LYCÉE FRANÇAIS
Saint
Exupéry
CONGO BRAZZAVILLE

LYCÉE FRANÇAIS SAINT-EXUPÉRY DE BRAZZAVILLE
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES

BAC PAR THEME

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

19 EXERCICES DE BAC 2022
AVEC DES ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION

EXTRAITS DE FICHIERS LATEX DU SITE DE L'APMEP

LYCEE FRANCAIS SAINT EXUPERY

BRAZZAVILLE - REP. DU CONGO

PAR VALÉRIEN EBERLIN
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

52 PAGES

SOMMAIRE

Exercice 1

Thèmes : géométrie dans le plan et dans l'espace — Polynésie 4 mai 2022

L'espace est rapporté un repère orthonormal où l'on considère :

- les points $A(2~;~-1~;~0)$ $B(1~;~0~;~-3)$, $C(6~;~6~;~1)$ et $E(1~;~2~;~4)$;
- Le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x - y - z + 4 = 0$.

1. **a.** Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ puis les longueurs BA et BC.

c. En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré.

2. **a.** Démontrer que le plan $\mathscr{P}$ est parallèle au plan ABC.

b. En déduire une équation cartésienne du plan ABC.

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ orthogonale au plan ABC et passant par le point E.

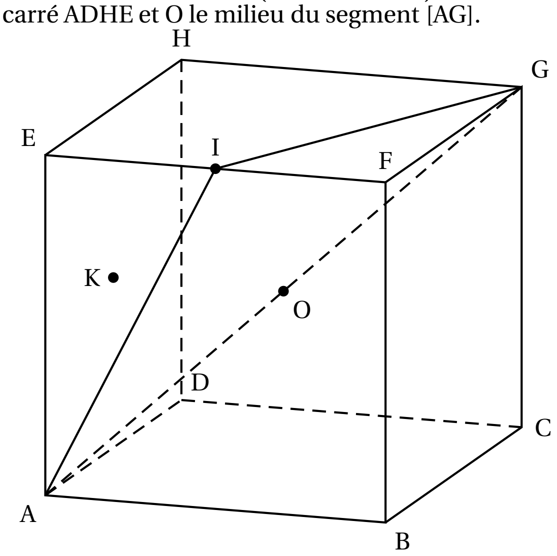
d. Démontrer que le projeté orthogonal H du point E sur le plan ABC a pour coordonnées $\left(4~;~\dfrac{1}{2}~;~\dfrac{5}{2}\right)$.

3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $\mathscr{V} = \dfrac{1}{3}\mathscr{B}h$ où $\mathscr{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur de la pyramide associée à cette base.
Calculer l'aire du triangle ABC puis démontrer que le volume de la pyramide ABCE est égal à 16,5 unités de volume.

Exercice 2

Thèmes : géométrie dans le plan et dans l'espace — Polynésie 5 mai 2022

On considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.
L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A~;~\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$. Le point I est le milieu du segment [EF], K le centre du carré ADHE et O le milieu du segment [AG].



Le but de l'exercice est de calculer de deux manières différentes, la distance du point B *au plan* (AIG)*.*

Partie 1. Première méthode

1. Donner, sans justification, les coordonnées des points A, B, et G.

   On admet que les points I et K ont pour coordonnées $\mathrm{I}\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,1\right)$ et $\mathrm{K}\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.
2. Démontrer que la droite (BK) est orthogonale au plan (AIG).
3. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (AIG) est : $2x - y - z = 0$.
4. Donner une représentation paramétrique de la droite (BK).
5. En déduire que le projeté orthogonal L du point B sur le plan (AIG) a pour coordonnées $\mathrm{L}\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.
6. Déterminer la distance du point B au plan (AIG).

Partie 2. Deuxième méthode

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{1}{3} \times b \times h$, où b est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.

1. **a.** Justifier que dans le tétraèdre ABIG, [GF] est la hauteur relative à la base AIB.

   b. En déduire le volume du tétraèdre ABIG.
2. On admet que $\mathrm{AI} = \mathrm{IG} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et que $\mathrm{AG} = \sqrt{3}$.

   Démontrer que l'aire du triangle isocèle AIG est égale à $\frac{\sqrt{6}}{4}$ unité d'aire.
3. En déduire la distance du point B au plan (AIG).

EXERCICE 3

Thèmes : géométrie dans l'espace Métropole 11 mai 2022

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$, on considère :

- le point A de coordonnées $(-1\,;\,1\,;\,3)$,
- la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+2t \\ y & = & 2-t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z & = & 2+2t \end{array}\right.$

On admet que le point A n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$.

1. **a.** Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathcal{D}$.

   b. Montrer que le point $\mathrm{B}(-1\,;\,3\,;\,0)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$.

   c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \vec{u}$.
2. On note $\mathcal{P}$ le plan passant par le point A et orthogonal à la droite $\mathcal{D}$, et on appelle H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$. Ainsi, H est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathcal{D}$.

   a. Montrer que le plan $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne : $2x - y + 2z - 3 = 0$.

b. En déduire que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9}\ ;\ \frac{19}{9}\ ;\ \frac{16}{9}\right)$.

c. Calculer la longueur AH. On donnera une valeur exacte.

3. Dans cette question, on se propose de retrouver les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathscr{D}$, par une autre méthode.

On rappelle que le point B$(-1\ ;\ 3\ ;\ 0)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$ et que le vecteur $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

a. Justifier qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{\text{HB}} = k\overrightarrow{u}$.

b. Montrer que $k = \dfrac{\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{u}}{\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2}$.

c. Calculer la valeur du nombre réel k et retrouver les coordonnées du point H.

4. On considère un point C appartenant au plan $\mathscr{P}$ tel que le volume du tétraèdre ABCH soit égal à $\frac{8}{9}$.

Calculer l'aire du triangle ACH.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$ où $\mathscr{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

EXERCICE 4

Thèmes : géométrie dans l'espace Centres Etrangers 11 mai 2022

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$, on considère les points :

$$\text{A}(2\ ;\ 0\ ;\ 3), \text{B}(0\ ;\ 2\ ;\ 1), \text{C}(-1\ ;\ -1\ ;\ 2) \text{ et } \text{D}(3\ ;\ -3\ ;\ -1).$$

1. Calcul d'un angle

a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ et en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Calculer les longueurs AB et AC.

c. À l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}}$, déterminer la valeur du cosinus de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$ puis donner une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$ au dixième de degré.

2. Calcul d'une aire

a. Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB).

b. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

c. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal E du point C sur la droite (AB), c'est-à-dire du point d'intersection de la droite (AB) et du plan $\mathscr{P}$

d. Calculer l'aire du triangle ABC.

3. Calcul d'un volume

a. Soit le point F$(1\ ;\ -1\ ;\ 3)$. Montrer que les points A, B, C et F sont coplanaires.

b. Vérifier que la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC).

c. Sachant que le volume d'un tétraèdre est égal au tiers de l'aire de sa base multiplié par sa hauteur, calculer le volume du tétraèdre ABCD.

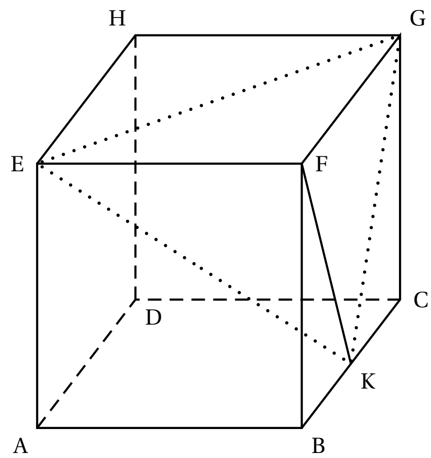
EXERCICE 5

Thèmes : géométrie dans l'espace — Métropole 12 mai 2022

On considère un cube ABCDEFGH et on appelle K le milieu du segment [BC].
On se place dans le repère $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$ et on considère le tétraèdre EFGK.
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$$

où $\mathscr{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.



1. Préciser les coordonnées des points E, F, G et K.
2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (EGK).
3. Démontrer que le plan (EGK) admet pour équation cartésienne : $2x - 2y + z - 1 = 0$.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EGK) passant par F.
5. Montrer que le projeté orthogonal L de F sur le plan (EGK) a pour coordonnées $\left(\frac{5}{9}\,;\ \frac{4}{9}\,;\ \frac{7}{9}\right)$.
6. Justifier que la longueur LF est égale à $\dfrac{2}{3}$.
7. Calculer l'aire du triangle EFG. En déduire que le volume du tétraèdre EFGK est égal à $\dfrac{1}{6}$.
8. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle EGK.
9. On considère les points P milieu du segment [EG], M milieu du segment [EK] et N milieu du segment[GK]. Déterminer le volume du tétraèdre FPMN.

EXERCICE 6

Thèmes : géométrie dans l'espace — Centres Etrangers 12 mai 2022

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$.

On considère les points

$$A(3\,;\,-2\,;\,2),\quad B(6\,;\,1\,;\,5),\quad C(6\,;\,-2\,;\,-1)\quad \text{et } D(0\,;\,4\,;\,-1).$$

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3}\mathscr{A} \times h$$

où $\mathscr{A}$ est l'aire de la base et h la hauteur correspondante.

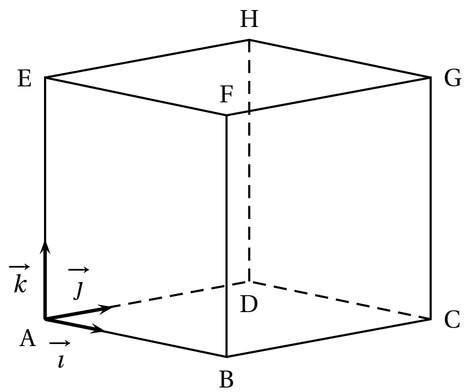
1. Démontrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
2. **a.** Montrer que le triangle ABC est rectangle.
   b. Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
   c. En déduire le volume du tétraèdre ABCD.
3. On considère le point H(5 ; 0 ; 1).
   a. Montrer qu'il existe des réels α et β tels que $\overrightarrow{BH} = \alpha\overrightarrow{BC} + \beta\overrightarrow{BD}$.
   b. Démontrer que H est le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).
   c. En déduire la distance du point A au plan (BCD).
4. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle BCD.

EXERCICE 7

Thèmes : géométrie dans l'espace — Asie 17 mai 2022

Le solide ABCDEFGH est un cube. On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ de l'espace dans lequel les coordonnées des points B, D et E sont :

$$B(3\,;\,0\,;\,0), D(0\,;\,3\,;\,0) \text{ et } E(0\,;\,0\,;\,3).$$

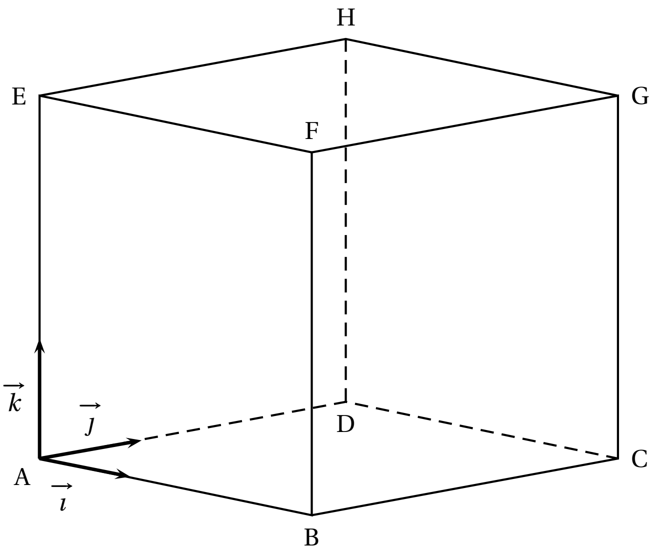


On considère les points P(0 ; 0 ; 1), Q(0 ; 2 ; 3) et R(1 ; 0 ; 3).

1. Placer les points P, Q et R sur la figure en ANNEXE qui sera à rendre avec la copie.
2. Montrer que le triangle PQR est isocèle en R.

3. Justifier que les points P, Q et R définissent un plan.
4. On s'intéresse à présent à la distance entre le point E et le plan (PQR).
   a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{u}(2\,;\,1\,;\,-1)$ est normal au plan (PQR).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (PQR).
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point E et orthogonale au plan (PQR).
   d. Montrer que le point $\text{L}\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{8}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point E sur le plan (PQR).
   e. Déterminer la distance entre le point E et le plan (PQR).
5. En choisissant le triangle EQR comme base, montrer que le volume du tétraèdre EPQR est $\frac{2}{3}$.
   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :
   $$V = \frac{1}{3} \times \text{aire d'une base} \times \text{hauteur correspondante.}$$
6. Trouver, à l'aide des deux questions précédentes, l'aire du triangle PQR.

ANNEXE à rendre avec la copie



EXERCICE 8

Thèmes : géométrie dans l'espace Asie 18 mai 2022

Dans un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère les points

$$A(-3 ; 1 ; 3), B(2 ; 2 ; 3), C(1 ; 7 ; -1), D(-4 ; 6 ; -1) \text{ et } K(-3 ; 14 ; 14).$$

1. **a.** Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   b. Montrer que le quadrilatère ABCD est un rectangle.
   c. Calculer l'aire du rectangle ABCD.
2. **a.** Justifier que les points A, B et D définissent un plan.
   b. Montrer que le vecteur $\vec{n}(-2 ; 10 ; 13)$ est un vecteur normal au plan (ABD).
   c. En déduire une équation cartésienne du plan (ABD).
3. **a.** Donner une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale au plan (ABD) et qui passe par le point K.
   b. Déterminer les coordonnées du point I, projeté orthogonal du point K sur le plan (ABD).
   c. Montrer que la hauteur de la pyramide KABCD de base ABCD et de sommet K vaut $\sqrt{273}$.
4. Calculer le volume V de la pyramide KABCD.
   On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}.$$

EXERCICE 9

Thèmes : géométrie dans l'espace Centres Etrangers Groupe 1 - 18 mai 2022

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A(5 ; 0 ; −1), B(1 ; 4 ; −1), C(1 ; 0 ; 3), D(5 ; 4 ; 3) et E(10 ; 9 ; 8).

1. **a.** Soit R le milieu du segment [AB].
   Calculer les coordonnées du point R ainsi que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   b. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan passant par le point R et dont $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_1$ est :

$$x - y - 1 = 0.$$

   c. Démontrer que le point E appartient au plan $\mathscr{P}_1$ et que EA = EB .

2. On considère le plan $\mathscr{P}_2$ d'équation cartésienne $x - z - 2 = 0$.
   a. Justifier que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.
   b. On note Δ la droite d'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
   Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2+t \\ y & = & 1+t \quad (t \in \mathbb{R}). \\ z & = & t \end{array}\right.$$

3. On considère le plan $\mathscr{P}_3$ d'équation cartésienne $y + z - 3 = 0$.
   Justifier que la droite Δ est sécante au plan $\mathscr{P}_3$ en un point Ω dont on déterminera les coordonnées.

Si S et T sont deux points distincts de l'espace, on rappelle que l'ensemble des points M de l'espace tels que MS = MT est un plan, appelé plan médiateur du segment [ST]. On admet que les plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont les plans médiateurs respectifs des segments [AB], [AC] et [AD].

4. a. Justifier que $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$.
   b. En déduire que les points A, B, C et D appartiennent à une même sphère dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 10

Thèmes : géométrie dans l'espace   Amérique du Nord 18 mai 2022

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ d'unité 1 cm, on considère les points suivants :

$$J(2 ; 0 ; 1), \quad K(1 ; 2 ; 1) \text{ et } \quad L(-2 ; -2 ; -2)$$

1. a. Montrer que le triangle JKL est rectangle en J.
   b. Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle JKL en cm^2.
   c. Déterminer une valeur approchée au dixième près de l'angle géométrique $\widehat{JKL}$.
2. a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (JKL).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (JKL).

Dans la suite, T désigne le point de coordonnées $(10 ; 9 ; -6)$.

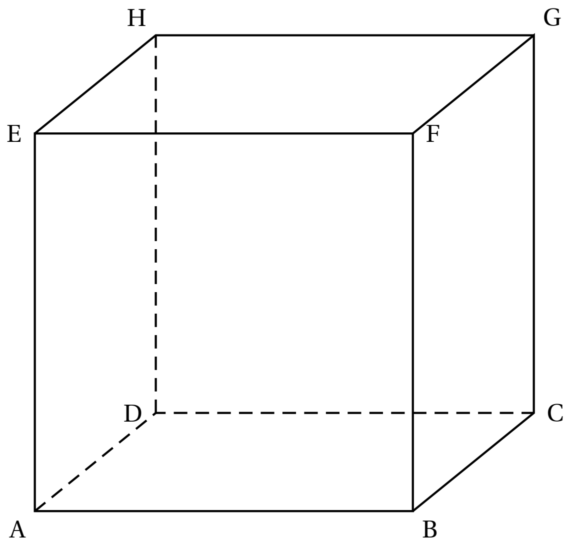
3. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale au plan (JKL) et passant par T.
   b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point T sur le plan (JKL).
   c. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3}\mathscr{B} \times h \text{ où } \mathscr{B} \text{ désigne l'aire d'une base et } h \text{ la hauteur correspondante}$$

   Calculer la valeur exacte du volume du tétraèdre JKLT en cm^3.

EXERCICE 11 — Thèmes : géométrie dans l'espace — Centres Etrangers Groupe 1 - 19 mai 2022

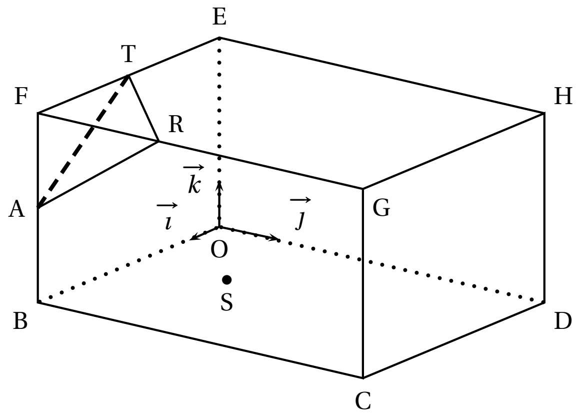
On considère le cube ABCDEFGH de côté 1 représenté ci-dessous.



On munit l'espace du repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\ \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

1. **a.** Justifier que les droites (AH) et (ED) sont perpendiculaires.
   b. Justifier que la droite (GH) est orthogonale au plan (EDH).
   c. En déduire que la droite (ED) est orthogonale au plan (AGH).
2. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{ED}}$.
   Déduire de la question 1. c. qu'une équation cartésienne du plan (AGH) est :
   $$y - z = 0.$$
3. On désigne par L le point de coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\,;\ 1\,;\ 0\right)$.
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EL).
   b. Déterminer l'intersection de la droite (EL) et du plan (AGH).
   c. Démontrer que le projeté orthogonal du point L sur le plan (AGH) est le point K de coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\,;\ \dfrac{1}{2}\,;\ \dfrac{1}{2}\right)$.
   d. Montrer que la distance du point L au plan (AGH) est égale à $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   e. Déterminer le volume du tétraèdre LAGH.
   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :
   $$V = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

Une exposition d'art contemporain a lieu dans une salle en forme de pavé droit de largeur 6 m, de longueur 8 m et de hauteur 4 m.
Elle est représentée par le parallélépipède rectangle OBCDEFGH où OB = 6 m, OD = 8 m et OE = 4 m.
On utilise le repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ tel que $\vec{\imath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OB}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{8}\overrightarrow{OD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OE}$.



Dans ce repère on a, en particulier C(6; 8; 0), F(6; 0; 4) et G(6; 8; 4).
Une des œuvres exposées est un triangle de verre représenté par le triangle ART qui a pour sommets A(6; 0; 2), R(6; 3; 4) et T(3; 0; 4), Enfin, S est le point de coordonnées $\left(3 ; \frac{5}{2} ; 0\right)$.

1. **a.** Vérifier que le triangle ART est isocèle en A.

   b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AT}$.

   c. En déduire une valeur approchée à 0,1 degré près de l'angle $\widehat{RAT}$.

2. **a.** Justifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ART).

   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ART).

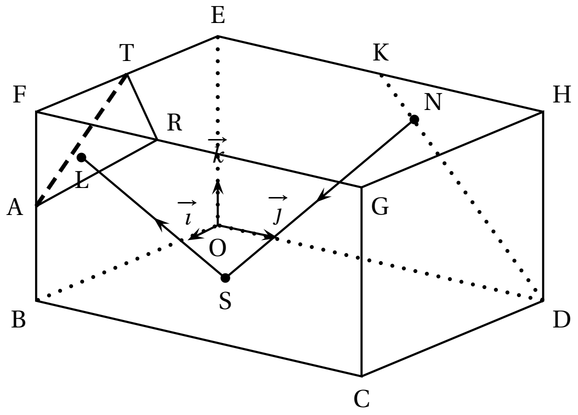
3. Un rayon laser dirigé vers le triangle ART est émis du plancher à partir du point S. On admet que ce rayon est orthogonal au plan (ART).

   a. Soit Δ la droite orthogonale au plan (ART) et passant par le point S.
   Justifier que le système ci-dessous est une représentation paramétrique de la droite Δ :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3+2k \\ y & = & \frac{5}{2}-2k \\ z & = & 3k \end{array}\right. \text{, avec } k \in \mathbb{R}.$$

   b. Soit L le point d'intersection de la droite Δ, avec le plan (ART).
   Démontrer que L a pour coordonnées $\left(5 ; \frac{1}{2} ; 3\right)$.

4. L'artiste installe un rail représenté par le segment [DK] ou K est le milieu du segment [EH].
   Sur ce rail, il positionne une source lumineuse laser en un point N du segment [DK] et il oriente ce second rayon laser vers le point S.



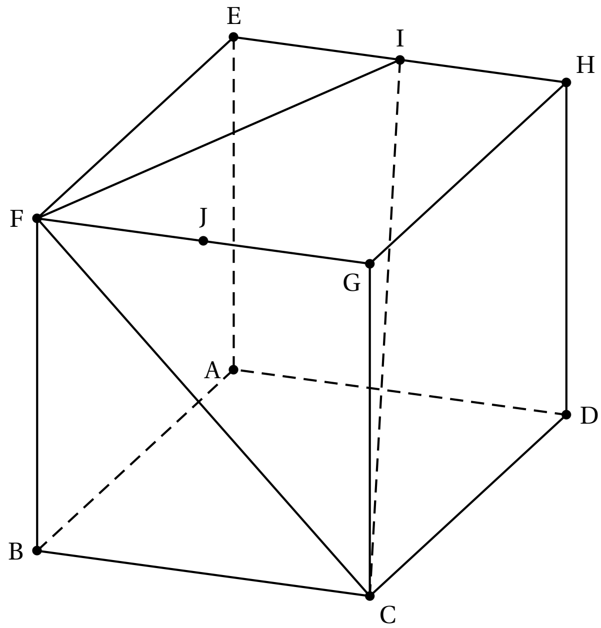
a. Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,1]$, le point N de coordonnées $(0\ ;\ 8-4t\ ;\ 4t)$ est un point du segment [DK].

b. Calculer les coordonnées exactes du point N tel que les deux rayons laser représentés par les segments [SL] et [SN] soient perpendiculaires.

EXERCICE 13

Thèmes : géométrie dans l'espace Polynésie 30 août 2022

On considère le cube ABCDEFGH.
On note I le milieu du segment[EH] et on considère le triangle CFI.
L'espace est muni du repère orthonormé $\left(\text{A}\ ;\ \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$ et on admet que le point I a pour coordonnées $\left(0\ ;\ \dfrac{1}{2} ;\ 1\right)$ dans ce repère.



1. **a.** Donner sans justifier les coordonnées des points C, F et G.

b. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (CFI).

c. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (CFI) est : $x+2y+2z-3=0$.

2. On note d la droite passant par G et orthogonale au plan (CFI).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

b. Démontrer que le point $\text{K}\left(\frac{7}{9}\,;\,\frac{5}{9}\,;\,\frac{5}{9}\right)$ est le projeté orthogonal du point G sur le plan (CFI).

c. Déduire des questions précédentes que la distance du point G au plan (CFI) est égale à $\frac{2}{3}$.

3. On considère la pyramide GCFI.

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule

$$V=\frac{1}{3}\times b\times h,$$

où b est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.

a. Démontrer que le volume de la pyramide GCFI est égal à $\frac{1}{6}$, exprimé en unité de volume.

b. En déduire l'aire du triangle CFI, en unité d'aire.

EXERCICE 14

Thèmes : géométrie dans l'espace Métropole 8 septembre 2022

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath},\,\overrightarrow{k}\right)$, on considère les points

$$\text{A}(-1\,;\,-1\,;\,3),\qquad \text{B}(1\,;\,1\,;\,2),\qquad \text{C}(1\,;\,-1\,;\,7)$$

On considère également la droite Δ passant par les points $\text{D}(-1\,;\,6\,;\,8)$ et $\text{E}(11\,;\,-9\,;\,2)$.

1. a. Vérifier que la droite Δ admet pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & -1+4t\\ y & = & 6-5t\\ z & = & 8-2t\end{array}\right.\quad \text{avec } t\in\mathbb{R}$$

b. Préciser une représentation paramétrique de la droite Δ' parallèle à Δ et passant par l'origine O du repère.

c. Le point $\text{F}(1{,}36\,;\,-1{,}7\,;\,-0{,}7)$ appartient-il à la droite Δ' ?

2. a. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

b. Montrer que la droite Δ est perpendiculaire au plan (ABC).

c. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $4x-5y-2z+5=0$.

3. a. Montrer que le point G(7; -4; 4) appartient à la droite Δ.

b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point G sur le plan (ABC).

c. En déduire que la distance du point G au plan (ABC) est égale à $3\sqrt{5}$.

4. **a.** Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

b. Calculer le volume V du tétraèdre ABCG.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule $V = \frac{1}{3} \times B \times h$ où B est l'aire d'une base et h la hauteur correspondant à cette base.

EXERCICE 15

Thèmes : géométrie dans l'espace — Métropole 9 septembre 2022

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$, on considère :

- la droite $\mathscr{D}$ passant par le point A(2 ; 4 ; 0) et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$;
- la droite $\mathscr{D}'$ dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{l c l}x&=&3\\y&=&3+t\\z&=&3+t\end{array}\right., t \in \mathbb{R}$.

1. **a.** Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u'}$ de la droite $\mathscr{D}'$.

b. Montrer que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles.

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.

On admet dans la suite de cet exercice qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Cette droite Δ coupe chacune des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.
On appellera M le point d'intersection de Δ et $\mathscr{D}$, et M$'$ le point d'intersection de Δ et $\mathscr{D}'$.
On se propose de déterminer la distance MM$'$ appelée « distance entre les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ».

2. Montrer que le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite Δ.

3. On note $\mathscr{P}$ le plan contenant les droites $\mathscr{D}$ et Δ, c'est-à-dire le plan passant par le point A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

b. En déduire qu'une équation du plan $\mathscr{P}$ est : $2x - y - 5z = 0$.

c. On rappelle que M$'$ est le point d'intersection des droites Δ et $\mathscr{D}'$.
Justifier que M$'$ est également le point d'intersection de $\mathscr{D}'$ et du plan $\mathscr{P}$.
En déduire que les coordonnées du point M$'$ sont (3 ; 1 ; 1).

4. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

b. Justifier que le point M a pour coordonnées (1 ; 2 ; 0).

c. Calculer la distance MM$'$.

5. On considère la droite d de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c l}x&=&5t\\y&=&2+5t\\z&=&1+t\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que la droite d est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

b. On note ℓ la distance d'un point N de la droite d au plan $\mathscr{P}$.
Exprimer le volume du tétraèdre ANMM′ en fonction de ℓ.

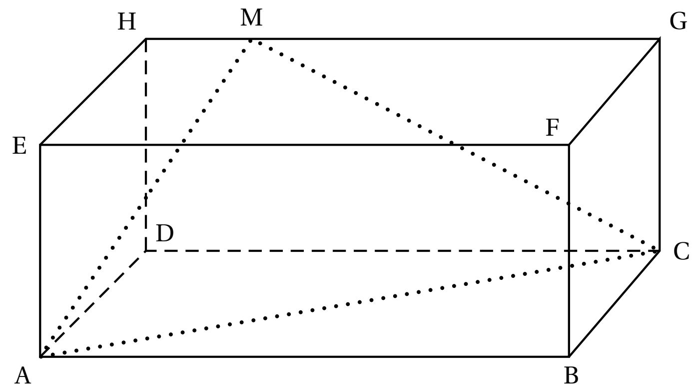
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \dfrac{1}{3} \times B \times h$ où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

c. Justifier que, si N_1 et N_2 sont deux points quelconques de la droite d, les tétraèdres AN_1MM' et AN_2MM' ont le même volume.

EXERCICE 16

Thèmes : géométrie dans l'espace — Amérique du Sud 26 septembre 2022

Dans la figure ci-dessous, ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que
AB = 5, AD = 3 et AE = 2.
L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine A dans lequel les points B, D et E ont respectivement pour coordonnées $(5\,;0\,;0)$, $(0\,;3\,;0)$ et $(0\,;0\,;2)$.



1. **a.** Donner, dans le repère considéré, les coordonnées des points H et G.
   b. Donner une représentation paramétrique de la droite (GH).
2. Soit M un point du segment [GH] tel que $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HG}$ avec k un nombre réel de l'intervalle $[0\,;1]$.
   a. Justifier que les coordonnées de M sont $(5k\,;\,3\,;\,2)$.
   b. En déduire que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM} = 25k^2 - 25k + 4$.
   c. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles AMC est un triangle rectangle en M.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère que le point M a pour coordonnées $(1\,;3\,;2)$.
On admet que le triangle AMC est rectangle en M .
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\dfrac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times h$ où h est la hauteur relative à la base.

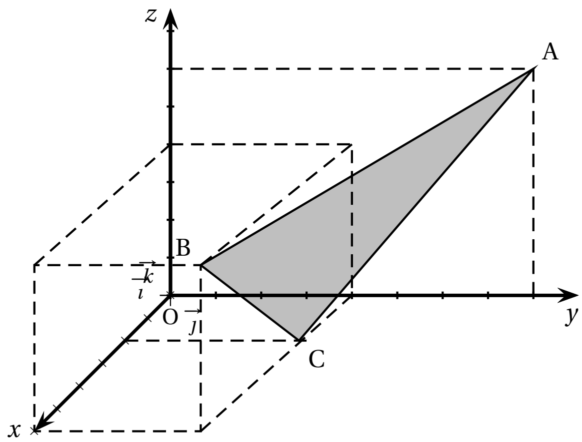
3. On considère le point K de coordonnées $(1\,;3\,;0)$.
   a. Déterminer une équation cartésienne du plan (ACD).
   b. Justifier que le point K est le projeté orthogonal du point M sur le plan (ACD).
   c. En déduire le volume du tétraèdre MACD.
4. On note P le projeté orthogonal du point D sur le plan (AMC).
   Calculer la distance DP; en donner une valeur arrondie à 10^{-1}.

EXERCICE 17

Thèmes : géométrie dans l'espace   Amérique du Sud 27 septembre 2022

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$, on considère les points

A(0 ; 8 ; 6), B(6 ; 4 ; 4) et C(2 ; 4 ; 0).

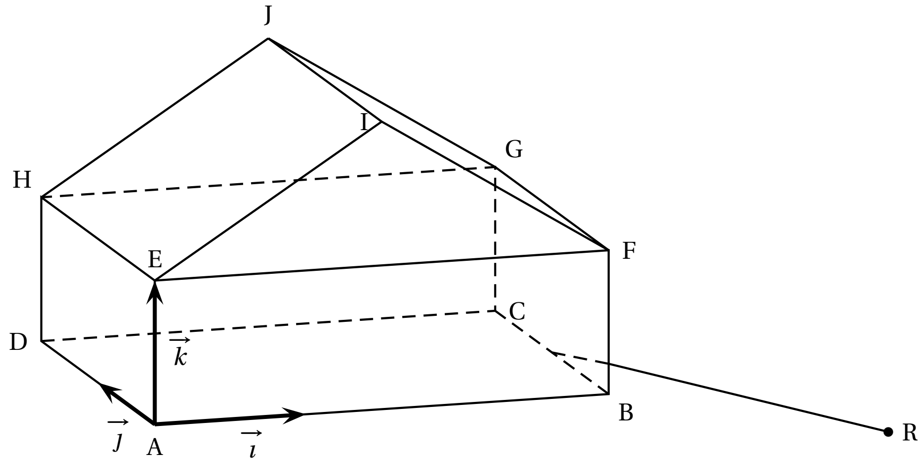


1. **a.** Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b. Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(1\,;\,2\,;\,-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Soient D et E les points de coordonnées respectives $(0\,;0\,;6)$ et $(6\,;6\,;0)$.
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DE).
   b. Montrer que le milieu I du segment [BC] appartient à la droite (DE).
3. On considère le triangle ABC.
   a. Déterminer la nature du triangle ABC.
   b. Calculer l'aire du triangle ABC en unité d'aire.
   c. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
   d. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie à 0,1 degré.
4. On considère le point H de coordonnées $\left(\dfrac{5}{3}\,;\,\dfrac{10}{3}\,;\,-\dfrac{5}{3}\right)$.
   Montrer que H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).
   En déduire la distance du point O au plan (ABC).

EXERCICE 18

Thèmes : géométrie dans l'espace   Nouvelle-Calédonie 26 octobre 2022

Une maison est constituée d'un parallélépipède rectangle ABCDEFGH surmonté d'un prisme EFIHGJ dont une base est le triangle EIF isocèle en I.
Cette maison est représentée ci-dessous.



On a AB = 3, AD = 2, AE = 1.

On définit les vecteurs $\vec{\imath} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\vec{k} = \overrightarrow{AE}$.

On munit ainsi l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. Donner les coordonnées du point G.

2. Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(2\,;\,0\,;\,-3)$ est vecteur normal au plan (EHI).
Déterminer une équation cartésienne du plan (EHI).

3. Déterminer les coordonnées du point I.

4. Déterminer une mesure au degré près de l'angle $\widehat{EIF}$.

5. Afin de raccorder la maison au réseau électrique, on souhaite creuser une tranchée rectiligne depuis un relais électrique situé en contrebas de la maison.
Le relais est représenté par le point R de coordonnées $(6\,;\,-3\,;\,-1)$.
La tranchée est assimilée à un segment d'une droite Δ passant par R et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(-3\,;\,4\,;\,1)$. On souhaite vérifier que la tranchée atteindra la maison au niveau de l'arête [BC].

a. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.

b. On admet qu'une équation du plan (BFG) est $x = 3$.
Soit K le point d'intersection de la droite Δ avec le plan (BFG).
Déterminer les coordonnées du point K.

c. Le point K appartient-il bien à l'arête [BC] ?

EXERCICE 19

Thèmes : géométrie dans l'espace   Nouvelle-Calédonie 27 octobre 2022

Une maison est modélisée par un parallélépipède rectangle ABCDEFGH surmonté d'une pyramide EFGHS.

On a DC = 6, DA = DH = 4.

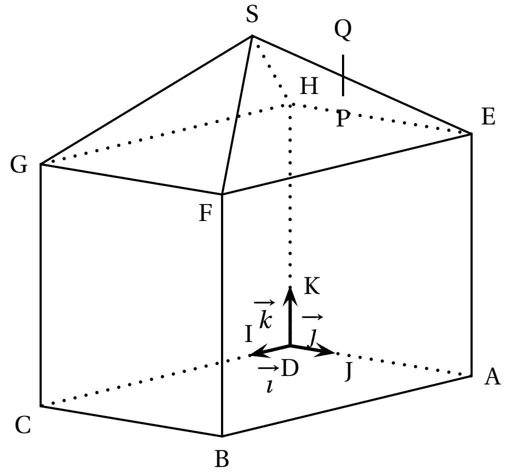
Soit les points I, J et K tels que

$\overrightarrow{\mathrm{DI}} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{DC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DJ}} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{DA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DK}} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{DH}}$.

On note $\vec{\imath} = \overrightarrow{\mathrm{DI}}$, $\vec{\jmath} = \overrightarrow{\mathrm{DJ}}$, $\vec{k} = \overrightarrow{\mathrm{DK}}$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{D}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.

On admet que le point S a pour coordonnées $(3\,;2\,;6)$.



1. Donner, sans justifier, les coordonnées des points B, E, F et G.

2. Démontrer que le volume de la pyramide EFGHS représente le septième du volume total de la maison.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

3. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (EFS).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EFS) est $y + z - 8 = 0$.

4. On installe une antenne sur le toit, représentée par le segment [PQ]. On dispose des données suivantes :

- le point P appartient au plan (EFS) ;
- le point Q a pour coordonnées $(2\,;3\,;5{,}5)$;
- la droite (PQ) est dirigée par le vecteur $\vec{k}$.

a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (PQ) est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 \\ y & = & 3 \\ z & = & 5{,}5 + t \end{array}\right. \qquad (t \in \mathbb{R})$$

b. En déduire les coordonnées du point P.

c. En déduire la longueur PQ de l'antenne.

5. Un oiseau vole en suivant une trajectoire modélisée par la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & -4 + 6s \\ y & = & 7 - 4s \\ z & = & 2 + 4s \end{array}\right. \qquad (s \in \mathbb{R})$$

Déterminer la position relative des droites (PQ) et Δ.

L'oiseau va-t-il percuter l'antenne représentée par le segment [PQ] ?

Éléments de la correction de l'exercice 1

Polynésie 4 mai 2022

L'espace est rapporté un repère orthonormal où l'on considère :

- les points A(2 ; −1 ; 0) B(1 ; 0 ; −3), C(6 ; 6 ; 1) et E(1 ; 2 ; 4) ;
- Le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x - y - z + 4 = 0$.

1. **a.** On veut démontrer que le triangle ABC est rectangle en A; on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\7\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -4+7-3 = 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux et le triangle ABC est donc rectangle en A.

b. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5\\6\\4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 5-6+12 = 11$.

$\text{BA} = \sqrt{1^2+(-1)^2+3^2} = \sqrt{11}$ et $\text{BC} = \sqrt{5^2+6^2+4^2} = \sqrt{77}$

c. On cherche la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\text{ABC}}$ arrondie au degré.

On a alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \text{BA}\times\text{BC}\times\cos\left(\widehat{\text{ABC}}\right) &\iff 11 = \sqrt{11}\times\sqrt{77}\times\cos\left(\widehat{\text{ABC}}\right)\\ &\iff 11 = \sqrt{11}\times\sqrt{11}\times\sqrt{7}\times\cos\left(\widehat{\text{ABC}}\right)\\ &\iff \cos\left(\widehat{\text{ABC}}\right) = \frac{1}{\sqrt{7}}\end{aligned}$$

La calculatrice donne $\widehat{\text{ABC}} \approx 68°$ au degré près.

2. **a.** On veut démontrer que le plan $\mathscr{P}$ est parallèle au plan (ABC).

Un vecteur normal du plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires car ABC est un triangle rectangle.

De plus $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 2\times(-1) - 1\times 1 - 1\times(-3) = -2-1+3 = 0$

et

$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times 4 - 1\times 7 - 1\times 1 = 8-7-1 = 0$

$\overrightarrow{n}$ est donc un vecteur normal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), c'est donc un vecteur normal de ce plan et du plan $\mathscr{P}$.

Les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont donc parallèles.

b. On déduit une équation cartésienne du plan (ABC).

Le plan (ABC) a donc une équation de la forme $2x - y - z + d = 0$, comme A appartient à ce plan, on a : $5 + d = 0$ soit $d = -5$.

Une équation de (ABC) est donc $2x - y - z - 5 = 0$.

c. On détermine une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ orthogonale au plan (ABC) et passant par le point E.

Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ est donc le vecteur $\overrightarrow{n}$

On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{D} \iff \overrightarrow{EM} = t\,\overrightarrow{n}$, avec $t \in \mathbb{R}$, soit

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& 2t\\ y-2 &=& -t,\quad t\in\mathbb{R}\\ z-4 &=& -t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t\\ y &=& 2-t,\quad t\in\mathbb{R}.\\ z &=& 4-t\end{array}\right.$$

d. On démontre que le projeté orthogonal H du point E sur le plan (ABC) a pour coordonnées $\left(4\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{5}{2}\right)$.

H correspond à l'intersection du plan (ABC) avec la droite perpendiculaire à (ABC) qui passe par E soit la droite $\mathscr{D}$, les coordonnées de H seront donc solutions du système suivant :

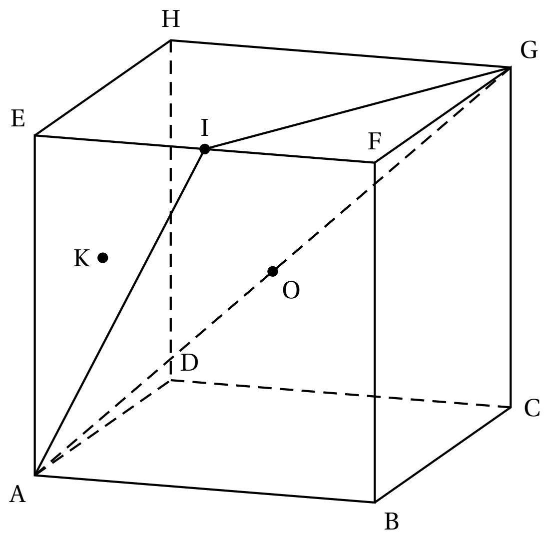
$$\begin{cases} x=1+2t\\ y=2-t\\ z=4-t\\ 2x-y-z-5=0\end{cases} \iff \begin{cases} x=1+2t\\ y=2-t\\ z=4-t\\ 2(1+2t)-(2-t)-(4-t)-5=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=1+2t\\ y=2-t\\ z=4-t\\ 6t-9=0\end{cases} \iff \begin{cases} t=\frac{3}{2}\\ x=4\\ y=\frac{1}{2}\\ z=\frac{5}{2}\end{cases}$$

3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $\mathcal{V}=\dfrac{1}{3}\mathcal{B}h$ où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur de la pyramide associée à cette base.
On va calculer l'aire du triangle ABC puis démontrer que le volume de la pyramide ABCE est égal à 16,5 unités de volume.
AC $=\sqrt{4^2+7^2+1^2}=\sqrt{66}$ et donc $\mathcal{B}=\dfrac{\text{AB}\times\text{AC}}{2}=\dfrac{\sqrt{11}\times\sqrt{66}}{2}=\dfrac{11\sqrt{6}}{2}$
HE est la hauteur de la pyramide et $\overrightarrow{\text{HE}}\begin{pmatrix}-3\\ \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$
On a par suite HE $=\sqrt{(-3)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{27}{2}}$ puis
$\mathcal{V}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{11\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{\dfrac{27}{2}}=\dfrac{11\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times3\sqrt{3}}{3\times2\times\sqrt{2}}=\dfrac{33}{2}=16{,}5$

Éléments de la correction de l'exercice 2

Polynésie 5 mai 2022



Partie A

1. On a les coordonnées suivantes : A (0 ; 0 ; 0) (origine du repère), B (1 ; 0 ; 0) et G (1 ; 1 ; 1).
2. Les points A, I et G ne sont pas alignés, donc $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont deux vecteurs formant une base de (AIG).
   On a les coordonnées suivantes : $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}0{,}5\\0\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-1\\0{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}$.
   Le repère est orthonormé (car ABCDEFGH est un cube d'arête 1), donc on calcule les produits scalaires avec les coordonnées :
   $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AI} = -1\times 0{,}5+0{,}5\times 0+0{,}5\times 1 = 0$: les vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont orthogonaux.
   $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AG} = -1\times 1+0{,}5\times 1+0{,}5\times 1 = 0$: les vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont orthogonaux.
   $\overrightarrow{BK}$ étant orthogonal à deux vecteurs formant une base de (AIG), on en déduit que la droite (BK) est bien orthogonale à (AIG).
3. Puisque (BK) est orthogonale à (AIG), alors un vecteur directeur de (BK) est un vecteur normal à (AIG), notamment, $\overrightarrow{n} = -2\overrightarrow{BK}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est normal à (AIG). Ce plan a donc une équation de la forme : $2x-y-z+d=0$.
   Comme A (0 ; 0 ; 0) ∈(AIG), on en déduit que d est tel que :
   $$\begin{aligned}2x_A-y_A-z_A+d=0 &\iff 2\times 0-0-0+d=0\\ &\iff d=0\end{aligned}$$
   Finalement, une équation du plan (AIG) est donc bien $2x-y-z=0$.
4. La droite (BK) est dirigée par $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-1\\0{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}$ et passe par B (1 ; 0 ; 0), donc elle admet pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l}x=1-t\\y=0+0{,}5t\\z=0+0{,}5t\end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{lcl}x&=&1-t\\y&=&0{,}5t\\z&=&0{,}5t\end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R}.$
5. Le point L dont on donne les coordonnées est clairement le point de paramètre $\frac{2}{3}$ dans la représentation paramétrique établie à la question précédente, donc L ∈ (BK).
   Vérifions si L est un point du plan (AIG) : $2x_L-y_L-z_L = 2\times\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$.
   Les coordonnées de L vérifient l'équation du plan : L ∈ (AIG).
   L est donc le point d'intersection de la droite (BK) et du plan (AIG) (qui sont sécants, puisque perpendiculaires), et donc L est le projeté orthogonal de B sur le plan (AIG).
6. La distance de B à (AIG) est donc la distance (BL), et comme le repère est orthonormé :
   $$\begin{aligned}BL &= \sqrt{(x_L-x_B)^2+(y_L-y_B)^2+(z_L-z_B)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(\frac{1}{3}-0\right)^2+\left(\frac{1}{3}-0\right)^2}\\ &= \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4+1+1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}\end{aligned}$$

Partie B

1. **a.** Dans le tétraèdre ABIG, si on considère AIB comme base, alors cette base est incluse dans le plan (AIB), qui contient la face avant du cube (la face ABFE), et donc l'arête [GF] est bien perpendiculaire à ce plan, puisque ABCDEFGH est un cube.
   b. Le tétraèdre ABIG a donc pour volume $V_{ABIG} = \frac{1}{3}\times b_{ABI}\times h_{GF} = \frac{1}{3}\times\frac{1\times 1}{2}\times 1 = \frac{1}{6}$.
   (Le triangle ABI a une base [AB] de longueur 1 et la hauteur correspondante, issue de I est de même longueur que [AE], donc de longueur 1 aussi).
2. Dans le triangle isocèle AIG, la hauteur principale issue de I est donc aussi une médiane, et elle passe donc par le milieu de la base principale [AG], c'est à dire par le point O.
   On détermine la distance IO : $IO = \sqrt{0^2+0{,}5^2+(-0{,}5)^2} = \sqrt{0{,}5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

L'aire du triangle est donc $A_{\text{AIG}} = \dfrac{\text{AG} \times \text{OI}}{2} = \dfrac{\sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

3. Le tétraèdre AIBG dont on a déjà calculé le volume peut aussi être vu comme ayant pour base le triangle AGI et comme hauteur correspondante, la hauteur issue de B, donc la longueur h est la distance séparant B du plan (AGI).

On a donc : $V_{\text{ABIG}} = \dfrac{1}{6} \iff \dfrac{1}{3} \times A_{\text{AIG}} \times h = \dfrac{1}{6}$

$$\begin{aligned}
&\iff h = \frac{3}{A_{\text{AIG}} \times 6}\\
&\iff h = \frac{1}{2A_{\text{AIG}}}\\
&\iff h = \frac{1}{2 \times \dfrac{\sqrt{6}}{4}}\\
&\iff h = \frac{2}{\sqrt{6}}\\
&\iff h = \frac{2\sqrt{6}}{6}\\
&\iff h = \frac{\sqrt{6}}{3}
\end{aligned}$$

On retrouve bien une distance de B au plan (AIG) qui est $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Éléments de la correction de l'exercice 3

Métropole 11 mai 2022

1. **a.** La droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 2+2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b. Si B appartient à la droite $\mathscr{D}$ alors $\exists t \in \mathbb{R}$ tel que :

$\begin{cases} -1 = 1+2t \\ 3 = 2-t \\ 0 = 2+2t \end{cases} \iff \begin{cases} 2t = -2 \\ -t = 1 \\ 2t = -2t \end{cases} \iff t = -1$. Donc $B \in \mathscr{D}$.

c. On a $A(-1\,;\,1\,;\,3)$ et $B(-1\,;\,3\,;\,0)$. Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Alors $\overrightarrow{AB}.\vec{u} = 0 \times 2 + 2 \times (-1) + (-3) \times 2 = -8$

2. **a.** Le plan $\mathscr{P}$ passant par A est orthogonal à la droite $\mathscr{D}$. Donc $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal le vecteur $\vec{u}$ (vecteur directeur de $\mathscr{D}$).

Son équation cartésienne sera de la forme $ax + by + cz + d = 0$, où $(a\,;\,b\,;\,c)$ sont les cordonnées d'un vecteur normal au plan.

En prenant comme vecteur normal à $\mathscr{P}$ le vecteur $\overrightarrow{u}$, on obtient : $\mathscr{P}$: $2x-y+2z+d=0$. Or $A \in \mathscr{P}$ donc $-2-1+6+d=0$ donc $d=-3$. Donc $\mathscr{P}$ a pour équation $2x-y+2z-3=0$

b. Le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathscr{D}$, noté H, est l'unique point d'intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$. Résolvons donc le système suivant :
$\left\{\begin{array}{lcl} 2x-y+2z-3 & = & 0 \\ x & = & 1+2t \\ y & = & 2-t \\ z & = & 2+2t \end{array}\right.$. On remplace x, y et z dans la première équation :
$2x-y+2z-3=0 \iff 2(1+2t)-(2-t)+2(2+2t)-3=0 \iff$
$2+4t-2+t+4+4t=0 \iff 9t+1=0 \iff t=-\dfrac{1}{9}$.
On remplace la valeur de t dans les trois dernières équations :
$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+2\times-\dfrac{1}{9}=\dfrac{7}{9} \\ y & = & 2-\left(-\dfrac{1}{9}\right)=\dfrac{19}{9} \\ z & = & 2+2\times\left(-\dfrac{1}{9}\right)=\dfrac{16}{9} \end{array}\right.$. Donc $H\left(\dfrac{7}{9}\,;\,\dfrac{19}{9}\,;\,\dfrac{16}{9}\right)$.

c. Déterminons les coordonnées de $\overrightarrow{AH}$ avec $A(-1\,;\,1\,;\,3)$ et $H\left(\dfrac{7}{9}\,;\,\dfrac{19}{9}\,;\,\dfrac{16}{9}\right)$: $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}\frac{16}{9}\\ \frac{10}{9}\\ -\frac{11}{9}\end{pmatrix}$.

Donc $\left\|\overrightarrow{AH}\right\|=\sqrt{\left(\dfrac{16}{9}\right)^2+\left(\dfrac{10}{9}\right)^2+\left(-\dfrac{11}{9}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{477}}{9}=\dfrac{\sqrt{53}}{3}$

3. **a.** Les points H et B appartiennent à $\mathscr{D}$, donc le vecteur $\overrightarrow{HB}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$, tout comme $\overrightarrow{u}$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires donc $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{HB}=k\times\overrightarrow{u}$.

b. D'après les propriétés du produit scalaire, et en utilisant la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u}=\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right).\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u}+\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{u}$.

Or les points A et H appartiennent au plan $\mathscr{P}$ normal à la droite $\mathscr{D}$, donc tout vecteur de $\mathscr{P}$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathscr{D}$ donc $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{u}$ donc $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u}=0$.

Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u}=\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{u}=k\times\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}=k\,\overrightarrow{u}^2=k\,\|\overrightarrow{u}\|^2$ donc $k=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|^2}$.

c. On a $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ donc $\|\overrightarrow{u}\|=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{9}=3$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u}=-8$ donc $k=\dfrac{-8}{3^2}=-\dfrac{8}{9}$.

Donc en posant $H(x\,;\,y\,;\,z)$ et $B(-1\,;\,3\,;\,0)$ alors $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}-1-x\\3-y\\-z\end{pmatrix}$.

De plus $\overrightarrow{HB}=k\times\overrightarrow{u}=-\dfrac{8}{9}\times\overrightarrow{u}$ donc $\left\{\begin{array}{lcl} -1-x & = & -\dfrac{8}{9}\times 2 \\ 3-y & = & -\dfrac{8}{9}\times(-1) \\ -z & = & -\dfrac{8}{9}\times 2 \end{array}\right.$

Donc $x=\dfrac{16}{9}-1=\dfrac{7}{9}$, $y=3-\dfrac{8}{9}=\dfrac{19}{9}$ et $z=\dfrac{16}{9}$. On retrouve les coordonnées du point H.

4. Les points A, H et C appartiennent au plan $\mathscr{P}$. H est le projeté orthogonal de B sur $\mathscr{P}$. Le tétraèdre $BAHC$ a pour base le triangle AHC et pour hauteur BH.

Donc $\mathscr{V}_{BAHC}=\dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}_{AHC}\times BH$ d'où $\mathscr{A}_{AHC}=\dfrac{3\times\mathscr{V}_{BAHC}}{BH}$.

D'après la question **3. c**, $\overrightarrow{HB}=k\times\overrightarrow{u}=$ donc $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}\frac{16}{9}\\ -\frac{8}{9}\\ \frac{16}{9}\end{pmatrix}$ donc

$$HB = \sqrt{\left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(-\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{16}{9}\right)^2} = \frac{8}{3}$$

Donc $\mathscr{A}_{AHC} = \dfrac{3 \times \dfrac{8}{9}}{\dfrac{8}{3}} = 1$ unité d'aire.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 4

Centres Etrangers 11 mai 2022

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, on considère les points :

$$\mathrm{A}(2\,;\,0\,;\,3),\, \mathrm{B}(0\,;\,2\,;\,1), \mathrm{C}(-1\,;\,-1\,;\,2) \text{ et } \mathrm{D}(3\,;\,-3\,;\,-1).$$

1. **Calcul d'un angle**

   a. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\end{pmatrix}$; or ces coordonnées ne sont pas proportionnelles $\dfrac{-2}{-3} \neq \dfrac{2}{-1} \neq \dfrac{-2}{-1}$, donc il n'existe pas de réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AC}}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

   b.
   - $\mathrm{AB}^2 = 4+4+4 = 3\times 4$, donc $\mathrm{AB} = 2\sqrt{3}$:
   - $\mathrm{AC}^2 = 9+1+1 = 11$, donc $\mathrm{AC} = \sqrt{11}$.

   c.
   - D'une part $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 6-2+2 = 6$;
   - D'autre part $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\cos\widehat{\mathrm{BAC}}$.

   On a donc $6 = 2\sqrt{3}\times\sqrt{11}\times\cos\widehat{\mathrm{BAC}} \iff \cos\widehat{\mathrm{BAC}} = \dfrac{6}{2\sqrt{3}\times\sqrt{11}} = \dfrac{3}{\sqrt{33}}$.

   La calculatrice donne $\widehat{\mathrm{BAC}} \approx 58{,}51$, soit 58,5° au dixième près.

2. **Calcul d'une aire**

   a. Soit $M(x\,;\,y\,;\,z)$ un point de $\mathscr{P}$. On a $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{P} \iff \overrightarrow{\mathrm{C}M}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$.

   Avec $\overrightarrow{\mathrm{C}M}\begin{pmatrix}x+1\\y+1\\z-2\end{pmatrix}$, on obtient :

   $-2(x+1)+2(y+1)-2(z-2) = 0 \iff -(x+1)+(y+1)-(z-2) = 0 \iff -x+y-z+2 = 0$.

   b. En prenant le vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ comme vecteur directeur de la droite (AB), soit $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ on a :

   $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\mathrm{AB}) \iff \overrightarrow{\mathrm{A}M} = t\times\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \iff \left\{\begin{array}{rcl}x-2 &=& t\times(-1)\\ y-0 &=& t\times 1\\ z-3 &=& t\times(-1)\end{array}\right., t\in\mathbb{R} \iff$

   $\left\{\begin{array}{rcr}x &=& 2-t\\ y &=& t\\ z &=& 3-t\end{array}\right., t\in\mathbb{R}.$

c. E projeté orthogonal de C sur (AB) appartient au plan $\mathscr{P}$ et à la droite (AB) ; ses coordonnées vérifient donc l'équation de $\mathscr{P}$ et les équations paramétriques de (AB), donc le système :
$\left\{\begin{array}{lcl} -x+y-z+2 & = & 0 \\ x & = & 2-t \\ y & = & t \\ z & = & 3-t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$; en remplaçant x, y et z par leurs expressions en fonction de t dans l'équation de $\mathscr{P}$ on obtient :

$-2+t+t-3+t+2=0 \iff 3t-3=0 \iff t=1$.

On a donc E(1 ; 1 ; 2).

d. On a $\overrightarrow{\text{BC}}\begin{pmatrix}-1\\-3\\1\end{pmatrix}$, d'où $\text{BC}^2=1+9+1=11$ et $\text{BC}=\sqrt{11}$.

Comme $\text{AC}=\text{BC}=\sqrt{11}$, le triangle ABC est isocèle en C ; or on a vu que E est le projeté de C sur la droite (AB), donc dans le triangle isocèle (ABC), [CE] est la hauteur relative à la base [AB].

On a $\overrightarrow{\text{CE}}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$, d'où $\text{CE}^2=1+4=8$ et $\text{CE}=2\sqrt{2}$.

L'aire du triangle (ABC) est donc égale à :

$\mathscr{A}(\text{ABC})=\dfrac{\text{AB}\times\text{CE}}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}\times2\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{6}$.

3. Calcul d'un volume

a. $\text{F}\in(\text{ABC}) \iff$ il existe $\alpha\in\mathbb{R}, \beta\in\mathbb{R}$, tels que : $\overrightarrow{\text{AF}}=\alpha\overrightarrow{\text{AB}}+\beta\overrightarrow{\text{AC}} \iff$

$\left\{\begin{array}{lcl} -1 & = & -2\alpha-3\beta \\ -1 & = & 2\alpha-\beta \\ 0 & = & -2\alpha-\beta \end{array}\right.$. En ajoutant membre à membre les deux dernières équations on obtient $-1=-2\beta \iff \beta=\dfrac{1}{2}$ et en remplaçant β par $\dfrac{1}{2}$ dans la première équation

$-1=-2\alpha+\dfrac{3}{2} \iff 2\alpha=1-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{1}{2} \iff \alpha=-\dfrac{1}{4}$.

Donc $\overrightarrow{\text{AF}}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\text{AB}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{AC}}$: les quatre points A, B, C et F sont coplanaires.

b. Avec $\overrightarrow{\text{FD}}\begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix}$, on peut calculer :

$\overrightarrow{\text{FD}}\cdot\overrightarrow{\text{AB}}=-2-2+4=0$ et
$\overrightarrow{\text{FD}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}=-6+2+4=0$.

Le vecteur $\overrightarrow{\text{FD}}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : il est donc orthogonal à ce plan, ou encore la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC).

c. Si l'on choisit comme base le triangle (ABC), la hauteur de ce tétraèdre est donc [FD] et la volume est égal à :

$\mathscr{V}(\text{ABCD})=\dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}(\text{ABC})\times\text{FD}$

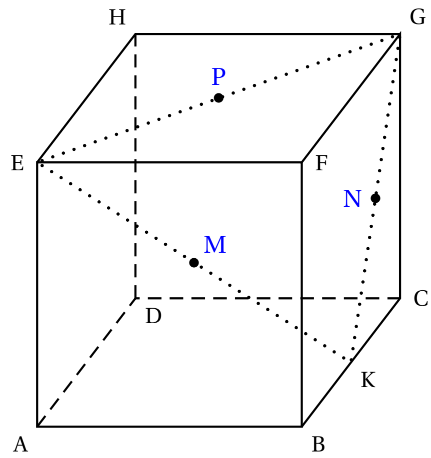
Avec $\text{FD}^2=4+4+16=24$, on trouve $\text{FD}=\sqrt{24}=\sqrt{4\times6}=2\sqrt{6}$, d'où :

$\mathscr{V}(\text{ABCD})=\dfrac{1}{3}\times2\sqrt{6}\times2\sqrt{6}=\dfrac{4\times6}{3}=8$.

On considère un cube ABCDEFGH et on appelle K le milieu du segment [BC].
On se place dans le repère $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$ et on considère le tétraèdre EFGK.
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$

où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.



1. Préciser les coordonnées des points E, F, G et K.
E(0 ; 0 ; 1), F(1 ; 0 ; 1), G(1 ; 1 ; 1), $\text{K}\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$.

2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (EGK).

D'après la question précédente : $\overrightarrow{\text{EG}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{EK}}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$.

D'où $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{EG}} = 2-2+0 = 0$: ces deux vecteurs sont orthogonaux;
$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{EK}} = 2-1-1 = 0$: ces deux vecteurs sont orthogonaux.
Le vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EGK) est orthogonal à ce plan.

3. Démontrer que le plan (EGK) admet pour équation cartésienne : $2x-2y+z-1=0$.
Le résultat précédent montre qu'une équation du plan (EGK) est $2x-2y+z=d$, avec $d\in\mathbb{R}$.
En particulier E(0 ; 0 ; 1) ∈ (EGK) $\iff 0-0+1=d \iff d=1$.
On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{EGK}) \iff 2x-2y+z=1$.

4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (ECK) passant par F.
La droite (d) étant orthogonale au plan (ECK), on peut prendre comme vecteur directeur de cette droite le vecteur $\overrightarrow{n}$. Elle contient F, donc :

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in(d) \iff \overrightarrow{\text{FM}} = t\overrightarrow{n} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& t\times 2\\ y-0 &=& t\times(-2)\\ z-1 &=& t\times 1\end{array}\right.,t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t\\ y &=& -2t\\ z &=& 1+t\end{array}\right.,t\in\mathbb{R}.$$

5. Montrer que le projeté orthogonal L de F sur le plan (EGK) a pour coordonnées $\left(\frac{5}{9}\,;\,\frac{4}{9}\,;\,\frac{7}{9}\right)$.
L étant le projeté orthogonal de F sur le plan (EGK), L est un point de la droite (d) et du plan (EGK) : ses coordonnées vérifient donc les équations de (d) et du plan (EGK), donc le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t\\ y &=& -2t\\ z &=& 1+t\\ 2x-2y+z &=& 1\end{array}\right.,t\in\mathbb{R}$$

En remplaçant x, y, et z par leurs expressions en fonction de t dans la dernière équation on obtient :

$2(1+2t)-2\times(-2t)+1+t=1 \iff 2+4t+4t+t+1=1 \iff 9t=-2 \iff t=-\dfrac{2}{9}$. On a donc : $x=1+2\times\left(-\dfrac{2}{9}\right)=1-\dfrac{4}{9}=\dfrac{5}{9}$;

$y=-2\times\left(-\dfrac{2}{9}\right)=\dfrac{4}{9}$;

$z=1-\dfrac{2}{9}=\dfrac{7}{9}$.

Conclusion : $\text{L}\left(\dfrac{5}{9}\ ;\ \dfrac{4}{9}\ ;\ \dfrac{7}{9}\right)$.

6. Justifier que la longueur LF est égale à $\dfrac{2}{3}$.

Avec $\text{L}\left(\frac{5}{9}\ ;\ \frac{4}{9}\ ;\ \frac{7}{9}\right)$ et $\text{F}(1\,;0\,;1)$, on a $\overrightarrow{\text{LF}}\begin{pmatrix}\frac{4}{9}\\ -\frac{4}{9}\\ \frac{2}{9}\end{pmatrix}$.

Donc $\text{LF}^2=\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{2}{9}\right)^2=\frac{16}{81}+\frac{16}{81}+\frac{4}{81}=\frac{36}{81}$, d'où $\text{LF}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

7. Calculer l'aire du triangle EFG. En déduire que le volume du tétraèdre EFGK est égal à $\dfrac{1}{6}$.

Le triangle (EFG) est rectangle en F, donc :

- On a $\mathscr{A}(\text{EFG})=\text{EF}\times\text{FG}\times\dfrac{1}{2}=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.
- $\mathscr{V}(\text{EFGK})=\dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}(\text{EFG})\times\text{BF}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{6}$.

8. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle EGK.

On a aussi $\mathscr{V}(\text{EFGK})=\dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}(\text{EGK})\times\text{LF}$, soit $\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}(\text{EGK})\times\dfrac{2}{3}$ ou encore

$\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{9}\times\mathscr{A}(\text{EGK})$, d'où $\mathscr{A}(\text{EGK})=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{9}}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{9}{2}=\dfrac{9}{12}=\dfrac{3}{4}$.

9. On considère les points P milieu du segment [EG], M milieu du segment [EK] et N milieu du segment[GK]. Déterminer le volume du tétraèdre FPMN.

D'après le théorème de la droite des milieux les côtés du triangle (PMN) ont une longueur moitié de celles du triangle (EGK). L'aire du triangle (PMN) est donc égale à $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$ fois celle du triangle (EGK), donc $\mathscr{A}(\text{PMN})=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{16}$.

Comme les trois points P, M et N appartiennent au plan (EGK) le triangle (PMN) appartient au plan (EGK) : la hauteur du tétraèdre FPMN est donc la même que celle du tétraèdre (EFGK) soit LF.

On a donc $\mathscr{V}(\text{FPMN})=\dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}(\text{PMN})\times\text{LF}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{16}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{24}$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 6

Centres Etrangers 12 mai 2022

1. Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$. Avec $A(3\ ;\ -2\ ;\ 2)$, $B(6\ ;\ 1\ ;\ 5)$, $C(6\ ;\ -2\ ;\ -1)$ et $D(0\ ;\ 4\ ;\ -1)$, on obtient : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$.

Pour que les points A, B, C et D soient coplanaires, il faut que (par exemple) le vecteur $\overrightarrow{AD}$ soit une combinaison linéaires des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Existe-t-il un couple de réels $(a\,;\,b)$ tel que $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AB}$? Cette égalité vectorielle se traduit par le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3a+3b &=& -3\\ 3a &=& 6\\ 3a-3b &=& -3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a+b &=& -1\\ a &=& 2\\ a-b &=& -1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} b &=& -3\\ a &=& 2\\ -b &=& -3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} b &=& -3\\ a &=& 2\\ b &=& 3\end{array}\right.$$

C'est impossible. Donc le vecteur $\overrightarrow{AD}$ ne peut être écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Donc les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

2. Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3\times3+3\times0+3\times(-3) = 9-9 = 0$. Donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.
Le triangle ABC est rectangle est rectangle en A.

3. Calculons $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$:
$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = (-3)\times3+6\times3+(-3)\times3 = -9+18-9 = 0$
$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} = (-3)\times3+6\times0+(-3)\times(-3) = -9+9 = 0$
Donc le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, donc il est aussi orthogonal à toute combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, donc orthogonal à tout vecteur du plan (ABC).

4. Les questions précédentes permettent d'affirmer que le point A est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC). Donc $\mathcal{V}_{ABCD} = \dfrac{1}{3}\mathcal{A}_{ABC}\times AD$.
$\|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{(-3)^2+6^2+(-3)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$
$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2+3^2+3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$
$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-3)^2+0^2+(-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
Donc $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{1}{2}\times AB\times AC = \dfrac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times3\sqrt{2} = \dfrac{9\sqrt{6}}{2}$
Donc $\mathcal{V}_{ABCD} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{9\sqrt{6}}{2}\times3\sqrt{6} = 27$ unités de volume.

5. Soit $H(5\,;\,0\,;\,1)$.

a. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont :
$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-3\\-6\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\3\\-6\end{pmatrix}$.

Existe-t-il un couple de réels $(\alpha\,;\,\beta)$ tel que $\overrightarrow{BH} = \alpha\overrightarrow{BC} + \beta\overrightarrow{BD}$? Cette égalité vectorielle est équivalente et permet d'écrire le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} -6\beta &=& -1\\ -3\alpha+3\beta &=& -1\\ -6\alpha-6\beta &=& -4\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \beta &=& \frac{1}{6}\\ -3\alpha &=& -1-\frac{3}{6}\\ -6\alpha &=& -4+1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \beta &=& \frac{1}{6}\\ -3\alpha &=& -\frac{3}{2}\\ 6\alpha &=& -3\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} \beta &=& \frac{1}{6}\\ \alpha &=& \frac{1}{2}\end{array}\right. .\quad \text{Donc } \overrightarrow{BH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BD}.$$

b. D'après la question précédente, Le vecteur $\overrightarrow{BH}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de deux vecteurs non-colinéaires dur plan (BCD). On peut donc affirmer que le point H appartient au plan (BCD). Montrons maintenant que le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est normal au plan (BCD), c'est-a-dire que le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à une base du plan (BCD), c'est-a-dire orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

On a : $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-3\\6\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\3\\-6\end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 2\times0+2\times(-3)+(-1)\times(-6) = -6+6 = 0$
$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{DB} = 2\times(-6)+2\times3+(-1)\times(-6) = -12+6+6 = 0$
Donc $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$, donc à toute combinaison linéaire de ces deux vecteurs, donc à tout vecteur du plan (BCD). Donc H est le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD).

c. La distance du point A au plan (BCD) est égale à $\| \overrightarrow{AH} \|$:
$\| \overrightarrow{AH} \| = \sqrt{2^2+2^2+(-1)^2} = \sqrt{9} = 3$ unités de longueur.

6. $\mathcal{V}_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A}_{BCD} \times AH$ d'où $\mathcal{A}_{BCD} = \dfrac{3 \times \mathcal{V}_{ABCD}}{AH}$.

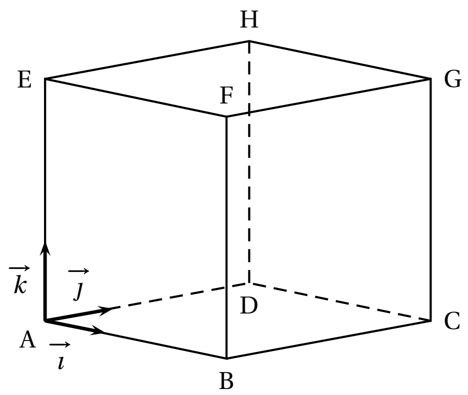
Donc $\mathcal{A}_{AHC} = \dfrac{3 \times 27}{3} = 27$ unités d'aire.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 7

Asie 17 mai 2022

Le solide ABCDEFGH est un cube. On se place dans le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ de l'espace dans lequel les coordonnées des points B, D et E sont :

$$B(3 ; 0 ; 0), D(0 ; 3 ; 0) \text{ et } E(0 ; 0 ; 3).$$



On considère les points P(0; 0; 1), Q(0; 2; 3) et R(1; 0; 3).

1. Voir l'annexe.

2. On a $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{QR}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$.

Donc $PR^2 = \left\|\overrightarrow{PR}\right\|^2 = 1^2+0^2+2^2 = 1+4 = 5$ et $QR = \left\|\overrightarrow{QR}\right\|^2 = 1^2+(-2)^2+0^2 = 1+4 = 5$. Donc $PR = QR = \sqrt{5}$: le triangle (PQR) est isocèle en R.

3. Les vecteurs $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{QR}$ ne sont pas colinéaires donc les points P, Q et R ne sont pas alignés : les points P, Q et R définissent un plan.

4. **a.**
- $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{u} = 2+0-2 = 0$;
- $\overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{u} = 2-2+0 = 0$.

Donc le vecteur $\overrightarrow{u}(2 ; 1 ; -1)$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (PQR) est normal à ce plan.

b. On sait qu'alors $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{PQR}) \iff 2x+1y-1z=d,\quad d\in\mathbb{R}$.
En particulier $\text{P}(0\ ;\ 0\ ;\ 1) \in (\text{PQR}) \iff 2\times 0+1\times 0-1\times 1=d \iff -1=d$.
On a donc $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{PQR}) \iff 2x+y-z=-1$.

c. Si d est orthogonale au plan (PQR) elle a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{u}$.
On a donc :

$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (d) \iff \overrightarrow{\text{EM}} = t\overrightarrow{u} \iff \left\{\begin{array}{l} x-0=2t\\ y-0=1t\\ z-3=-1t\end{array}\right. ,t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x&=&2t\\ y&=&t\\ z&=&-t+3\end{array}\right. ,t\in\mathbb{R}$.

d. Si L est le projeté orthogonal du point E sur le plan (PQR), la droite (LE) est perpendiculaire à ce plan donc l appartient à (d) et ce point L appartient aussi au plan (PQR).
les coordonnées de L vérifient donc le système d'équations :

$\left\{\begin{array}{l} x-0=2t\\ y-0=1t\\ z-3=-1t\\ 2x+y-z\quad=\quad -1\end{array}\right. ,t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{l} x=2t\\ y=t\\ z=-t+3\\ 2x+y-z\quad=\quad -1\end{array}\right. ,t\in\mathbb{R}.$

En remplaçant x, y et z par leurs expressions en fonction de t dans la dernière équation, on obtient :

$2\times 2t+t-(-t+3)=-1 \iff 6t-3=-1 \iff 6t=2 \iff t=\frac{1}{3}$. $\text{L}\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{8}{3}\right)$. On a donc $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{1}{3}$ et $z=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$.

e. On a donc avec $\overrightarrow{\text{EL}}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$, on déduit $\text{EL}^2=\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{6}{9}$.

La distance de E au plan (PQR) est donc égale à $\text{EL}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

5. Si on prend EQR comme base la hauteur est [PE].
On a $\mathscr{A}(EQR)=\frac{\text{EQ}\times\text{ER}}{2}=\frac{2\times 1}{2}=1$ et $\text{PE}=2$, donc :
$V(\text{EPQR})=\frac{1}{3}\times 1\times 2=\frac{2}{3}$.

6. On a aussi $V(\text{EPQR})=\frac{1}{3}\times\mathscr{A}(\text{PQR})=\times\text{EL}$, soit
$\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\times\mathscr{A}(\text{PQR})\times\frac{\sqrt{6}}{3} \iff \mathscr{A}(\text{PQR})=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$.
Rem. On peut retrouver cette aire en calculant l'aire de ce triangle isocèle directement

---

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 8

Asie 18 mai 2022

Dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$ de l'espace, on considère les points

$\text{A}(-3\ ;\ 1\ ;\ 3)$,$\text{B}(2\ ;\ 2\ ;\ 3)$,$\text{C}(1\ ;\ 7\ ;\ -1)$,$\text{D}(-4\ ;\ 6\ ;\ -1)$ et $\text{K}(-3\ ;\ 14\ ;\ 14)$.

1. a. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\5\\-4\end{pmatrix}$.

b. D'après la question précédente, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme.
De plus le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 5\times(-1)+1\times5+0\times(-4) = 0$.
Le parallélogramme ABCD ayant deux côtés consécutifs perpendiculaires est un rectangle.

c. On a $AB^2 = 25+1 = 26$, d'où $AB = \sqrt{26}$;
de même $AD^2 = 1+25+16 = 42$, d'où $AD = \sqrt{42}$.
L'aire du rectangle ABCD est égale à
$AB\times AD = \sqrt{26}\times\sqrt{42} = \sqrt{26\times42} = \sqrt{2\times13\times2\times21} = 2\sqrt{13\times21} = 2\sqrt{273}$.

2. a. D'après la question 1., les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et D ne sont pas alignés : ils définissent donc bien un plan.

b. Soit le vecteur $\overrightarrow{n}(-2~;~10~;~13)$.
$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB} = -10+10+0 = 0$ et $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AD} = 2+50-52 = 0$.
Conclusion : le vecteur $\overrightarrow{n}$, orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABD), est normal à ce plan.

c. Le résultat précédent montre que le plan (ABD) a une équation de la forme $-2x+10y+13z = d$, avec $d\in\mathbb{R}$.
Or par exemple $B(2~;~2~;~3)\in(ABD)$ donc
$-2\times2+10\times2+13\times3 = d \iff -4+20+39 = d \iff d = 55$.
Donc le plan (ABD) a pour équation $-2x+10y+13z = 55$.

3. a. Si Δ est orthogonale au plan (ABD) elle a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{n}$. Comme elle contient K, on a donc :
$M(x~,~y~;~z)\in\Delta \iff \overrightarrow{KM} = t\overrightarrow{n},\quad t\in\mathbb{R}$.
Avec $\overrightarrow{KM}\begin{pmatrix}x-(-3)\\y-14\\z-14\end{pmatrix}$ ceci se traduit par le système :
$$\left\{\begin{array}{rcl}x+3 &=& -2t\\ y-14 &=& 10t\\ z-14 &=& 13t\end{array}\right.,t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{rcl}x &=& -2t-3\\ y &=& 10t+14\\ z &=& 13t+14\end{array}\right.,t\in\mathbb{R}$$

b. Si I est le projeté orthogonal de K sur le plan (ABD), le point I est un point de Δ ; comme c'est aussi un point de (ABD) ; ses coordonnées vérifient le système
$$\left\{\begin{array}{rcl}x &=& -2t-3\\ y &=& 10t+14\\ z &=& 13t+14\\ -2x+10y+13z &=& 55\end{array}\right.,t\in\mathbb{R}.$$
En remplaçant dans la dernière équation x, y et z par leurs expressions en fonction de t, on obtient :
$-2(-2t-3)+10(10t+14)+13(13t+14) = 55$
$\iff 4t+6+100t+140+169t+182 = 55 \iff 273t = -273 \iff t = -1$.
Les premières équations donnent alors
$x = 2-3 = -1,\quad y = -10+14 = 4$ et $z = -13+14 = 1$.
Le point I a donc pour coordonnées $(-1~;~4~;~1)$.

c. ABCD étant un rectangle le point D appartient au plan (ABD). Donc la hauteur de la pyramide KABCD de base ABCD est [KI].
$\overrightarrow{KI}\begin{pmatrix}2\\-10\\-13\end{pmatrix}$ donne $KI^2 = 4+100+169 = 273$ et enfin $KI = \sqrt{273}$.

4. On a $V = \dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}(ABCD)\times KI = \dfrac{1}{3}\times2\sqrt{273}\times\sqrt{273} = \dfrac{2\times273}{3} = \dfrac{2\times3\times91}{3} = 182$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 9

Centres Etrangers Groupe 1 - 18 mai 2022

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.
On considère les points A$(5\,;\,0\,;\,-1)$, B$(1\,;\,4\,;\,-1)$, C$(1;0;3)$, D$(5;4;3)$ et E$(10;9;8)$.

1. **a.** • On a R$(3\,;\,2\,;\,-1)$;

• $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}$.

b. Si $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}_1$ on sait qu'une équation de ce plan est : $-4x+4y+0z=d$, avec $d\in\mathbb{R}$.
Comme R$(3\,;\,2\,;\,-1)\in\mathscr{P}_1 \iff -12+8+0=d \iff d=-4$.
Donc $M(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathscr{P}_1 \iff -4x+4y=-4 \iff x-y-1=0$.

c. Démontrer que le point E appartient au plan $\mathscr{P}_1$ et que EA = EB. On a E$(10\,;\,9\,;\,8)\in\mathscr{P}_1 \iff 10-9-1=0$: cette égalité est vraie.

D'autre part $\overrightarrow{\mathrm{EA}}\begin{pmatrix}-5\\-9\\-9\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{EB}}\begin{pmatrix}-9\\-5\\-9\end{pmatrix}$.

On en déduit : $\mathrm{EA}^2=25+81+81=187$ et $\mathrm{EA}^2=81+25+81=187$.
$\mathrm{EA}^2=\mathrm{EB}^2\Rightarrow \mathrm{EA}=\mathrm{EB}$.

2. On considère le plan $\mathscr{P}_2$ d'équation cartésienne $x-z-2=0$.

a. On a vu que le plan $\mathscr{P}_1$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}$.

Le plan $\mathscr{P}_2$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, donc $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles, ils sont donc sécants.

b. Si $M(x\,;\,y;\,z)$ est commun aux deux plans ses coordonnées vérifient les équations des deux plans, donc le système :

$\left\{\begin{array}{rcl}x-y-1&=&0\\x-z-2&=&0\end{array}\right.$. En posant $z=t$ le système devient :

$$\left\{\begin{array}{rcl}x-y-1&=&0\\x-z-2&=&0\\z&=&t\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{rcl}x-1&=&y\\x&=&z+2\\z&=&t\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}x-1&=&y\\x&=&t+2\\z&=&t\end{array}\right.\iff$$

$$\left\{\begin{array}{rcl}t+2-1&=&y\\x&=&t+2\\z&=&t\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}y&=&t+1\\x&=&t+2\\z&=&t\end{array}\right.,\text{ avec } t\in\mathbb{R}.$$

Si $\Omega(x\,;\,y\,;\,z)$ est commun à la droite Δ et au plan $\mathscr{P}_3$ ses coordonnées vérifient l'équation du plan et les équations paramétriques de la droite, soit le système :

$\left\{\begin{array}{rcl}y&=&t+1\\x&=&t+2\\z&=&t\\y+z-3&=&0\end{array}\right.$. En remplaçant x, y, z par leurs expressions en fonction de t dans l'équation du plan on obtient :

$t+1+t-3=0 \iff 2t-2=0 \iff 2t=2 \iff t=1$.

On a donc $\Omega\,(3\,;\,2\,;\,1)$.

Si S et T sont deux points distincts de l'espace, on rappelle que l'ensemble des points M de l'espace tels que MS = MT est un plan, appelé plan médiateur du segment [ST]. On admet que les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont les plans médiateurs respectifs des segments [AB], [AC] et [AD].

3. **a.** Sans admettre que les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont les plans médiateurs respectifs des segments [AB], [AC] et [AD], on peut calculer :

$\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\Omega B}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\Omega C}\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\Omega D}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$.

On a donc $\Omega A^2 = 4+4+4 = 12, \Omega B^2 = 12, \Omega C^2 = 12, \Omega D^2 = 12$ et par conséquent :

$\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D = \sqrt{12} = \sqrt{4\times 3} = 2\sqrt{3}$.

b. Le résultat précédent montre que Ω est équidistant de A, B, C et D donc est le centre de la sphère de rayon $2\sqrt{3}$ contenant A, B, C et D.

Éléments de la correction de l'exercice 10

Amérique du Nord 18 mai 2022

1. **a.** Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$ ont pour coordonnées : $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{JL}\begin{pmatrix}-4\\-2\\-3\end{pmatrix}$.

Le produit scalaire de $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$: $\overrightarrow{JK}.\overrightarrow{JL} = (-1)\times(-4)+2\times(-2)+0\times(-3) = 4-4 = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$ sont orthogonaux donc le triangle JKL est rectangle en J.

b. $\mathcal{A}_{JKL} = \dfrac{JK\times JL}{2}$.

$JK = \left\|\overrightarrow{JK}\right\| = \sqrt{(-1)^2+2^2+0^2} = \sqrt{5}$ et $JL = \left\|\overrightarrow{JL}\right\| = \sqrt{(-4)^2+(-2)^2+(-3)^2} = \sqrt{29}$

Donc $\mathcal{A}_{JKL} = \dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{29}}{2} = \dfrac{\sqrt{145}}{2}$ cm².

c. Le triangle JKL est rectangle en J donc en appliquant la formule de la tangente, on obtient :

$\tan\left(\widehat{JKL}\right) = \dfrac{JL}{JK} = \dfrac{\sqrt{29}}{\sqrt{5}}$.

Donc $\widehat{JKL} = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{29}}{\sqrt{5}}\right) \approx 67{,}5°$

2. **a.** Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$ ne sont pas colinéaires : il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{JK} = k\times\overrightarrow{JL}$.

En effet le système $\left\{\begin{array}{lcl}-1 & = & k\times(-4)\\ 2 & = & k\times(-2)\\ 0 & = & k\times(-3)\end{array}\right.$ n'admet pas de solution.

$\left(\overrightarrow{JK}, \overrightarrow{JL}\right)$ est donc une base du plan (JKL).

Calculons :

$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{JK} = 6\times(-1)+3\times 2+(-10)\times 0 = 0$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{JL} = 6\times(-4)+3\times(-2)+(-10)\times(-3) = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal aux $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$. C'est donc un vecteur normal au plan (JKL).

b. Le plan (JKL) a pour équation cartésienne : $ax+by+cz+d=0$, où $(a\,;\,b\,;\,c)$ sont les cordonnées d'un vecteur normal au plan. En prenant comme vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}$, on obtient : (JKL) : $6x+3y-10z+d=0$.

Or $J \in$ (JKL) donc $12+0-10+d=0$ donc $d=-2$. Donc (JKL) a pour équation $6x+3y-10z-2=0$.

3. **a.** La droite Δ est normale au plan (JKL) donc admet comme vecteur directeur $\overrightarrow{n}$, normal à (JKL). elle passe par T(10 ; 9 ; −6) donc une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 10+6t \\ y &=& 9+3t \\ z &=& -6-10t \end{array}\right. ,t \in \mathbb{R}$$

b. Le projeté orthogonal H de T sur le plan (IJK) est l'unique point d'intersection de Δ et (IJK). Ses coordonnées sont les solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{l} x=10+6t \\ y=9+3t \\ z=-6-10t \\ 6x+3y-10z-2=0 \end{array}\right.$$

En remplaçant x, y et z dans la dernière équation, on obtient :

$6(10+6t)+3(9+3t)-10(-6-10t)-2=0 \iff 145t+145=0 \iff t=-1$

Donc $x=10+6\times(-1)=4$, $y=9+3\times(-1)=6$ et $z=-6-10\times(-1)=4$

H a pour coordonnées (4 ; 6 ; 4)

c. $\mathcal{V}_{JKLT}=\dfrac{1}{3}\mathcal{B}\times h$. La base est le triangle JKL et la hauteur est le segment $[TH]$. D'après les question précédentes :

$\overrightarrow{TH}\begin{pmatrix}-6\\-3\\10\end{pmatrix}$ donc $TH=\left\|\overrightarrow{TH}\right\|=\sqrt{(-6)^2+(-3)^2+10^2}=\sqrt{145}$

Donc $\mathcal{V}_{JKLT}=\dfrac{1}{3}\mathcal{B}_{JKL}\times TH=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{145}}{2}\times\sqrt{145}=\dfrac{145}{6}$ cm³.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 11

Centres Etrangers Groupe 1 - 19 mai 2022

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\overrightarrow{\text{AD}},\overrightarrow{\text{AE}}\right)$. Dans ce repère, les points notés ont pour coordonnées :

A(0 ; 0 ; 0), B(1 ; 0 ; 0), C(1 ; 1 ; 0), D(0 ; 1 ; 0), E(0 ; 0 ; 1), F(1 ; 0 ; 1), G(1 ; 1 ; 1) et H(0 ; 1 ; 1)

1. **a.** Les droites (AH) et (ED) sont les deux diagonales du carré ADHE. Ces diagonales sont perpendiculaires. Donc (AH)$\perp$(ED).

b. CDHG est un carré donc (GH) est perpendiculaire à (DH) ;

EFGH est un carré donc (GH) est perpendiculaire à (EH).

La droite (GH) perpendiculaire à deux droites sécantes du plan (EDH) est orthogonale à ce plan (EDH).

c. Nous savons d'une part, que les droites (ED) et (AH) sont perpendiculaires, et d'autre part que les droites (ED) et (HG) le sont aussi. De plus les droites (HG) et (AH) sont sécantes et non confondues, donc elles définissent deux direction distinctes du plan (AGH). Donc comme la droite (ED) est perpendiculaire à ces deux dernières droites, alors (ED) est perpendiculaire au plan (AGH)

2. $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{ED}$ est normal au plan (AGH).

Le plan (AGH) a pour équation cartésienne : $ax+by+cz+d=0$, où $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ sont les cordonnées d'un vecteur normal au plan. En prenant comme vecteur normal le vecteur $\vec{n}$, on obtient : (ART) : $0x+y-z+d=0$ soit $y-z+d=0$.

Or A ∈ (ART) donc $0-0+d=0$ donc $d=0$. Donc (AGH) a pour équation $y-z=0$.

3. **a.** $\overrightarrow{EL}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\1\\-1\end{pmatrix}$. La droite (EL) passant par E et de vecteur directeur $\overrightarrow{EL}$ a pour représentation cartésienne : $\left\{\begin{array}{lcl}x&=&0+\frac{2}{3}\times k\\y&=&0+1\times k\\z&=&1+(-1)\times k\end{array}\right.$, avec k soit $\left\{\begin{array}{lcl}x&=&\frac{2}{3}k\\y&=&k\\z&=&1-k\end{array}\right.$, avec $k\in\mathbb{R}$.

b. Les coordonnées du point d'intersection de (EL) et (AGH) sont les solutions du système : $\left\{\begin{array}{l}x=\frac{2}{3}k\\y=k\\z=1-k\\y-z=0\end{array}\right.$. En remplaçant y et z dans la troisième équation, nous obtenons :

$y-z=0 \iff k-(1-k)=0 \iff 2k-1=0 \iff k=\frac{1}{2}$.

Donc $x=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{2}$ et $z=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Les coordonnées du point d'intersection de (EL) et (AGH) sont : $\left(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

c. K appartient au plan (AGH) : en effet $y-z=0$.

De plus le vecteur $\overrightarrow{LK}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

On remarque alors que $\overrightarrow{LK}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{ED}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires, donc le vecteur $\overrightarrow{LK}$ est normal au plan (AGH). K est donc le projeté orthogonal du point L sur le plan (AGH).

d. La distance du point L au plan AGH est égale à la distance LK :

$\text{LK}=\left\|\overrightarrow{LK}\right\|=\sqrt{0^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ unité de longueur.

e. Une hauteur de LAGH est [LK]. La base correspondante est AGH, triangle rectangle en H. $\mathcal{V}_{\text{LAGH}}=\frac{1}{3}\times\mathcal{A}_{\text{AGH}}\times\text{LK}$ avec $\mathcal{A}_{\text{AGH}}=\frac{\text{AH}\times\text{HG}}{2}$.

De plus $\text{AH}=\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 1) et $\text{HG}=1$. Donc $\mathcal{A}_{\text{AGH}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ unité d'aire.

Donc $\mathcal{V}_{\text{LAGH}}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{6}$ unité de volume.

En utilisant le repère fourni $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$, les points notés ont pour coordonnées : $A(6\,;\,0\,;\,2)$, $B(6\,;\,0\,;\,0)$,$C(6\,;\,8\,;\,0)$, $D(0\,;\,8\,;\,0)$, $E(0\,;\,0\,;\,4)$, $F(6\,;\,0\,;\,4)$, $G(6\,;\,8\,;\,4)$, $H(0\,;\,8\,;\,4)$, $R(6\,;\,3\,;\,4)$, $T(3\,;\,0\,;\,4)$ et $S\left(3\,;\,\dfrac{5}{2}\,;\,0\right)$

1. **a.** Les vecteurs $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AT}$ ont pour coordonnées : $\overrightarrow{AR}\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AT}\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$.

$AR = \|\overrightarrow{AR}\| = \sqrt{0^2+3^2+2^2} = \sqrt{13}$ et $AT = \|\overrightarrow{AT}\| = \sqrt{(-3)^2+0^2+2^2} = \sqrt{13}$

$\|\overrightarrow{AR}\| = \|\overrightarrow{AR}\|$ donc le triangle ART est isocèle en A.

b. $\overrightarrow{AR}.\overrightarrow{AT} = 0\times(-3)+3\times0+2\times2 = 4$

c. Utilisons la formule du produit scalaire : $\overrightarrow{AR}.\overrightarrow{AT} = \left\|\overrightarrow{AR}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AT}\right\|\times\cos\left(\widehat{\text{RAT}}\right)$

donc $\cos\left(\widehat{\text{RAT}}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AR}.\overrightarrow{AR}}{\|\overrightarrow{AR}\|\times\|\overrightarrow{AT}\|} = \dfrac{4}{\sqrt{13}^2} = \dfrac{4}{13}$ donc $\widehat{RAT} = \arccos\left(\dfrac{4}{13}\right) \approx 72{,}1°$

2. **a.** Les vecteurs $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AT}$ ne sont pas colinéaires : il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{JK} = k\times\overrightarrow{JL}$.

En effet le système $\left\{\begin{array}{lcl}0&=&k\times(-3)\\3&=&k\times0\\2&=&k\times2\end{array}\right.$ n'admet pas de solution. Donc ils définissent une base du plan (ART). Calculons :

$\vec{n}.\overrightarrow{AR} = 2\times0+(-2)\times3+3\times2 = -6+6 = 0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{AT} = 2\times(-3)+(-2)\times0+3\times2 = -6+6 = 0$.

Donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{AR}$ et $\vec{n}\perp\overrightarrow{AT}$ donc $\vec{n}$ est normal à tout vecteur du plan (ART), donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ART).

b. Le plan (ART) a pour équation cartésienne : $ax+by+cz+d=0$, où $(a\,;\,b\,;\,c)$ sont les cordonnées d'un vecteur normal au plan. En prenant comme vecteur normal le vecteur $\vec{n}$, on obtient : $(ART) : 2x-2y+3z+d=0$.

Or $A\in$ (ART) donc $12-0+6+d=0$ donc $d=-18$.

Donc le plan (ART) a pour équation $2x-2y+3z-18=0$.

3. **a.** La droite Δ est orthogonale au plan (ART), donc elle admet comme vecteur directeur le vecteur $\vec{u}$, vecteur normal à ce plan. Elle passe par le point $S\left(3\,;\,\dfrac{5}{2}\,;\,0\right)$. Une représentation paramétrique de la droite Δ est donc :

$\left\{\begin{array}{lcl}x&=&3+2k\\y&=&\dfrac{5}{2}-2k\\z&=&0+3k\end{array}\right.$,$k\in\mathbb{R}$ soit $\left\{\begin{array}{lcl}x&=&3+2k\\y&=&\dfrac{5}{2}-2k\\z&=&3k\end{array}\right.$,avec $k\in\mathbb{R}$.

b. Les coordonnées du point L sont les uniques solutions du système :

$(S)\left\{\begin{array}{l}x=3+2k\\y=\dfrac{5}{2}-2k\\z=3k\\2x-2y+3z-18=0\end{array}\right.$ En remplaçant x, y et z dans la dernière équation, on obtient : $2x-2y+3z-18=0 \iff 2(3+2k)-2\left(\dfrac{5}{2}-2k\right)+3\times3k-18=0 \iff 17k-17=0 \iff k=1$

Donc $x=3+2k=5$, $y=\dfrac{5}{2}-2k=\dfrac{1}{2}$ et $z=3k=3$. Le point L a pour coordonnées $\left(5\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,3\right)$.

4. Le milieu K de $[EH]$ a donc pour coordonnées $(0\,;\,4\,;\,4)$. N a pour coordonnées $(0\,;\,8-4t\,;\,4t)$. Pour $t \in [0\,;\,1]$, les vecteurs $\overrightarrow{DK}$ et $\overrightarrow{ND}$ ont pour coordonnées : $\overrightarrow{DK}\begin{pmatrix}0\\-4\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DN}\begin{pmatrix}0\\-4\text{t}\\4\text{t}\end{pmatrix}$.

On remarque alors que $\overrightarrow{DN} = t \times \overrightarrow{DK}$. Les deux vecteurs sont donc colinéaires, donc les points D,K et N sont alignés.

Pour vérifier que N est un point du segment $[DK]$, montrons que $\overrightarrow{NK}.\overrightarrow{ND} \leqslant 0$:

$\overrightarrow{NK}\begin{pmatrix}0\\-4+4\text{t}\\4-4\text{t}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ND}\begin{pmatrix}0\\4\text{t}\\-4\text{t}\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{NK}.\overrightarrow{ND} = 0\times 0 + (-4+4t)\times 4t + (4-4t)\times(-4t) = 32t^2 - 32t = 32t(t-1)$.

$t \in [0\,;\,1]$ donc $32t(t-1) \leqslant 0$ donc N est un point du segment $[DK]$.

5. Les vecteurs $\overrightarrow{SL}$ et $\overrightarrow{SN}$ ont pour coordonnées : $\overrightarrow{SL}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SN}\begin{pmatrix}-3\\\dfrac{11}{2}-4t\\4t\end{pmatrix}$

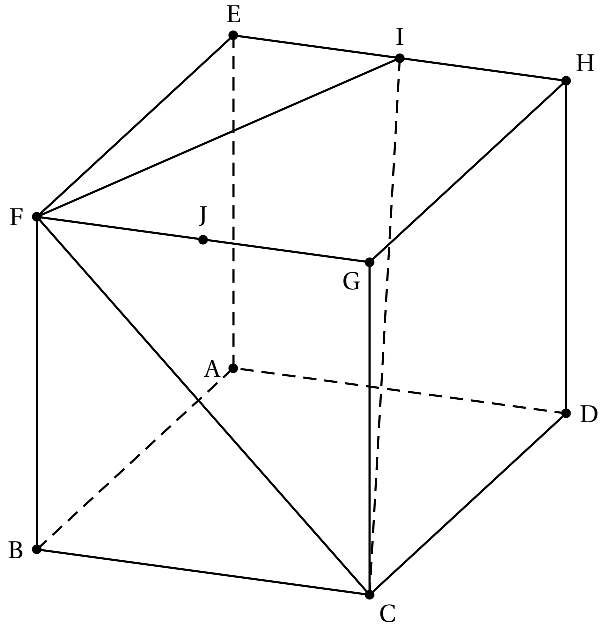
Les vecteurs $\overrightarrow{SL}$ et $\overrightarrow{SN}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{SL}.\overrightarrow{SN} = 0$.

$\overrightarrow{SL}.\overrightarrow{SN} = 0 \iff 2\times(-3) + (-2)\times\left(\dfrac{11}{2} - 4t\right) + 3\times 4t = 0 \iff 20t - 17 = 0 \iff t = \dfrac{17}{20}$. Le point N aura alors pour coordonnées : $N\left(0\,;\,8 - 4\times\dfrac{17}{20}\,;\,4\times\dfrac{17}{20}\right)$ soit $N\left(0\,;\,\dfrac{23}{5}\,;\,\dfrac{17}{5}\right)$

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 13

Polynésie 30 août 2022

On considère le cube ABCDEFGH. On note I le milieu du segment[EH] et on considère le triangle CFI. L'espace est muni du repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$ et on admet que le point I a pour coordonnées $\left(0\,;\,\dfrac{1}{2};\,1\right)$ dans ce repère.



1. **a.** Les coordonnées des points C, F et G sont : C$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, F$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et G$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

   b. Soit le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

   - $\overrightarrow{\text{CF}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{CF}} = 1\times 0 + 2\times(-1) + 2\times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{\text{CF}}$
   - $\overrightarrow{\text{CI}}\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{CI}} = 1\times(-1) + 2\times(-\frac{1}{2}) + 2\times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{\text{CI}}$
   - Les points C, F et I ne sont pas alignés donc ces trois points forment le plan (CFI) dont $\overrightarrow{\text{CF}}$ et $\overrightarrow{\text{CI}}$ sont deux vecteurs directeurs.

   Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (CFI) donc il est normal au plan (CFI).

   c. D'après la question précédente, le plan (CFI) a une équation de la forme $x+2y+2z+d=0$ où $d\in\mathbb{R}$.
   C $\in$ (CFI) donc $x_{\text{C}}+2y_{\text{C}}+2z_{\text{C}}+d=0$ soit $1+2\times 1+2\times 0+d=0$ donc $d=-3$.
   Une équation cartésienne du plan (CFI) est donc : $x+2y+2z-3=0$.

2. On note d la droite passant par G et orthogonale au plan (CFI).

   a. La droite d est orthogonale au plan (CFI) ; elle a donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ comme vecteur directeur. De plus elle passe par le point G. C'est donc l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ tels que $\overrightarrow{\text{GM}}$ et $\overrightarrow{n}$ soient colinéaires, c'est-à-dire tels que $\overrightarrow{\text{GM}} = t.\overrightarrow{n}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

   $$\overrightarrow{\text{GM}} = t.\overrightarrow{n} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& t\\ y-1 &=& 2t\\ z-1 &=& 2t\end{array}\right.$$

   La droite d a donc pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t\\ y &=& 1+2t\\ z &=& 1+2t\end{array}\right.$ avec $t\in\mathbb{R}$

   b. La droite d est orthogonale au plan (CFI) donc le projeté orthogonal K du point G de la droite d sur le plan (CFI), est le point d'intersection de d et de (CFI) ; donc ses coordonnées $(x\,;y\,;z)$ vérifient le système : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t \\ y &=& 1+2t \\ z &=& 1+2t \\ x+2y+2z-3 &=& 0 \end{array}\right.$

On a donc : $(1+t)+2(1+2t)+2(1+2t)-3=0$, ce qui donne :
$1+t+2+4t+2+4t-3=0$ soit $9t=-2$ donc $t=-\frac{2}{9}$.

$$\left\{\begin{array}{rclclcl} x &=& 1+t &=& 1-\frac{2}{9} &=& \frac{7}{9} \\ y &=& 1+2t &=& 1-2\times\frac{2}{9} &=& \frac{5}{9} \\ z &=& 1+2t &=& 1-2\times\frac{2}{9} &=& \frac{5}{9} \end{array}\right.$$

Donc le projeté orthogonal K du point G sur le plan (CFI) a pour coordonnées $\left(\dfrac{7}{9}\,;\dfrac{5}{9}\,;\dfrac{5}{9}\right)$.

c. La distance du point G au plan (CFI) est :

$$\text{GK}=\sqrt{(x_\text{K}-x_\text{G})^2+(y_\text{K}-y_\text{G})^2+(z_\text{K}-z_\text{G})^2}=\sqrt{\left(\frac{7}{9}-1\right)^2+\left(\frac{5}{9}-1\right)^2+\left(\frac{5}{9}-1\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(-\frac{2}{9}\right)^2+\left(-\frac{4}{9}\right)^2+\left(-\frac{4}{9}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{81}+\frac{16}{81}+\frac{16}{81}}=\sqrt{\frac{36}{81}}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$$

3. On considère la pyramide GCFI.

a. Si on considère que I est le sommet de la pyramide, la base en est le triangle GFC rectangle en G.
Le projeté orthogonal de I sur le plan (GFC) est le point J, milieu de [FG], et IJ $=1$ donc la hauteur h vaut 1.
Le triangle GFC a pour aire $\dfrac{\text{GF}\times\text{GC}}{2}=\dfrac{1}{2}$.
La pyramide GCFI a donc pour volume, en unité de volume : $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 1=\dfrac{1}{6}$.

b. Appelons $\mathscr{A}$ l'aire du triangle CFI.
Si on considère que G est le sommet de la pyramide, la base en est le triangle CFI d'aire $\mathscr{A}$.
Le projeté orthogonal de G sur le plan (CFI) est le point K, donc la hauteur h vaut GK soit $\dfrac{2}{3}$.
La pyramide GCFI a donc pour volume : $\dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2\mathscr{A}}{9}$.
Or le volume de la pyramide vaut $\dfrac{1}{6}$, donc $\dfrac{2\mathscr{A}}{9}=\dfrac{1}{6}$ donc $\mathscr{A}=\dfrac{9}{12}=\dfrac{3}{4}$.
L'aire du triangle CFI est, en unité d'aire, égale à $\dfrac{3}{4}$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 14

Métropole 8 septembre 2022

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, on considère les points

$$\text{A}(-1\,;\,-1\,;\,3),\qquad \text{B}(1\,;\,1\,;\,2),\qquad \text{C}(1\,;\,-1\,;\,7)$$

On considère également la droite Δ passant par les points D$(-1\,;\,6\,;\,8)$ et E$(11\,;\,-9\,;\,2)$.

1. **a.** Avec $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}12\\-15\\-6\end{pmatrix}$, on peut prendre comme vecteur directeur de Δ : $\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}4\\-5\\-2\end{pmatrix}$.

On a $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (DE) \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{DM} = t\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$, soit

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+1 &=& 4t\\ y-6 &=& -5t\\ z-8 &=& -2t\end{array}\right. \text{ avec } t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1+4t\\ y &=& 6-5t\\ z &=& 8-2t\end{array}\right. \text{ avec } t\in\mathbb{R}$$

b. La droite Δ' est parallèle à Δ donc elle a les mêmes vecteurs directeurs que Δ. De plus, elle passe par l'origine O du repère donc elle a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0+4t\\ y &=& 0-5t\\ z &=& 0-2t\end{array}\right. \text{ avec } t\in\mathbb{R} \text{ soit } \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4t\\ y &=& -5t\\ z &=& -2t\end{array}\right. \text{ avec } t\in\mathbb{R}$$

c. $F(1{,}36\,;\,-1{,}7\,;\,-0{,}7) \in \Delta' \iff \left\{\begin{array}{rcl} 1{,}36 &=& 4t\\ -1{,}7 &=& -5t\\ -0{,}7 &=& -2t\end{array}\right.$ avec $t\in\mathbb{R}$

Les deux premières équations donnent $t = 0{,}34$ et la dernière $t = 0{,}35$.
Donc $F \notin \Delta$.

2. **a.** On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$: ces deux vecteurs ne sont manifestement pas colinéaires, donc les trois points A, B et C définissent un plan.

b. On a $\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AB} = 8-10+2 = 0$;

De même $\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AC} = 8+0-8 = 0$.

Donc $\overrightarrow{DE}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) ; il est normal à ce plan.

c. D'après la question précédente on sait que :
$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (ABC) \iff 4x-5y-2z+d = 0$ avec $d\in\mathbb{R}$
Or $A(-1\,;\,-1\,;\,3) \in (ABC)$ donc $4\times(-1)-5\times(-1)-2\times 3+d = 0$ avec $d\in\mathbb{R}$, soit $-5+d = 0 \iff d = 5$.
Conclusion : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (ABC) \iff 4x-5y-2z+5 = 0$.

3. **a.** $G(7\,;\,-4\,;\,4) \in \Delta \iff \left\{\begin{array}{rcl} 7 &=& -1+4t\\ -4 &=& 6-5t\\ 4 &=& 8-2t\end{array}\right.$ avec $t\in\mathbb{R}$

Ces trois équations ont pour solution $t = 2$, donc $G(7\,;\,-4\,;\,4) \in \Delta$.

b. Le point H appartient à la droite Δ et au plan (ABC). Donc ses coordonnées x, y, z vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1+4t\\ y &=& 6-5t\\ z &=& 8-2t\\ 4x-5y-2z+5 &=& 0\end{array}\right. \text{ avec } t\in\mathbb{R}$$

En replaçant x, y, z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation, on obtient :

$4(-1+4t)-5(6-5t)-2(8-2t)+5 = 0 \iff -4+16t-30+25t-16+4t+5 = 0 \iff 45t-45 = 0 \iff 45t = 45 \iff t = 1$.

Les coordonnées de H sont donc $(-1+4\,;\,6-5\,;\,8-2)$ soit $H(3\,;\,1\,;\,6)$.

c. La distance du point G au plan (ABC) est donc égale à GH.
Or $GH^2 = (3-7)^2+(1+4)^2+(6-4)^2 = 16+25+4 = 45$, d'où
$GH = \sqrt{45} = \sqrt{9\times 5} = \sqrt{9}\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$.

4. **a.** D'après la question **2. a.**, on a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times 2+2\times 0+4\times(-1) = 4-4 = 0$: les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, donc les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires : le triangle ABC est rectangle en A.

b. En prenant comme base le triangle ABC, la hauteur correspondante est GH, donc :
$V = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{A}(\text{ABC}) \times \text{GH} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times \text{AB} \times \text{AC} \times \text{GH}$.
On a $\text{AB}^2 = 2^2 + 2^2 + (-1)^2 = 4 + 4 + 1 = 9$, donc $\text{AB} = 3$;
$\text{AC}^2 = 2^2 + 0^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$, donc $\text{AC} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$.
Donc $V = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} = 15$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 15

Métropole 9 septembre 2022

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, on considère :

- la droite $\mathscr{D}$ passant par le point A(2 ; 4 ; 0) et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$;
- la droite $\mathscr{D}'$ dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3\\ y &=& 3+t\\ z &=& 3+t\end{array}\right.,\ t \in \mathbb{R}$.

1. **a.** La droite $\mathscr{D}'$ a pour vecteur directeur $\vec{u'}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

b. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles.

c. La droite $\mathscr{D}$ est l'ensemble des points $\text{M}(x\,;y\,;z)$ tels que $\overrightarrow{\text{AM}}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires, c'est-à-dire $\overrightarrow{\text{AM}} = t.\vec{u}$ avec $t \in \mathbb{R}$, soit : $\left\{\begin{array}{rcl} x-2 &=& t\\ y-4 &=& 2t\\ z-0 &=& 0t\end{array}\right.,\ t \in \mathbb{R}$

La droite $\mathscr{D}$ a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+t\\ y &=& 4+2t\\ z &=& 0\end{array}\right.,\ t \in \mathbb{R}$

On admet dans la suite de cet exercice qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Cette droite Δ coupe chacune des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. On appellera M le point d'intersection de Δ et $\mathscr{D}$, et M′ le point d'intersection de Δ et $\mathscr{D}'$.
On se propose de déterminer la distance MM′ appelée « distance entre les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ».

2. Soit le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

- $\vec{v} \cdot \vec{u} = 2 \times 1 + (-1) \times 2 + 1 \times 0 = 0$ donc $\vec{v} \perp \vec{u}$.
- $\vec{v} \cdot \vec{u'} = 2 \times 0 + (-1) \times 1 + 1 \times 1 = 0$ donc $\vec{v} \perp \vec{u'}$.

Le vecteur $\vec{v}$ est donc orthogonal aux deux vecteurs directeurs de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, donc c'est un vecteur directeur de leur perpendiculaire commune Δ.

3. On note $\mathscr{P}$ le plan contenant les droites $\mathscr{D}$ et Δ, c'est-à-dire le plan passant par le point A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

a. Soit le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix}$.

- $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u} = 2\times 1+(-1)\times 2+(-5)\times 0 = 0$ donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{u}$.
- $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v} = 2\times 2+(-1)\times(-1)+(-5)\times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{v}$.

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan $\mathscr{P}$, donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

b. Le plan $\mathscr{P}$ est le plan ayant $\overrightarrow{n}$ comme vecteur normal et passant par A, donc c'est l'ensemble des points $\mathrm{P}(x\,;y\,;z)$ tels que $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{n}$.

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x-2\\y-4\\z\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{n}\iff\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{n}\iff(x-2)\times 2+(y-4)\times(-1)+z\times(-5)=0$$
$$\iff 2x-4-y+4-5z=0\iff 2x-y-5z=0$$

Donc une équation du plan $\mathscr{P}$ est : $2x-y-5z=0$.

c. On rappelle que M' est le point d'intersection des droites Δ et $\mathscr{D}'$.
Le plan $\mathscr{P}$ contient la droite Δ et M' est un point de la droite Δ ; donc M' est un point du plan $\mathscr{P}$. M' appartient à $\mathscr{D}'$ et à $\mathscr{P}$ donc M' est le point d'intersection de la droite $\mathscr{D}'$ et du plan $\mathscr{P}$.

Les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ de M' vérifient donc le système $\left\{\begin{array}{rcl}x&=&3\\y&=&3+t\\z&=&3+t\\2x-y-5z&=&0\end{array}\right.$

$2x-y-5z=0$ devient $2\times 3-(3+t)-5(3+t)=0$ soit $6-3-t-15-5t=0$ ou encore $-12=6t$ ce qui donne $t=-2$.
$x=3$; $y=3+t=3-2=1$ et $z=3+t=1$
Les coordonnées du point M' sont donc $(3\,;1\,;1)$.

4. **a.** La droite Δ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ et passe par le point M', donc elle a pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{rcl}x&=&3+2t'\\y&=&1-t'\\z&=&1+t'\end{array}\right.\quad t'\in\mathbb{R}$.

b. Le point M est le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et de Δ donc ses coordonnées $(x\,;y\,;z)$ sont solutions du système : $\left\{\begin{array}{rcl}x&=&2+t\\y&=&4+2t\\z&=&0\\x&=&3+2t'\\y&=&1-t'\\z&=&1+t'\end{array}\right.$

On a donc $\left\{\begin{array}{rcl}2+t&=&3+2t'\\4+2t&=&1-t'\\0&=&1+t'\end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{rcl}t&=&-1\\-1&=&t'\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{rcl}x&=&2+t\\y&=&4+2t\\z&=&0\end{array}\right.$ donc $\left\{\begin{array}{rcl}x&=&1\\y&=&2\\z&=&0\end{array}\right.$

Donc le point M a pour coordonnées $(1\,;2\,;0)$.

c. $\mathrm{MM}'=\sqrt{(x_{\mathrm{M}'}-x_{\mathrm{M}})^2+(y_{\mathrm{M}'}-y_{\mathrm{M}})^2+(z_{\mathrm{M}'}-z_{\mathrm{M}})^2}$
$=\sqrt{(3-1)^2+(1-2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$

5. On considère la droite d de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl}x&=&5t\\y&=&2+5t\\z&=&1+t\end{array}\right.$ avec $t\in\mathbb{R}$.

a. On cherche l'intersection de la droite d et du plan $\mathscr{P}$, et pour cela on résout le système : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 5t\\ y &=& 2+5t\\ z &=& 1+t\\ 2x-y-5z &=& 0\end{array}\right.$

On a donc $2\times(5t)-(2+5t)-5(1+t)=0$ soit $10t-2-5t-5-5t=0$ ou $0t=7$.

Le système n'a pas de solution donc la droite d est strictement parallèle à $\mathscr{P}$.

b. On note ℓ la distance d'un point N de la droite d au plan $\mathscr{P}$.

On veut exprimer le volume V du tétraèdre ANMM′ en fonction de ℓ.

$V=\dfrac{1}{3}\times B\times h$ où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

Les points A, M et M′ appartiennent au plan $\mathscr{P}$ donc le triangle AMM′ forme une base du tétraèdre dont la hauteur est la distance du point N au plan $\mathscr{P}$, c'est-à-dire ℓ.

La droite Δ est la perpendiculaire commune à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ donc $\mathscr{D}$ est perpendiculaire à Δ.

A appartient à $\mathscr{D}$, M est le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et de Δ, M′ appartient à Δ, et les droites $\mathscr{D}$ et Δ sont perpendiculaires. On peut en déduire que le triangle AMM′ est rectangle en M.

$$\begin{aligned}\text{AM} &= \sqrt{(x_{\text{M}}-x_{\text{A}})^2+(y_{\text{M}}-y_{\text{A}})^2+(z_{\text{M}}-z_{\text{A}})^2}\\ &= \sqrt{(1-2)^2+(2-4)^2+(0-0)^2}=\sqrt{5}\end{aligned}$$

L'aire de la base, c'est-à-dire AMM′ vaut $\dfrac{1}{2}\times\text{AM}\times\text{MM}'=\dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{6}}{2}=\dfrac{\sqrt{30}}{2}$.

Le volume du tétraèdre vaut donc $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{30}}{2}\times\ell=\dfrac{\ell\sqrt{30}}{6}$.

c. N_1 et N_2 sont deux points quelconques de la droite d.

La droite d est strictement parallèle au plan $\mathscr{P}$ donc les distances de N_1 et N_2 au plan $\mathscr{P}$ sont égales.

Les bases des tétraèdres $\text{AN}_1\text{MM}'$ et $\text{AN}_2\text{MM}'$ sont identiques (le triangle AMM′).

Donc les tétraèdres $\text{AN}_1\text{MM}'$ et $\text{AN}_2\text{MM}'$ ont le même volume.

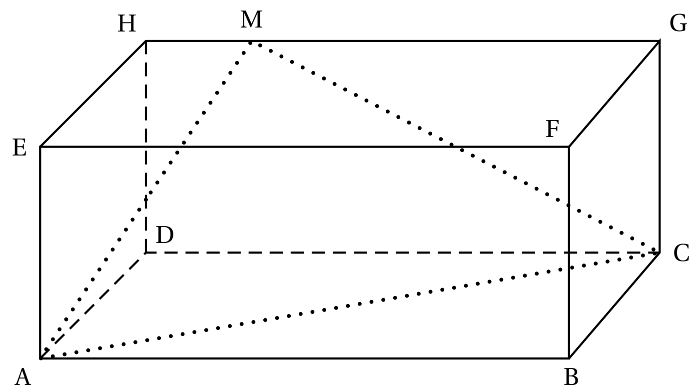
ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 16

Amérique du Sud 26 septembre 2022

Dans la figure ci-dessous, ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que
AB = 5, AD = 3 et AE = 2.

L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine A dans lequel les points B, D et E ont respectivement pour coordonnées $(5;0;0)$, $(0;3;0)$ et $(0;0;2)$.

Le repère est donc : $\left(\text{A}\,;\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\text{AB}},\ \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{AD}},\ \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.



1. **a.** $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc le point H a pour coordonnées $(0\,;3\,;2)$.
$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc le point G a pour coordonnées $(5\,;3\,;2)$.

   b. La droite (GH) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{HG}$ de coordonnées $(5\,;0\,;0)$.
De plus, elle passe par le point G donc elle a pour représentation paramétrique :
$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 5+5t \\ y &=& 3 \\ z &=& 2 \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

2. Soit M un point du segment [GH] tel que $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HG}$ avec k un nombre réel de l'intervalle $[0\,;\,1]$.

   a. $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HG} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_M - 0 &=& 5k \\ y_M - 3 &=& 0 \\ z_M - 2 &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_M &=& 5k \\ y_M &=& 3 \\ z_M &=& 2 \end{array}\right.$
Donc les coordonnées de M sont $(5k\,;\,3\,;\,2)$.

   b. Les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ sont celles de M donc : $(5k\,;\,3\,;\,2)$.
Les coordonnées de C sont $(5\,;3\,;0)$, donc celles de $\overrightarrow{CM}$ sont $(5k-5\,;3-3\,;2-0)$ soit $(5k-5\,;0\,;2)$.
$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CM} = 5k\times(5k-5)+3\times0+2\times2 = 25k^2-25k+4$

   c. Le triangle AMC est rectangle en M si et seulement si $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{CM}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CM}$ ou encore $25k^2-25k+4=0$.
On résout cette équation. $\Delta = (-25)^2-4\times25\times4 = 225 = 15^2$
L'équation admet deux solutions $k' = \dfrac{25+15}{2\times25} = \dfrac{40}{50} = \dfrac{4}{5}$ et $k'' = \dfrac{25-15}{2\times25} = \dfrac{10}{50} = \dfrac{1}{5}$
Donc pour $k = \dfrac{1}{5}$ ou $k = \dfrac{4}{5}$, le triangle AMC est rectangle en M.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère que le point M a pour coordonnées $(1\,;\,3\,;\,2)$.
On admet que le triangle AMC est rectangle en M.

3. On considère le point K de coordonnées $(1\,;\,3\,;\,0)$.

   a. Le plan (ACD) a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, donc il a pour équation cartésienne $z=0$.

   b. $z_K = 0$ donc le point K appartient au plan (ACD).
$\overrightarrow{MK}$ a pour coordonnées $(0\,;0\,;-2)$, donc
   - $\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ donc $\overrightarrow{MK} \perp \overrightarrow{AB}$;
   - $\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ donc $\overrightarrow{MK} \perp \overrightarrow{AC}$.

   On en déduit que $\overrightarrow{MK}$ est orthogonal au plan (ACD), et donc que K est le projeté orthogonal du point M sur le plan (ACD).

   c. Le volume du tétraèdre MACD est : $\dfrac{1}{3}\times$ Aire de ACD $\times$ MK.
$\overrightarrow{MK}$ a pour coordonnées $(0\,;0\,;-2)$, donc $MK = 2$.
Le triangle ACD est rectangle en D donc a pour aire $\dfrac{AD\times DC}{2} = \dfrac{3\times5}{2} = \dfrac{15}{2}$.
Le volume du tétraèdre MACD est donc, en unités de volume : $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{15}{2}\times2 = 5$.

4. On note P le projeté orthogonal du point D sur le plan (AMC).

Si on considère D comme sommet du tétraèdre MACD, la base est le triangle AMC, et la hauteur est DP.

Le triangle AMC est rectangle en M donc son aire est : $\dfrac{\text{AM} \times \text{MC}}{2}$.

$\text{AM} = \sqrt{(1-0)^2+(3-0)^2+(2-0)^2} = \sqrt{14}$

$\text{CM} = \sqrt{(1-5)^2+(3-3)^2+(2-0)^2} = \sqrt{20}$

L'aire de AMC vaut : $\dfrac{\sqrt{14} \times \sqrt{20}}{2} = \sqrt{70}$.

Le tétraèdre MACD a donc pour volume : $\dfrac{1}{3} \times \sqrt{70} \times \text{DP}$ soit : $\dfrac{\text{DP}\sqrt{70}}{3}$.

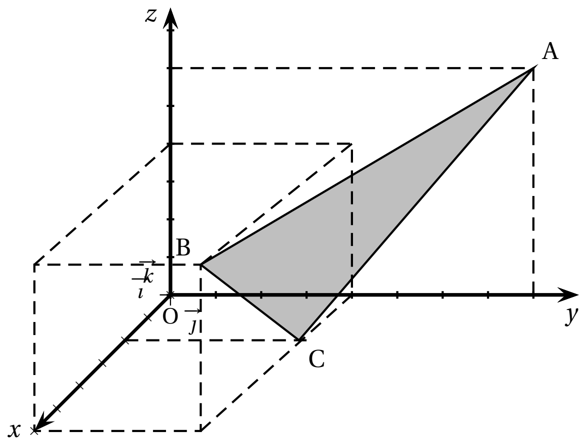
On sait que ce volume vaut 5, donc : $\dfrac{\text{DP}\sqrt{70}}{3} = 5$ donc : $\text{DP} = \dfrac{15}{\sqrt{70}} \approx 1{,}8$.

Éléments de la correction de l'exercice 17

Amérique du Sud 27 septembre 2022

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$, on considère les points

A(0 ; 8 ; 6), B(6 ; 4 ; 4) et C(2 ; 4 ; 0).



1. **a.** On a $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}6\\-4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}2\\-4\\-6\end{pmatrix}$: ces deux vecteurs ne sont manifestement pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. On a $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = 6-8+2 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = 2-8+6 = 0$.

Le vecteur $\vec{n}$ orthogonal à deux deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) est donc normal à ce plan.

c. $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{ABC}) \iff \overrightarrow{\text{AM}} \cdot \vec{n} = 0$.

Avec $\overrightarrow{\text{AM}}\begin{pmatrix}x-0\\y-8\\z-6\end{pmatrix}$, on a donc :

$\overrightarrow{\text{AM}} \cdot \vec{n} = 0 \iff x+2(y-8)-(z-6) = 0 \iff x+2y-z-16+6 = 0$.

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{ABC}) \iff x+2y-z-10 = 0$.

2. Soient D et E les points de coordonnées respectives $(0\,;0\,;6)$ et $(6\,;6\,;0)$.

a. Un vecteur directeur de la droite (DE) est le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{DE}}\begin{pmatrix}6\\6\\-6\end{pmatrix}$ ou plus simplement $\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{DE}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

D'où $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\mathrm{DE}) \iff$ il existe $t\in\mathbb{R}$: $\overrightarrow{\mathrm{D}M}=t\times\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{DE}}$.

Avec $\overrightarrow{\mathrm{D}M}\begin{pmatrix}x-0\\y-0\\z-6\end{pmatrix}$ et $\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{DE}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, on obtient :

$$\overrightarrow{\mathrm{D}M}=t\times\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{DE}} \iff \left\{\begin{array}{rcl}x&=&t\times1\\y&=&t\times1\\z-6&=&t\times(-1)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}x&=&t\\y&=&t\\z&=&6-t\end{array}\right.$$

b. On a $\mathrm{I}(4\,;4\,;2)$; ce point appartient bien à la droite (DE) car ces coordonnées correspondent à la valeur $t=4$.

3. On considère le triangle ABC.

a. On a $\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|^2=36+16+4=56$ d'où $\mathrm{AB}=\sqrt{56}$;
De même $\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\|^2=4+16+36=56$ d'où $\mathrm{AC}=\sqrt{56}$.
AB = AC donc ABC est un triangle isocèle en A.

b. I est le milieu de la base [BC] du triangle isocèle, donc (AI) est médiane et aussi hauteur du triangle. Son aire est donc égale à $\mathscr{A}(\mathrm{ABC})=\frac{\mathrm{AI}\times\mathrm{BC}}{2}$. Avec $\mathrm{I}(4\,;4\,;2)$:
$\mathrm{AI}^2=4^2+(-4)^2+(-4)^2=16+16+16=3\times16=16\times3$, d'où $\mathrm{AI}=\sqrt{16\times3}=\sqrt{16}\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.
$\mathrm{BC}^2=(-4)^2+0^2+(-4)^2=16+16=32$, d'où $\mathrm{BC}=\sqrt{32}=\sqrt{16\times2}=\sqrt{16}\times\sqrt{2}=4\sqrt{2}$.
Donc $\mathscr{A}(\mathrm{ABC})=\dfrac{4\sqrt{3}\times4\sqrt{2}}{2}=8\sqrt{6}$.

c. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=12+16+12=40$.

d. On a également $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\cos\widehat{\mathrm{BAC}}$.

On a donc $40=\sqrt{56}\times\sqrt{56}\times\cos\widehat{\mathrm{BAC}} \iff 40=56\times\cos\widehat{\mathrm{BAC}} \iff \cos\widehat{\mathrm{BAC}}=\dfrac{40}{56}=\dfrac{5}{7}$.

La calculatrice donne $\widehat{\mathrm{BAC}}\approx44{,}41$, soit $44{,}1°$ à 0,1 près.

4. On considère le point H de coordonnées $\left(\frac{5}{3}\,;\,\frac{10}{3}\,;\,\frac{5}{3}\right)$.
Montrer que H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).
En déduire la distance du point O au plan (ABC).
Si $\mathrm{K}(x\,;\,y\,;\,z)$ est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC) le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ orthogonal au plan est donc colinéaire au vecteur $\vec{n}$.

On a donc $\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\alpha\,\vec{n} \iff \left\{\begin{array}{rcl}x&=&\alpha\\y&=&2\alpha\\z&=&-\alpha\end{array}\right.$

Mais K appartient au plan (ABC) : ses coordonnées vérifient donc l'équation du plan ; on a donc :
$\mathrm{K}\in(\mathrm{ABC}) \iff \alpha+2\times2\alpha-(-\alpha)-10=0 \iff 6\alpha-10=0 \iff 6\alpha=10 \iff 3\alpha=5 \iff \alpha=\frac{5}{3}$.

Les coordonnées de K sont donc $\left(\frac{5}{3}\,;\,\frac{10}{3}\,;\,-\frac{5}{3}\right)$: ce sont bien celles de H !

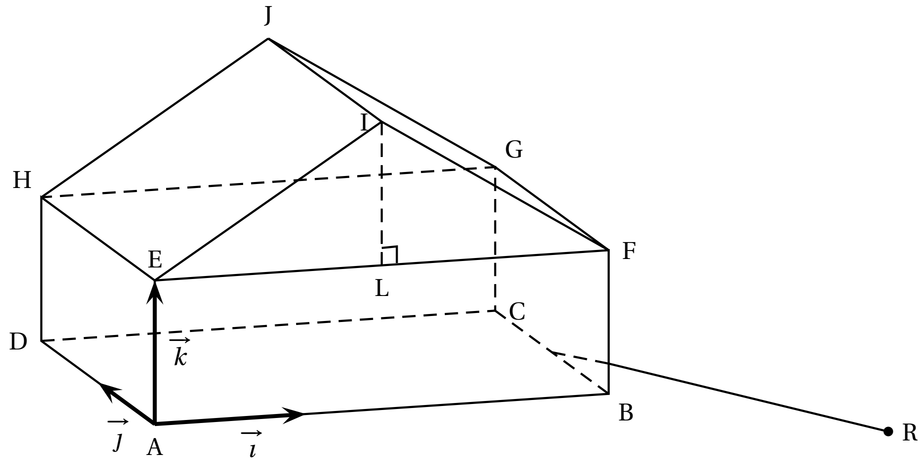
La distance de O au plan (ABC) est donc égale à OH.

$$\mathrm{OH}^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{10}{3}\right)^2+\left(-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}+\frac{100}{9}+\frac{25}{9}=\frac{150}{9}.$$

$$\text{Donc OH}=\sqrt{\frac{150}{9}}=\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{25\times6}}{3}=\frac{5\sqrt{6}}{3}.$$

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 18

Nouvelle-Calédonie 26 octobre 2022



1. On a $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$. Donc G(3; 2; 1).

2. On sait que $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{EHI}) \iff 2x + 0y - 3z = d$, avec $d \in \mathbb{R}$.
Ainsi, par exemple $\text{E}(0\,;\,0\,;\,1) \in (\text{EHI}) \iff 2\times 0 + 0\times 0 - 3\times 1 = d \iff d = -3$.
Donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{EHI}) \iff 2x - 3z = -3$

3. Puisque (EIF) est isocèle en I le projeté orthogonal de I sur [EF] est le milieu de [EF]; ces deux points ont donc la même abscisse qui est aussi celle du milieu de [AB] soit $\dfrac{3}{2}$.
L'ordonnée de I est aussi celle de E soit 0, enfin
$\text{I}\left(\dfrac{3}{2}\,;\,0\,;\,z\right) \in (\text{EHI}) \iff 2\times\dfrac{3}{2} - 3z = -3 \iff 3z = 3+3 \iff z = 2$. Donc $\text{I}\left(\dfrac{3}{2}\,;\,0\,;\,2\right)$.

4. • Avec le produit scalaire : avec E(0; 0; 1) et F(3; 0; 1), on a $\overrightarrow{\text{IE}}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{IF}}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\0\\-1\end{pmatrix}$, donc :

$\text{IE}^2 = \dfrac{9}{4} + 0 + 1 = \dfrac{13}{4}$, d'où $\text{IE} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$;
$\text{IF}^2 = \dfrac{9}{4} + 0 + 1 = \dfrac{13}{4}$, d'où $\text{IF} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$;
Donc $\overrightarrow{\text{IE}}\cdot\overrightarrow{\text{IF}} = \text{IE}\times\text{IF}\times\cos\left(\overrightarrow{\text{IF}}\,;\,\right)$, soit :
$-\dfrac{9}{4} + 0 + 1 = \dfrac{\sqrt{13}}{2}\times\dfrac{\sqrt{13}}{2}\times\cos\left(\overrightarrow{\text{IE}}\,;\,\overrightarrow{\text{IF}}\right) \iff \dfrac{-5}{4} = \dfrac{13}{4}\times\cos\left(\overrightarrow{\text{IE}}\,;\,\overrightarrow{\text{IF}}\right)$.

Finalement $\cos\left(\overrightarrow{\text{IE}}\,;\,\overrightarrow{\text{IF}}\right) = \dfrac{\frac{-5}{4}}{\frac{13}{4}} = -\dfrac{5}{13}$. La calculatrice donne $\left(\overrightarrow{\text{IE}}\,;\,\overrightarrow{\text{IF}}\right) \approx 112{,}6°$.

• Avec le triangle (IEL) rectangle en L (L projeté orthogonal de I sur (EF) :
On a $\text{L}\left(\dfrac{3}{2}\,;\,0\,;\,1\right)$, donc $\text{IL}^2 = 0 + 0 + 1^2 = 1$, d'où IL = 1;

On a vu que EI$=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$, d'où $\cos\left(\widehat{\text{EIL}}\right)=\dfrac{\text{IL}}{\text{IE}}=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{13}}{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$: la calculatrice donne $\left(\widehat{\text{EIL}}\right)\approx$ 56,30° ; donc $\widehat{\text{EIF}}=2\widehat{\text{EIL}}\approx 2\times 56{,}30$, soit finalement $\widehat{\text{EIF}}\approx 112{,}6°$.

5. **a.** On sait que $M(x\,;\,y\,;\,z)\in\Delta \iff \overrightarrow{\text{R}M}=t\vec{u} \iff \begin{cases} x-6 &= -3t\\ y+3 &= 4t\\ z+1 &= 1t\end{cases}, (t\in\mathbb{R}) \iff$

$\begin{cases} x &= 6-3t\\ y &= -3+4t\\ z &= -1+t\end{cases}, \quad (t\in\mathbb{R}).$

b. K$(x\,;\,y\,;\,z)$ est commun à Δ et au plan (BFG) si ses coordonnées vérifient les équations paramétriques de Δ et l'équation cartésienne du plan (BFG) soit si le triplet de réels $(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifie le système :

$\begin{cases} x &= 6-3t\\ y &= -3+4t\\ z &= -1+t\\ x &= 3\end{cases} \iff \begin{cases} 3 &= 6-3t\\ y &= -3+4t\\ z &= -1+t\\ x &= 3\end{cases} \iff \begin{cases} 3t &= 3\\ y &= -3+4t\\ z &= -1+t\\ x &= 3\end{cases} \iff$

$\begin{cases} t &= 1\\ y &= -3+4\\ z &= -1+1\\ x &= 3\end{cases} \iff \begin{cases} t &= 1\\ y &= 1\\ z &= 0\\ x &= 3\end{cases}$

Conclusion : K(3 ; 1 ; 0).

c. Avec B(3; 0; 0) et C(3; 2; 0) on remarque que les coordonnées de K sont les demi-sommes des coordonnées de B et de C, donc que K est le milieu du segment [BC].

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 19

Nouvelle-Calédonie 27 octobre 2022

Une maison est modélisée par un parallélépipède rectangle ABCDEFGH surmonté d'une pyramide EFGHS.

On a DC = 6, DA = DH = 4.

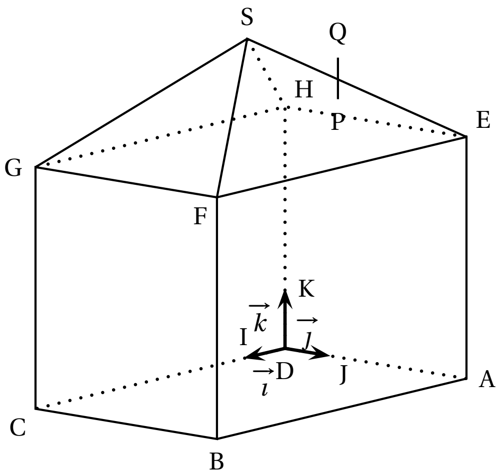
Soit les points I, J et K tels que

$\overrightarrow{\text{DI}}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{\text{DC}},\quad \overrightarrow{\text{DJ}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\text{DA}},\quad \overrightarrow{\text{DK}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\text{DH}}.$

On note $\vec{\imath}=\overrightarrow{\text{DI}}$, $\vec{\jmath}=\overrightarrow{\text{DJ}}$, $\vec{k}=\overrightarrow{\text{DK}}$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{D}\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

On admet que le point S a pour coordonnées (3; 2; 6).



1. B(6; 4; 0), E(0; 4; 4), F(6; 4; 4), G(6; 0; 4).

2. On a $\mathscr{A}(\text{EFGH}) = 6 \times 4 = 24$.
La hauteur de la pyramide est égale à $6 - 4 = 2$, donc :
$V(\text{EFGHS}) = \dfrac{1}{3} \times 24 \times 2 = 16$.
D'autre part $V(\text{ABCDEFGH}) = 6 \times 4 \times 4 = 96$.
Le volume de la maison est donc égal à $16 + 96 = 112$.
Or $\dfrac{V(\text{EFGHS})}{V(\text{maison})} = \dfrac{16}{112}\dfrac{4}{28} = \dfrac{1}{7}$.

3. **a.** On a $\overrightarrow{\text{EF}}\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{ES}}\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{\text{EF}} \cdot \overrightarrow{n} = 6 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 1 = 0$ et
$\overrightarrow{\text{ES}} \cdot \overrightarrow{n} = 3 \times 0 - 2 \times 1 + 2 \times 1 = 0$.
Le vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à deux vecteurs manifestement non colinéaires du plan (EFS) est donc normal à ce plan.

b. Le résultat précédent montre que :
$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{EFS}) \iff 0x + 1y + 1z = d, \quad d \in \mathbb{R}$.
Or, par exemple $\text{E}(0\,;\,4\,;\,4) \in (\text{EFS}) \iff 0 + 4 + 4 = d \iff d = 8$.
On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{EFS}) \iff y + z = 8$.

4. **a.** On a $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{PQ}) \iff \overrightarrow{\text{Q}M} = t\overrightarrow{k}, \quad (t \in \mathbb{R}) \iff \left\{\begin{array}{lcl} x-2 & = & 0t \\ y-3 & = & 0t \\ z-5,5 & = & 1t \end{array}\right. \iff$
$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 \\ y & = & 3 \\ z & = & 5,5+t \end{array}\right., \quad (t \in \mathbb{R})$.

b. Les coordonnées du point P vérifient les équations paramétriques de la droite (PQ) et du plan (EFS), donc du système :
$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 \\ y & = & 3 \\ z & = & 5,5+t \\ y+z & = & 8 \end{array}\right. \Rightarrow 3 + 5,5 + t = 8 \iff t = -0,5$.
Conclusion : $\text{P}(2\,;\,3\,;\,5)$.

c. On a $\text{PQ}^2 = (2-2)^2 + (3-3)^2 + (5,5-5)^2 = 0,25$, donc $\text{PQ} = 0,5$.

5. Δ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\delta}\begin{pmatrix}6\\-4\\4\end{pmatrix}$ et la droite (PQ) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$: ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles.
Elles sont sécantes s'il existe un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ dont les coordonnées vérifient les équations des deux droites soit le système :
$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 \\ y & = & 3 \\ z & = & 5,5+t \\ x & = & -4+6s \\ y & = & 7-4s \\ z & = & 2+4s \end{array}\right.$
On en déduit (équations 1 et 4) que $2 = -4 + 6s \iff 6 = 6s \iff s = 1$ et (équations 3 et 6) que $5,5 + t = 2 + 4 \iff t = 0,5$.
Il existe donc un point commun aux deux droites de coordonnées $(2\,;\,3\,;\,4)$

Reprenons les équations paramétriques de la droite (PQ) : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{PQ}) \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 \\ y & = & 3 \\ z & = & 5,5+t \end{array}\right., \quad (t \in \mathbb{R})$

L'abscisse et l'ordonnée de tous les points de cette droite sont fixes, seule la cote varie de 5 pour P (correspondant à $t = -0,5$ à 5,5 pour Q (correspondant à $t = 0$) ; autrement dit les points du segment vérifient le système :

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in [\mathrm{PQ}] \iff \left\{\begin{array}{l c l} x & = & 2\\ y & = & 3\\ z & = & 5{,}5+t \end{array}\right., \quad (-0{,}5 \leqslant t \leqslant 0).$$

Le point commun aux deux droites correspond lui à $t = 0{,}5$, donc n'appartient pas au segment [PQ] : autrement dit l'oiseau ne va pas percuter l'antenne représentée par le segment [PQ].