Rallye mathématique du Centre et du Congo

Épreuve officielle

Mars 2022

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.
Les solutions partielles seront examinées.

Exercice n°1 — Au bonheur des nombres

8 points

À un nombre entier positif donné on fait correspondre l'entier obtenu en prenant la somme des carrés de ses chiffres. On recommence cette procédure avec le nombre obtenu et ainsi de suite. Si l'on arrive à 1 en répétant une ou plusieurs fois le procédé, le nombre de départ est dit **heureux**.
Par exemple 13 est un nombre heureux car : $1^2+3^2 = 1 + 9 = 10$ et $1^2+0^2=1$.

1. Montrer que les nombres 7, 23 et 139 sont des nombres heureux.
2. Les nombres 4, 58, 529, 794 et 2022 sont-ils des nombres heureux ?
3. Établir la liste des nombres heureux inférieurs ou égaux à 100.

Exercice n°2 — Les cartes du chapeau

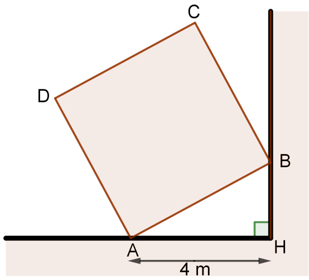
6 points

A l'intérieur d'un chapeau se trouvent 12 cartes numérotées de 1 à 12. Six amis Abel, Bérénice, Clémence, Dimitri, Ethan et Flora tirent chacun deux cartes sans les remettre et additionnent les nombres inscrits sur leurs cartes. Abel totalise 11 points, Bérénice 4 points, Clémence 16 points, Dimitri 7 points. Ethan a plus de points qu'Abel et Dimitri réunis alors que Flora a le plus grand nombre de points parmi tous ses amis.
Quelles sont les deux cartes de chacun ?

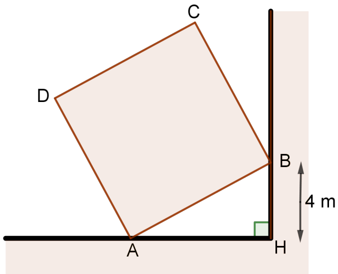
Exercice n°3 — Les cubes du musée

8 points

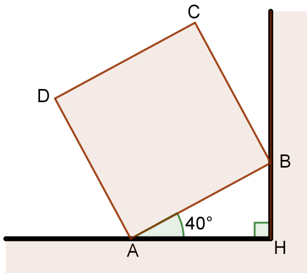
Lors d'une visite d'un musée d'art moderne en plein air, Maëlle et son amie Juliette observent 3 cubes géants de 5 m de côté, placés le long d'un mur. Elles se demandent à quelles hauteurs culminent ces cubes et lequel des trois est le plus haut.
En utilisant les informations indiquées sur les figures ci-dessous où ABCD est un carré, répondre à leurs interrogations et préciser comment on pourrait installer un autre cube identique pour qu'il culmine le plus haut possible ?



cube 1



cube 2



cube 3

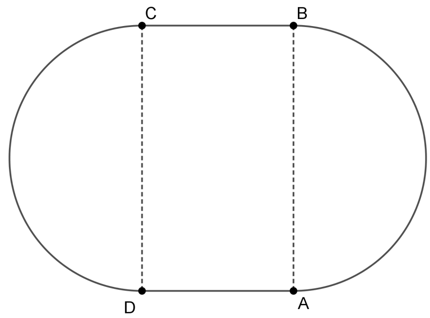
Exercice n°4 — Duel dans l'octogone

6 points

Arthur et Meddhi munis de casques VR jouent à un jeu de tir virtuel. Le jeu consiste à suivre un circuit constitué par une succession de salles. Sur le sol de chacune est dessiné un polygone régulier. Le dessin de la première salle est un carré, celui de la seconde un pentagone régulier, celui de la troisième un hexagone régulier etc.
Dans chaque salle, le joueur est placé automatiquement sur un des sommets, il tire alors successivement sur les cibles situées sur chacun des autres sommets du polygone puis se déplace sur le sommet suivant et fait de même jusqu'à revenir au sommet de départ. A ce moment il passe alors à la salle suivante.
Chaque tir nécessite au minimum 3 secondes, le déplacement d'un sommet adjacent à un autre demande 4 secondes, l'entrée dans la 1ère salle et ensuite chaque changement de salle demandent 5 secondes.

1. En réussissant tous ses tirs du 1er coup, Arthur prétend atteindre et achever la salle hexagonale en un peu moins de 4 minutes. Meddhi pense que ce n'est pas possible. Qui a raison ?
2. Quel temps depuis le début du jeu leur faudrait-il au minimum pour atteindre et achever la mission de la salle octogonale ?

Exercice n°5 — Myrtille et son sorbet de mûres



6 points

Myrtille a ramassé des mûres sauvages afin de préparer 1 kg de sorbet.
Pour cela elle mélange 3 ingrédients dans les proportions suivantes :
pour 110 g de purée de mûres, elle met 50 g de sucre et 40 g d'eau.
La purée de mûres s'obtient en écrasant les mûres puis en enlevant les grains.
On estime que dans les mûres les grains représentent 30% de la masse.

1. Quelle masse minimum de mûres doit-elle cueillir ? Donner la réponse au gramme près. Donner la masse de sucre et la masse d'eau nécessaires.
2. Elle met son sorbet dans une boîte de glace dont la base, dessinée ci-dessus est composée d'un rectangle et de deux demi-cercles. On donne AB = 11 cm et BC = 7,5 cm. La hauteur de glace dans la boite est de 6 cm.
   Elle veut servir son sorbet en faisant des boules de diamètre 5 cm. Combien de boules de sorbet peut-elle faire ?
   (Rappel : $V_{boule} = \dfrac{4}{3}\pi r^3$)

Exercice n°6 — A la recherche du code perdu

10 points

5	2		3
9		6	1
		4	
	8	0	7

Pour permettre de se connecter à son site, une banque a mis en place une grille de 16 cases (4×4) dans laquelle sont répartis aléatoirement les 10 chiffres. Chaque client de la banque possède un code secret d'accès au site à 6 chiffres (par exemple : 082022, 123456).
Pour se connecter, le client doit cliquer à l'aide de la souris sur les 6 chiffres qui composent son code secret dans l'ordre où ils sont écrits.

1. Lucas veut se connecter au site de la banque à l'aide de la grille donnée ci-dessus. Comme il est joueur, il propose à son amie Inès, friande d'énigmes, de découvrir son code en 3 essais.
   Il lui donne cependant les renseignements suivants :
   ∗ Les deux premiers chiffres sont différents et situés dans les cases autour du 0 (cases qui ont un côté commun avec celle du 0).
   ∗ Le 3ème chiffre est un nombre premier et le 4ème chiffre divise 9.
   ∗ Les deux derniers chiffres sont dans des cases de la grille qui se touchent uniquement par un sommet et ils forment un nombre premier.
   ∗ La somme de tous les chiffres du code est égale à 20.
   Quels sont tous les codes possibles déterminés par Inès et quelle est la probabilité qu'elle accède alors au site ?
2. Inès, amusée, lui fait remarquer que s'il complète la grille avec des chiffres de 1 à 8, tous différents, de telle sorte que la grille soit un carré magique (la somme des chiffres de chaque ligne, chaque colonne et des deux diagonales est la même) alors Lucas connaîtra le code secret de son amie en lisant les chiffres qui ont été ajoutés de la ligne du haut à la ligne du bas et de gauche à droite.
   Quel est le code secret de son amie Inès pour accéder à la banque ?

Exercice n°7 **Les mille et une glaces**

6 points

Une marchande de glaces propose quinze parfums différents pour ses glaces. Elle vend des cornets de une, deux, trois ou quatre boules. Les boules de chaque cornet doivent être de parfums différents.

1. Pierre, Anaïs et Nora évaluent leurs possibilités de choix différents avant d'acheter un cornet à deux boules.
   Pierre dit : « Puisqu'il y a quinze choix et deux boules, il a $15 \times 2 = 30$ possibilités. »
   Anaïs le reprend : « Non ! Tu as quinze possibilités pour chaque boule donc tu as $15 \times 15 = 225$ possibilités. »
   Nora la reprend à son tour : « Tu oublies que chacune des boules a un parfum différent de l'autre. Tu as donc $15 \times 14 = 210$ possibilités. »
   La marchande qui les a écoutés leur dit : « Aucun de vous n'a raison ! »
   Expliquer pourquoi les trois amis ont tort et donner le bon nombre de possibilités de cornets.
2. Adam arrive et désire un cornet à trois boules. Combien a-t-il de possibilités de choix différents ?
3. La marchande voudrait appeler sa boutique « Les mille et une glaces... et quelques unes en plus. »
   Aura-t-elle assez de choix pour justifier ceci en ne vendant que des cornets de une, deux, trois ou quatre boules ?
   Les boules de chaque cornet étant de parfums différents.