100)$. Or $\ln(0{,}6) < 0$, donc $n - 1 \geqslant \dfrac{-\ln(100)}{\ln(0{,}6)} \iff n \geqslant 1 - \dfrac{2\ln(10)}{\ln(0{,}6)}$.
À la calculatrice, $1 - \dfrac{2\ln(10)}{\ln(0{,}6)} \approx 10{,}02$ donc $n \geqslant 11$.
La probabilité que le vélo se trouve au point A est supérieure à 0,599 à partir du 11-ième jour.

Éléments de la correction de l'exercice 11

Amérique du Nord 18 mai 2022

Partie A

1. a. L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



b. D'après la formule des probabilités totales :
$p(R) = p(R\cap V) + p\left(R\cap\overline{V}\right) = p_V(R)\times p(V) + p_{\overline{V}}(R)\times p\left(\overline{V}\right) = \dfrac{1}{50}\times\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{10}\times\dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{150}$

c. On cherche la probabilité : $p_R(V)$.

D'après la formule de Bayes, $p_R(V) = \dfrac{p(R\cap V)}{p(R)} = \dfrac{\dfrac{1}{50}\times\dfrac{2}{3}}{\dfrac{7}{150}} = \dfrac{2}{7}$.

2. a. Il s'agit là d'un schéma de Bernoulli : la répétition de 20 expériences aléatoires n'ayant que deux issues, identiques et indépendantes entre elles. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \dfrac{2}{3}$: $X \sim \mathscr{B}\left(20\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$

b. $p(X=10) = \dbinom{20}{10}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}\times\left(1-\dfrac{2}{3}\right)^{20-10} \approx 0{,}054$.

c. $p(X\geqslant 10) = 1 - p(X<10) = 1 - p(X\leqslant 9) \approx 0{,}962$

d. Calculons l'espérance $E(X)$ de cette loi binomiale : $E(X) = n \times p = 20 \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{40}{3} \approx 13{,}333$.

En moyenne, il se rendra à la gare en vélo 13,33 jours par mois soit 13 jours à l'unité près.

3. Calculons l'espérance de la loi de probabilité de T :

$E(t) = 0{,}14 \times 10 + 0{,}13 \times 11 + 0{,}13 \times 12 + 0{,}12 \times 13 + 0{,}12 \times 14 + 0{,}11 \times 15 + 0{,}10 \times 16 + 0{,}08 \times 17 + 0{,}07 \times 18$

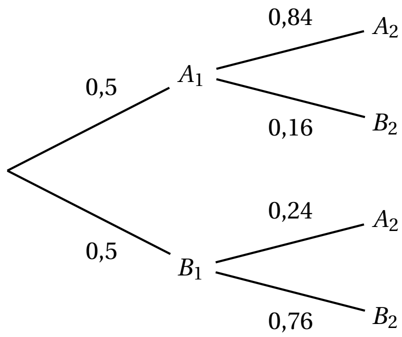
$= 13{,}5$

Il mettra en moyenne 13 minutes et demie pour se rendre à la gare en voiture.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 12

Amérique du Nord 19 mai 2022

1. L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



2. **a.** Utilisons la formule des probabilités totales pour calculer $a_2 = p(A_2)$:

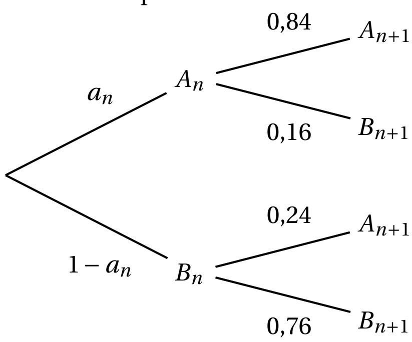
$a_2 = p(A_2 \cap A_1) + p(A_2 \cap B_1) = p_{A_1}(A_2) \times p(A_1) + p_{B_1}(A_2) \times p(B_1)$
$= 0{,}84 \times 0{,}5 + 0{,}24 \times 0{,}5 = 0{,}54$. Donc $a_2 = 0{,}54$.

b. Utilisons la formule de Bayes pour calculer $p_{A_2}(B_1)$:

$p_{A_2}(B_1) = \dfrac{p(A_2 \cap B_1)}{p(A_2)} = \dfrac{p_{B_1}(A_2) \times p(B_1)}{p(A_2)} = \dfrac{0{,}24 \times 0{,}5}{0{,}54} \approx 0{,}222$

3. **a.** On remarquera au préalable que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n + b_n = 1$.

L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



b. Utilisons là encore, la formule des probabilités totales pour déterminer a_{n+1} en fonction de a_n, pour tout entier naturel non nul :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap B_n) = p_{A_n}(A_{n+1}) \times p(A_n) + p_{B_n}(A_{n+1}) \times p(B_n)$
$= 0{,}84 \times p(A_n) + 0{,}24 \times p(B_n) = 0{,}84\ a_n + 0{,}24\ b_n$. Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 1 - a_n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = 0{,}84\ a_n + 0{,}24(1 - a_n) = 0{,}6\ a_n + 0{,}24$

c. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}$.

Initialisation : $a_1 = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{1-1} = 0{,}6 - 0{,}1 = 0{,}5$. L'initialisation est vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et supposons que $a_n = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}$.

Montrons que $a_{n+1} = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n}$.

D'après la question précédente,$a_{n+1} = 0{,}6\ a_n + 0{,}24$, donc en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$a_{n+1} = 0{,}6\left(0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}\right) + 0{,}24 = 0{,}36 - 0{,}1 \times 0{,}6 \times 0{,}6^{n-1} + 0{,}24 = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n}$.

On obtient ce qu'il fallait démontrer. L'hérédité est démontrée.

Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$. D'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}$.

d. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0{,}6^{n-1} = 0$ car $0{,}6 \in]-1\ ;\ 1[$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0{,}6$.

Cela signifie qu'au bout d'un certain temps, la probabilité qu'un vélo soit à la station A est de 60 %.

e. Résolvons : $a_n \geqslant 0{,}599$. $a_n \geqslant 0{,}599 \iff 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1} \geqslant 0{,}599$

$\iff -0{,}1 \times 0{,}6^{n-1} \geqslant -0{,}001 \iff 0{,}6^{n-1} \leqslant \dfrac{-0{,}001}{-0{,}1} \iff 0{,}6^{n-1} \leqslant \dfrac{1}{100}$.

Sachant que la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$,

$0{,}6^{n-1} \leqslant \dfrac{1}{100} \iff \ln\left(0{,}6^{n-1}\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{100}\right) \iff (n-1) \times \ln(0{,}6) \leqslant -\ln(100)$. Or $\ln(0{,}6) < 0$, donc $n - 1 \geqslant \dfrac{-\ln(100)}{\ln(0{,}6)} \iff n \geqslant 1 - \dfrac{2\ln(10)}{\ln(0{,}6)}$.

À la calculatrice, $1 - \dfrac{2\ln(10)}{\ln(0{,}6)} \approx 10{,}02$ donc $n \geqslant 11$.

La probabilité que le vélo se trouve au point A est supérieure à 0,599 à partir du 11-ième jour.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 13

Polynésie 30 août 2022

Parmi les angines, un quart nécessite la prise d'antibiotiques, les autres non.
Afin d'éviter de prescrire inutilement des antibiotiques, les médecins disposent d'un test de diagnostic ayant les caractéristiques suivantes :

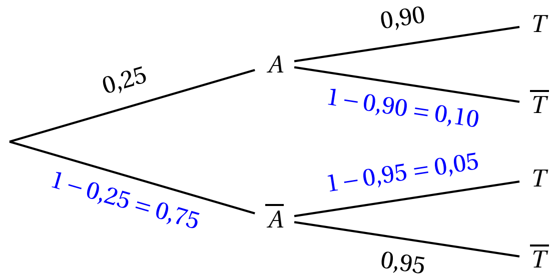
- lorsque l'angine nécessite la prise d'antibiotiques, le test est positif dans 90 % des cas;
- lorsque l'angine ne nécessite pas la prise d'antibiotiques, le test est négatif dans 95 % des cas.

Partie 1

Un patient atteint d'angine et ayant subi le test est choisi au hasard.
On considère les évènements suivants :

- A : « le patient est atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques »;
- T : « le test est positif »;
- $\overline{A}$ et $\overline{T}$ sont respectivement les évènements contraires de A et T.

1. On résume la situation par un arbre pondéré.



$P(A \cap T) = P(A) \times P_A(T) = 0{,}25 \times 0{,}90 = 0{,}225$

2. D'après la formule des probabilités totales :
$P(T) = P(A \cap T) + P\left(\overline{A} \cap T\right) = 0{,}225 + 0{,}75 \times 0{,}05 = 0{,}2625$

3. On choisit un patient ayant un test positif. La probabilité qu'il soit atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques est :
$P_T(A) = \dfrac{P(A \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}225}{0{,}2625} \approx 0{,}8571$

4. **a.** Les évènements correspondant à un résultat erroné du test sont : $\overline{A} \cap T$ et $A \cap \overline{T}$.

b. On définit l'évènement E : « le test fournit un résultat erroné ».
$P(E) = P\left(\overline{A} \cap T\right) + P\left(A \cap \overline{T}\right) = 0{,}25 \times 0{,}10 + 0{,}75 \times 0{,}05 = 0{,}0625$

Partie 2

On sélectionne au hasard un échantillon de n patients qui ont été testés. On admet que l'on peut assimiler ce choix d'échantillon à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de patients de cet échantillon ayant un test erroné.

1. On suppose que $n = 50$.

a. On a une répétition de 50 épreuves indépendantes et identiques n'ayant que deux issues et dont le succès a pour probabilité $p = 0{,}0625$; donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}0625$.

b. $P(X = 7) = \dbinom{50}{7} \times 0{,}0625^7 \times (1 - 0{,}0625)^{50-7} \approx 0{,}0237$

c. La probabilité qu'il y ait au moins un patient dans l'échantillon dont le test est erroné est :
$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \dbinom{50}{0} \times 0{,}0625^0 \times (1 - 0{,}0625)^{50} \approx 0{,}9603$

2. On cherche la taille de l'échantillon faut-il choisir pour que $P(X \geqslant 10)$ soit supérieure à 0,95.
$P(X \geqslant 10) > 0{,}95 \iff P(X < 10) \leqslant 0{,}05 \iff P(X \leqslant 9) \leqslant 0{,}05$
À la calculatrice, par essais successifs, on trouve :
- pour $n = 247$, $P(X \leqslant 9) \approx 0{,}0514$;
- pour $n = 248$, $P(X \leqslant 9) \approx 0{,}0498$.

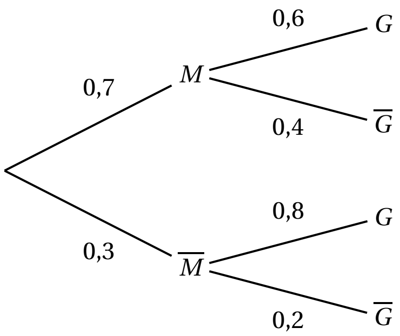
Il faut donc un échantillon de taille au moins 248 pour que $P(X \geqslant 10) \geqslant 0{,}95$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 14

Métropole Antilles-Guyane 8 septembre 2022

1. **a.** On a $p(M) = 0{,}7$, donc $p\left(\overline{M}\right) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.
Or $p\left(\overline{M}\cap\overline{G}\right) = 0{,}06$ donc
$p\left(\overline{M}\right) \times p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right) = 0{,}06 \iff 0{,}3 \times p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right) = 0{,}06 \iff p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right) = 0{,}2$.

b. On complète l'arbre pondéré :



c. La probabilité de l'évènement « le client visite la grotte et ne visite pas le musée » est :
$p\left(\overline{M}\cap G\right) = p\left(\overline{M}\right) \times p_{\overline{M}}(M) = 0{,}3 \times 0{,}8 = 0{,}24$.

d. On a de même $p(M\cap G) = p(M) \times p_M(G) = 0{,}7 \times 0{,}6 = 0{,}42$.
D'après la loi des probabilités totales :
$p(G) = p(M\cap G) + p\left(\overline{M}\cap G\right) = 0{,}42 + 0{,}24 = 0{,}66$.

2. Le responsable de l'hôtel affirme que parmi les clients qui visitent la grotte, plus de la moitié visitent également le musée.
On calcule $p_G(M) = \dfrac{p(G\cap M}{p(G)} = \dfrac{p(M\cap G}{p(G)} = \dfrac{0{,}42}{0{,}66} = \dfrac{42}{66} = \dfrac{21}{33} = \dfrac{7}{11} \approx 0{,}64 > 0{,}5$.
L'affirmation est exacte.

3. **a.** On a le tableau de probabilités suivant :

évènement	$M\cap G$	$M\cap\overline{G}$	$\overline{M}\cap G$	$\overline{M}\cap\overline{G}$
probabilité	0,42	0,28	0,24	0,06
dépense	17	12	5	0

b. D'après le tableau précédent :
$E(T) = 17 \times 0{,}42 + 12 \times 0{,}28 + 5 \times 0{,}24 + 0 \times 0{,}06 = 7{,}14 + 3{,}36 + 1{,}2 = 11{,}7$.
Ceci signifie que sur un grand nombre de visiteurs la dépense moyenne par visiteur est égale à 11,70 €.

c. Soit x le nombre minimum de visiteurs , x doit vérifier :
$11{,}7 \times x > 700 \iff x > \dfrac{700}{11{,}7}$. Or $\dfrac{700}{11{,}7} \approx 59{,}8$.
Il faut donc qu'il y ait au moins 60 visiteurs.

4. Soit g le prix à payer pour visiter la grotte ; le tableau de probabilités devient :

évènement	$M\cap G$	$M\cap\overline{G}$	$\overline{M}\cap G$	$\overline{M}\cap\overline{G}$
probabilité	0,42	0,28	0,24	0,06
dépense	12 + g	12	g	0

L'espérance devient :
$E = 0{,}42(12+g) + 12 \times 0{,}28 + 0{,}24 \times g + 0 \times 0{,}06 = 5{,}04 + 0{,}42g + 3{,}36 + 0{,}24g = 8{,}4 + 0{,}66g$.
Le responsable veut que :
$8{,}4 + 0{,}66g = 15 \iff 0{,}66g = 6{,}6 \iff g = 10$.
Le prix d'entrée à la grotte doit passer à 10 euros.

5. Le nombre de visiteurs étant suffisamment grand pour que le tirage puisse être considéré avec remise, chaque visiteur a donc en moyenne une probabilité de 0,66 de visiter la grotte.
La variable aléatoire G égale au nombre de visiteurs de la grotte suit donc une loi binomiale $\mathscr{B}(100\ ;\ 0{,}66)$.
Il faut donc trouver $p(G \geqslant 75)$.
La calculatrice donne $p(G \leqslant 74) \approx 0{,}9660$, donc
$p(G \geqslant 75) = 1 - p(G \leqslant 74) \approx 1 - 0{,}9660 \approx 0{,}034$ au millième près.

Éléments de la correction de l'exercice 15

Métropole Antilles Guyane 9 septembre 2022

Dans le magasin d'Hugo, les clients peuvent louer deux types de vélos : vélos de route ou bien vélos tout terrain.
Chaque type de vélo peut être loué dans sa version électrique ou non.
On choisit un client du magasin au hasard, et on admet que :

— Si le client loue un vélo de route, la probabilité que ce soit un vélo électrique est de 0,4 ;

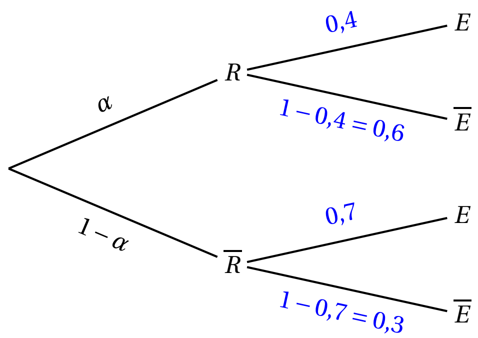
— Si le client loue un vélo tout terrain, la probabilité que ce soit un vélo électrique est de 0,7 ;

— La probabilité que le client loue un vélo électrique est de 0,58.

On appelle α la probabilité que le client loue un vélo de route, avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.
On considère les évènements suivants :

- R : « le client loue un vélo de route » ;
- E : « le client loue un vélo électrique » ;
- $\overline{R}$ et $\overline{E}$, évènements contraires de R et E.

1. On complète l'arbre proposé.



2. a. D'après la formule des probabilités totales :
$p(E) = p(R \cap E) + p\left(\overline{R} \cap E\right) = \alpha \times 0{,}4 + (1-\alpha) \times 0{,}7 = 0{,}4\alpha + 0{,}7 - 0{,}7\alpha = 0{,}7 - 0{,}3\alpha$.

   b. La probabilité que le client loue un vélo électrique est $p(E) = 0{,}58$.
Or $p(E) = 0{,}7 - 0{,}3\alpha$. Donc $0{,}7 - 0{,}3\alpha = 0{,}58$ ce qui équivaut à $0{,}7 - 0{,}58 = 0{,}3\alpha$ ou encore $0{,}12 = 0{,}3\alpha$ soit $\alpha = 0{,}4$.

3. On sait que le client a loué un vélo électrique.
La probabilité qu'il ait loué un vélo tout terrain est :
$$p_E\left(\overline{R}\right) = \frac{p\left(\overline{R} \cap E\right)}{p(E)} = \frac{(1-0{,}4) \times 0{,}7}{0{,}58} = \frac{0{,}42}{0{,}58} \approx 0{,}72.$$

4. La probabilité que le client loue un vélo tout terrain électrique est : $p\left(\overline{R}\cap E\right) = 0{,}42$.
5. Le prix de la location à la journée d'un vélo de route non électrique est de 25 euros, celui d'un vélo tout terrain non électrique de 35 euros. Pour chaque type de vélo, le choix de la version électrique augmente le prix de location à la journée de 15 euros.
   On appelle X la variable aléatoire modélisant le prix de location d'un vélo à la journée.
   a. On a quatre possibilités.
      - La location d'un vélo de route non électrique coûte 25 €.
        Cela correspond à l'évènement $R\cap\overline{E}$ de probabilité $0{,}4\times 0{,}6 = 0{,}24$.
      - La location d'un vélo de route électrique coûte $25+15$ soit 40 €.
        Cela correspond à l'évènement $R\cap E$ de probabilité $0{,}4\times 0{,}4 = 0{,}16$.
      - La location d'un vélo tout terrain non électrique coûte 35 €.
        Cela correspond à l'évènement $\overline{R}\cap\overline{E}$ de probabilité $0{,}6\times 0{,}3 = 0{,}18$.
      - La location d'un vélo tout terrain électrique coûte $35+15$ soit 50 €.
        Cela correspond à l'évènement $\overline{R}\cap E$ de probabilité $0{,}6\times 0{,}7 = 0{,}42$.

      On établit la loi de probabilité de X :

x_i	25	35	40	50
$p_i = p(X=x_i)$	0,24	0,18	0,16	0,42

   b. L'espérance mathématique de X est :
      $E(X) = \sum x_i\times p_i = 25\times 0{,}24+35\times 0{,}18+40\times 0{,}16+50\times 0{,}42 = 39{,}7$.
      Le coût moyen d'une location est donc de 39,70 euros.
6. Lorsqu'on choisit 30 clients d'Hugo au hasard, on assimile ce choix à un tirage avec remise.
   On note Y la variable aléatoire associant à un échantillon de 30 clients choisis au hasard le nombre de clients qui louent un vélo électrique.
   On rappelle que la probabilité de l'évènement E est : $p(E) = 0{,}58$.
   a. Il s'agit d'une répétition de 30 épreuves identiques et indépendantes n'ayant que deux issues, la probabilité du succès pour une épreuve étant égale à 0,58.
      Donc la variable aléatoire Y qui donne le nombre de succès sur 30 tirages, suit une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0{,}58$.
   b. La probabilité qu'un échantillon contienne exactement 20 clients qui louent un vélo électrique est :
      $p(Y=20) = \binom{30}{20}\times 0{,}58^{20}\times(1-0{,}58)^{30-20}\approx 0{,}095$.
   c. La probabilité qu'un échantillon contienne au moins 15 clients qui louent un vélo électrique est :
      $p(Y\geqslant 15) = 1-p(Y\leqslant 14)\approx 1-0{,}14190\approx 0{,}858$.

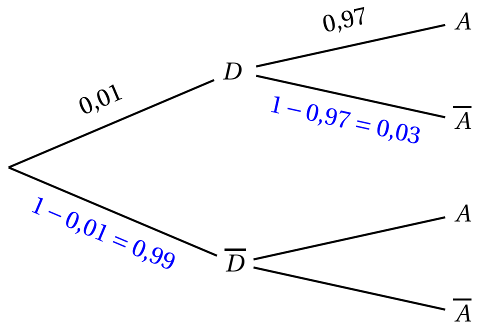
Éléments de la correction de l'exercice 16

Amérique du Sud 26 septembre 2022

PARTIE A

Le système d'alarme d'une entreprise fonctionne de telle sorte que, si un danger se présente, l'alarme s'active avec une probabilité de 0,97. La probabilité qu'un danger se présente est de 0,01 et la probabilité que l'alarme s'active est de 0,014 65.
On note A l'évènement « l'alarme s'active » et D l'évènement « un danger se présente ».
On note $\overline{M}$ l'évènement contraire d'un évènement M et $P(M)$ la probabilité de l'évènement M.

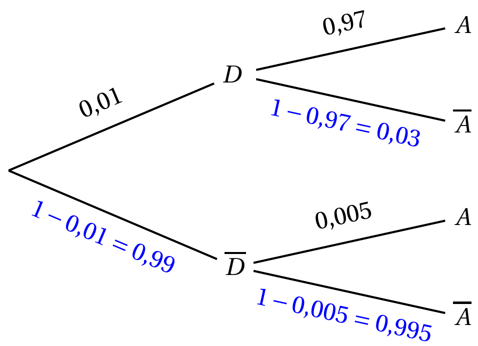
1. On représente les éléments de la situation que l'on connaît par un arbre pondéré.



2. **a.** La probabilité qu'un danger se présente et que l'alarme s'active est :
$P(D \cap A) = 0{,}01 \times 0{,}97 = 0{,}0097$.

   b. On en déduit que la probabilité qu'un danger se présente sachant que l'alarme s'active est : $P_A(D) = \dfrac{P(D \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0{,}0097}{0{,}01465} \approx 0{,}662$.

3. La probabilité que l'alarme s'active sachant qu'aucun danger ne s'est présenté est :
$P_{\overline{D}}(A) = \dfrac{P\left(A \cap \overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)}$.
On sait que $P(A) = 0{,}01465$.
D'après la formule des probabilités totales : $P(A) = P(D \cap A) + P\left(\overline{D} \cap A\right)$.
On déduit : $P(A) - P(D \cap A) = P\left(\overline{D} \cap A\right)$, donc $P\left(\overline{D} \cap A\right) = 0{,}01465 - 0{,}0097 = 0{,}00495$.
Donc $P_{\overline{D}}(A) = \dfrac{P\left(A \cap \overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)} = \dfrac{0{,}00495}{0{,}99} = 0{,}005$.
On peut compléter l'arbre :



4. On considère qu'une alarme ne fonctionne pas normalement lorsqu'un danger se présente et qu'elle ne s'active pas ou bien lorsqu'aucun danger ne se présente et qu'elle s'active.
Cette situation est représentée par les événements $D \cap \overline{A}$ et $\overline{D} \cap A$.
La probabilité que l'alarme ne fonctionne pas normalement est donc :
$P\left(D \cap \overline{A}\right) + P\left(\overline{D} \cap A\right) = 0{,}01 \times 0{,}03 + 0{,}99 \times 0{,}005 = 0{,}00525 < 0{,}01$.

PARTIE B

Une usine fabrique en grande quantité des systèmes d'alarme. On prélève successivement et au hasard 5 systèmes d'alarme dans la production de l'usine. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise. On note S l'évènement « l'alarme ne fonctionne pas normalement » et on admet que $P(S) = 0{,}00525$.
On considère X la variable aléatoire qui donne le nombre de systèmes d'alarme ne fonctionnant pas normalement parmi les 5 systèmes d'alarme prélevés.

1. On a une répétition de 5 épreuves assimilées à un tirage avec remise donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de systèmes d'alarme ne fonctionnant pas normalement parmi les 5 systèmes d'alarme prélevés suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}005\,25$.
2. La probabilité que, dans le lot prélevé, un seul système d'alarme ne fonctionne pas normalement est : $P(X = 1) = \binom{5}{1} \times 0{,}005\,25^1 \times (1 - 0{,}005\,25)^{5-1} \approx 0{,}025\,7$.
3. La probabilité que, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme ne fonctionne pas normalement est :
$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} \times 0{,}005\,25^0 \times (1 - 0{,}005\,25)^5 = 0{,}026\,0$.

PARTIE C

Soit n un entier naturel non nul. On prélève successivement et au hasard n systèmes d'alarme. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.
On cherche le plus petit entier n tel que la probabilité d'avoir, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme qui ne fonctionne pas normalement soit supérieure à 0,07.
Comme dans la partie B, la variable aléatoire Y qui donne le nombre de systèmes d'alarme défectueux suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}005\,25$.
On cherche n tel que $P(Y \geqslant 1) > 0{,}07$.
$P(Y \geqslant 1) > 0{,}07 \iff 1 - P(Y = 0) > 0{,}07 \iff 0{,}93 > P(Y = 0)$

$$\begin{aligned} P(Y = 0) < 0{,}93 &\iff \binom{n}{0} \times 0{,}005\,25^0 \times (1 - 0{,}005\,25)^n < 0{,}93 \iff 0{,}994\,75^n < 0{,}93 \\ &\iff \ln\left(0{,}994\,75^n\right) < \ln(0{,}93) \iff n \ln(0{,}994\,75) < \ln(0{,}93) \\ &\iff n > \frac{\ln(0{,}93)}{\ln(0{,}994\,75)} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}93)}{\ln(0{,}994\,75)} \approx 13{,}8$, donc il faut prélever au moins 14 systèmes d'alarme pour que la probabilité d'avoir, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme qui ne fonctionne pas normalement soit supérieure à 0,07.
Vérification à la calculatrice

- Pour $n = 13$, on trouve $P(Y \geqslant 1) \approx 0{,}066\,1 < 0{,}07$.
- Pour $n = 14$, on trouve $P(Y \geqslant 1) \approx 0{,}071\,0 > 0{,}07$.

Éléments de la correction de l'exercice 17

Amérique du Sud 27 septembre 2022

Une entreprise fabrique des composants pour l'industrie automobile. Ces composants sont conçus sur trois chaînes de montage numérotées de 1 à 3.

- La moitié des composants est conçue sur la chaîne nº 1 ;
- 30 % des composants sont conçus sur la chaîne nº 2 ;
- les composants restant sont conçus sur la chaîne nº 3.

À l'issue du processus de fabrication, il apparaît que 1 % des pièces issues de la chaîne nº 1 présentent un défaut, de même que 0,5 % des pièces issues de la chaîne nº 2 et 4 % des pièces issues de la chaîne nº 3.
On prélève au hasard un de ces composants. On note :

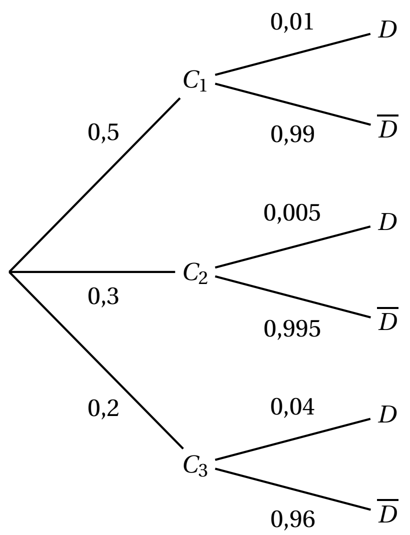
- C_1 l'évènement « le composant provient de la chaîne nº 1 » ;

- C_2 l'évènement « le composant provient de la chaîne n° 2 » ;
- C_3 l'évènement « le composant provient de la chaîne n° 3 » ;
- D l'évènement « le composant est défectueux » et $\overline{D}$ son évènement contraire.

Dans tout l'exercice, les calculs de probabilité seront donnés en valeur décimale exacte ou arrondie à 10^{-4} si nécessaire.

PARTIE A

1.



2. On a $p(C_3 \cap D) = p(C_3) \times p_{C_3}(D) = 0,2 \times 0,04 = 0,008$.

3. De même $p(C_1 \cap D) = p(C_1) \times p_{C_1}(D) = 0,5 \times 0,01 = 0,005$.
$p(C_2 \cap D) = p(C_2) \times p_{C_2}(D) = 0,3 \times 0,005 = 0,0015$.
D'après la loi des probabilités totales :
$p(D) = p(C_1 \cap D) + p(C_2 \cap D) + p(C_3 \cap D) = 0,005 + 0,0015 + 0,008 = 0,0145$.

4. On a $p_D(C_3) = \dfrac{p(D \cap C_3)}{p(D)} = \dfrac{0,008}{0,0145} \approx 0,55172$, soit $0,5517$ à 10^{-4} près.

PARTIE B

1. a. On a la loi binomiale $\mathscr{B}(20, 0,0145)$, donc la probabilité qu'un lot possède exactement trois composants défectueux sur 20 est égale à :
$\binom{20}{3}0,0145^3 \times (1 - 0,0145)^{17} \approx 0,00271$, soit $0,0027$ à 10^{-4} près.

b. La probabilité pour qu'un lot ne possède aucun composant défectueux est égale à $(1 - 0,0145)^{20} \approx 0,74667$, soit $0,7467$ à 10^{-4} près.
Donc la probabilité qu'un lot possède au moins un composant défectueux est $1 - 0,74667 \approx 0,2533$.

2. Avec $n = 11$ et donc la loi $\mathscr{B}(11, 0,0145)$, la probabilité pour qu'un lot ne possède aucun composant défectueux est égale à $(1 - 0,0145)^{11} \approx 0,85157$ soit $0,8516$ à 10^{-4} près : le directeur a raison.

PARTIE C

Le coût moyen de fabrication d'un composant pour cette entreprise est égal à :

$$0,5 \times 15 + 0,3 \times 12 + 0,2 \times 9 = 7,5 + 3,6 + 1,8 = 12,9$$

soit 12,90 € par composant.

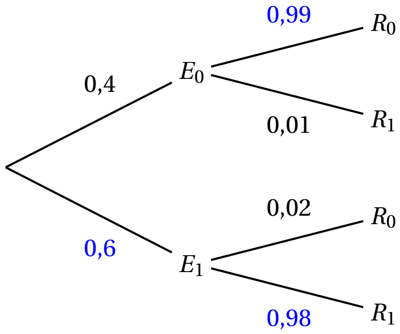
ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 18

Nouvelle-Calédonie 26 octobre 2022

Principaux domaines abordés : probabilités.

On peut compléter l'arbre pondéré :

- E_0 : « le bit envoyé est un 0 » ;
- E_1 : « le bit envoyé est un 1 » ;
- R_0 : « le bit reçu est un 0 »
- R_1 : « le bit reçu est un 1 ».



On sait que :
$p(E_0) = 0{,}4$; $\quad p_{R_0}(R_1) = 0{,}01$; $\quad p_{R_1}(R_0) = 0{,}02$.
On rappelle que la probabilité conditionnelle de A sachant B est notée $p_B(A)$.
On peut ainsi représenter la situation par l'arbre de probabilités ci-dessus.

1. $p(E_0 \cap R_0) = p(E_0) \times p_{E_0}(R_0) = 0{,}4 \times 0{,}99 = 0{,}396$.
2. On a aussi $p(E_1 \cap R_0) = p(E_1) \times p_{E_1}(R_0) = 0{,}6 \times 0{,}02 = 0{,}012$.
   D'après la loi des probabilités totales : $p(R_0) = p(E_0 \cap R_0) + p(E_1 \cap R_0) = 0{,}396 + 0{,}012 = 0{,}408$.
3. Avec $p(R_1) = 1 - p(R_0) = 1 - 0{,}408 = 0{,}592$;
   $p_{R_1}(E_0) = \dfrac{p(R_1 \cap E_0)}{p(R_1)} = \dfrac{p(E_0 \cap R_1)}{p(R_1)} = \dfrac{0{,}4 \times 0{,}01}{0{,}592} = \dfrac{0{,}004}{0{,}592} \approx 0{,}0067$, soit environ 0,007 au millième près.
4. On a $p(\text{erreur de transmission}) = p(E_0 \cap R_1) + p(E_1 \cap R_0) = 0{,}4 \times 0{,}01 + 0{,}6 \times 0{,}02 = 0{,}004 + 0{,}012 = 0{,}016$.

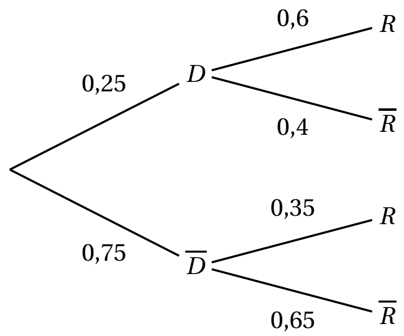
Un message de longueur huit bits est appelé un octet.
On admet que la probabilité qu'un octet soit transmis sans erreur est égale à 0,88.

5. On a une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}88$. Si x est la variable aléatoire égal au nombre d'octets transmis sans erreur, on a :
   $p(X = 7) = \binom{10}{7} \times 0{,}88^7 \times (1 - 0{,}88)^{10-7} = \binom{10}{7} \times 0{,}88^7 \times (0{,}12)^3 \approx 0{,}0847$ soit 0,085 au millième près.
6. On a $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{10}{0}0{,}88^0 \times 0{,}12^{10} = 1 - 0{,}12^{10}$.
7. On a $p(X = 18) = 0{,}88^{18} \approx 0{,}109 > 0{,}1$. Donc $N_0 = 18$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 19

Nouvelle-Calédonie 27 octobre 2022

1. **a.**



b. $p\left(\overline{D}\cap R\right) = p\left(\overline{D}\right) \times p_{\overline{D}}(R) = 0,75 \times 0,35 = 0,2625$.

c. On a de même $p(D\cap R) = p(D) \times p_D(R) = 0,25 \times 0,6 = 0,15$.
D'après la loi des probabilités totales :
$p(R) = p(D\cap R) + p\left(\overline{D}\cap R\right) = 0,15 + 0,2625 = 0,4125$.

d. Il faut trouver $p_R\left(\overline{D}\right) = \dfrac{p\left(R\cap\overline{D}\right)}{p(R)} = \dfrac{0,2625}{0,4125} \approx 0,6364$, soit 0,64 au centième près.

2. **a.** Les tirs sont indépendants et à chaque tir la probabilité de le réussir est égale à 0,35 : la variable aléatoire X égale au nombre de réussites suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,35$.

b. On a $E = np = 10 \times 0,35 = 3,5$: en moyenne sur 20 tirs Stéphanie en réussira 7.

c. La calculatrice donne $p(X \leqslant 6) \approx 0,97$.

d. On a de même $p(X \geqslant 6) \approx 0,095$.

3. La probabilité de rater n tirs à 3 points est égale à $0,65^n$, donc elle d'en réussir un est $1 - 0,65^n$.

Il faut donc résoudre dans $\mathbb{N}$, l'inéquation $1 - 0,65^n \geqslant 0,99 \iff 0,01 \geqslant 0,65^n$, soit par croissance de la fonction logarithme népérien :

$\ln 0,01 \geqslant n \ln 0,62 \iff \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,65} \leqslant n$ (car $\ln 0,65 < 0$).

Or $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,65} \approx 10,69$; le plus petit naturel solution est donc 11 : Stéphanie doit tenter 11 tirs.