Rallye mathématique du Centre

Correction de l'épreuve préparatoire décembre 2021

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.
Les solutions partielles seront examinées.
Bon courage et rendez-vous le 8 mars pour l'épreuve officielle.

Exercice n°1 — Gare à la « Catcher car »

6 points

1. A 15 h 30 soit 2 h 30 après le départ des coureurs la voiture a roulé pendant 2h.
   La première heure elle a parcouru 15 km et la deuxième heure elle a parcouru 16 km.
   Donc à 15 h 30 , la voiture a parcouru 31 km.
2.

	A 14h30	A 15h00	A 15h30
distance parcourue par le coureur (en km)	12,5×1,5=18,75	12,5×2=25	12,5×2,5=31,25
distance parcourue par la voiture (en km)	15	15+16/2=23	15+16=31

A 15 h 30 le coureur a encore 250 m d'avance. Donc il a été rattrapé après 15 h 30.
On appelle t la durée écoulée entre 15 h 30 et le moment où le coureur est rattrapé.

17×t=12,5×t+ 0,25 d'où 4,5 × t= 0,25

Ainsi t=$\dfrac{0,25}{4,5} = \dfrac{1}{18}h$ soit 200 secondes.

Le coureur a été rattrapé à 15 h 33 min 20 s.

3.

	A 16 h 30	A 17 h 30	A 18 h 30
distance parcourue par la voiture (en km)	31+17=48	48 + 20 = 68	68 + 20 = 88

Il reste à trouver la durée mise par la voiture pour parcourir 0,44 km en roulant à 35 km/h.

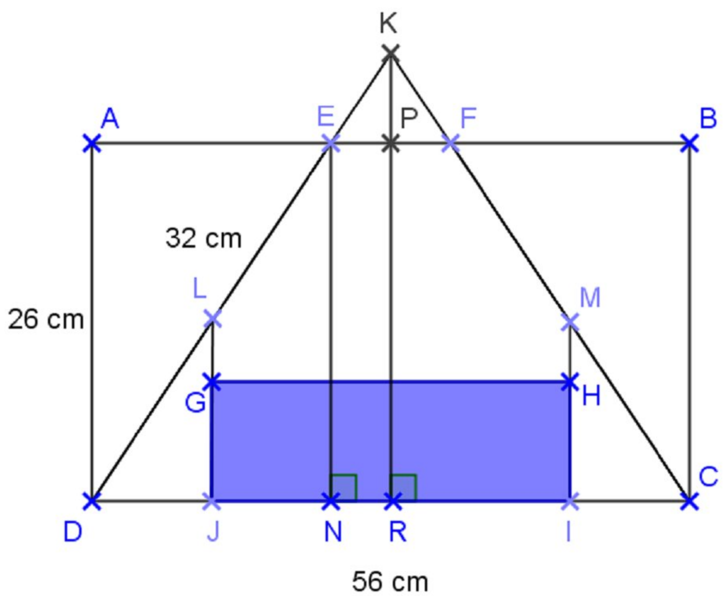
t=$\dfrac{d}{v} = \dfrac{0,44}{35} = \dfrac{11}{875}h$ soit environ 45 s.

La voiture a rattrapé le coureur à 18 h 30 min 45 s.

Exercice n°2 — Casier judicieux

8 points

Il suffit de regarder si le casier rentre par le côté qui mesure 30 cm car s'il ne rentre pas par ce côté, il ne rentrera pas par le côté qui mesure 45 cm.



• <u>1^e méthode</u>

On calcule JL et on regarde si c'est plus grand ou plus petit que 17 cm ce qui correspond à la hauteur du casier.

On applique le théorème de Thalès dans le triangle DEN avec (LJ) // (EN) et on a $\dfrac{LJ}{EN} = \dfrac{DJ}{DN}$.
On sait que EN = 26 cm.
On calcule DN en utilisant la relation de Pythagore dans le triangle ADN rectangle en N.

On trouve DN = 2 $\sqrt{87}$ cm ≈ 18,7 cm.
IJ = 30 cm donc DJ = $\dfrac{56cm}{2}$ - $\dfrac{30cm}{2}$ = 13 cm
Donc $\dfrac{LJ}{26} = \dfrac{13}{18,7}$ donc LJ ≈ 18,1 cm .
Donc le casier rentre.

• <u>2de méthode</u>

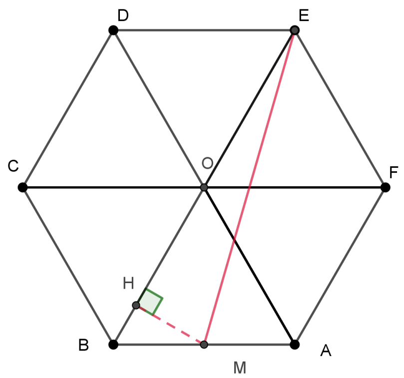
On suppose que LJ mesure 17 cm, on calcule DJ puis on en déduit IJ. Si le segment [IJ] mesure plus de 30cm, le casier rentre.
Dans le triangle DEN rectangle en N : $\sin \widehat{EDN} = \dfrac{EN}{DE} = \dfrac{26}{32}$ donc $\widehat{EDN} \approx 54°$.

Dans le triangle rectangle DLJ rectangle en J : $\tan \widehat{LDJ} = \dfrac{LJ}{DJ}$ donc DJ = $\dfrac{17cm}{\tan 54} \approx$ 12,4 cm
Donc IJ ≈ 56 cm - 2 × 12,4 cm = 31,3 cm
Donc le casier rentre.

Exercice n°3 Un tour manqué

8 points

En partant du sommet E, après avoir longé le parc sur 10 km, je suis au milieu du segment [AB] (ou [CB] suivant le sens de parcours). Le chemin de retour est le segment [ME]. Soit H le pied de la perpendiculaire à (EB) passant M.
OBA étant un triangle équilatéral on a $\widehat{OBM}$=60°.



Ainsi BHM est un triangle rectangle en H tel que BM =2 et $\widehat{HBM}$=60°.
Or $\cos\widehat{HBM} = \dfrac{HB}{BM}$
d'où $\dfrac{1}{2} = \dfrac{BH}{2}$ soit BH = 1.
On en déduit EH = EB - BH = 8 - 1 = 7.

Il en résulte en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle BHM :
$BM^2 = BH^2 + HM^2$
$HM^2 = 2^2 - 1^2 =$ soit $HM = \sqrt{3}$

Puis dans le triangle rectangle EHM :
$ME^2 = HE^2 + HM^2$
$ME^2 = 7^2 + 3 = 52$ soit $ME = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

A un mètre près, il reste donc à parcourir 7211 mètres.

Exercice n°4 — Du rouge au vert

5 points

Stratégie : on cherche pour avant-dernier coup à obtenir 3 rouges en équerre, le reste étant vert.

1. Le niveau 1 se joue sur un rectangle composé de 4 cases. Par raison de symétrie on peut commencer en a.
   Solutions en 4 coups : [a→ d→ b→ c]
   et aussi [a→ d→ c→ b]
   Les solutions en 3 coups partant de a échouent toutes. Le minimum de coups est 4.
2. Le niveau 2 se joue sur un rectangle composé de 9 cases.
   Avec la stratégie décrite, on trouve des solutions en 5 coups :
   ∗ En partant d'un coin : [a→ c→ e→ g→ i]
   ∗ En partant du centre : [e→ a→ c→ i→ g]

Exercice n°5 — Les récalcitrants

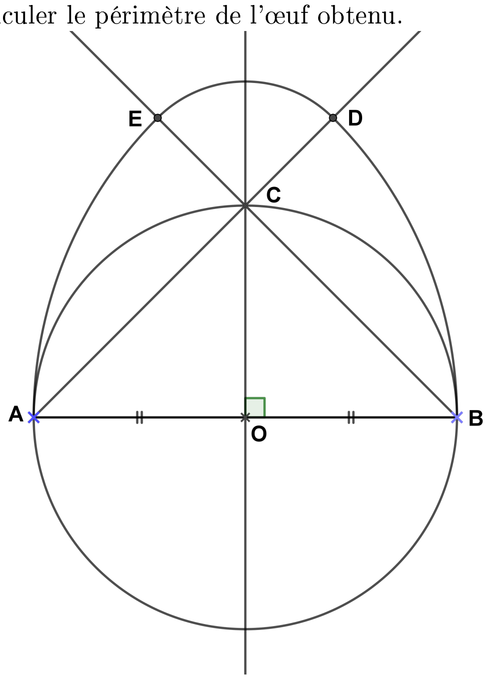
8 points

1. On aboutit très rapidement à un nombre récalcitrant.
2. Les chiffres récalcitrants sont : 0 ; 1 ; 5 ; 6.
   Il y a 48 nombres récalcitrants :
   100-101-105-106-110-111-115-116-150-151-155-156-160-161-165-166 -500-501-505-506-510-511-515-516-550-551-555-556-560-561-565-566 -600-601-605-606-610-611-615-616-650-651-655-656-660-661-665-666.
3. On raye au fur et à mesure les récalcitrants.
   Etape 0 : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
   Etape 1 : ~~0~~ ~~1~~ 4 9 6 ~~5~~ 6 9 4 1
   Etape 2 : 6 1 ~~6~~ 1 6 ~~1~~
   Etape 3 : ~~6~~ ~~1~~ ~~1~~ ~~6~~
   Si le nombres n'est pas récalcitrant à la fin de l'étape 2 il n'est composé que de chiffres récalcitrants ou de 4 et de 9. On aboutit en 3 étapes au maximum à un nombre récalcitrant.

Exercice n°6 — Faites l'œuf !

8 points

Construire un cercle de diamètre AB (on prendra AB = 14 cm). La médiatrice de [AB] coupe le cercle en deux points, on nomme C un de ces deux points.
Le cercle de centre A et de rayon AB coupe la demi-droite [AC) au point D. Le cercle de centre B et de rayon BA coupe la demi-droite [BC) au point E.
En couleur, tracer les arcs de cercle $\widehat{AE}$ et $\widehat{BD}$ de centres respectifs A et B, ainsi que l'arc de cercle $\widehat{ED}$ de centre C et de rayon CD. Puis, repasser en couleur le demi-cercle de diamètre [AB] ne contenant pas le point C.
Calculer le périmètre de l'œuf obtenu.



Longueur L_1 du demi-cercle de rayon 7cm :
Longueur L_1 du demi-cercle de rayon 7cm :
$L_1 = \dfrac{1}{2} \times 2 \times \pi R = \dfrac{1}{2} \times 2 \times \pi \times 7cm = 7\pi cm \approx 21,99cm$
Longueur L_2 de l'arc de cercle $\widehat{AE}$:
On appelle O le milieu de [AB].
Le triangle OBC est un triangle isocèle en O. Donc ses angles aigus mesurent 45°. L'angle $\widehat{ABC}$ mesure 45°.
Donc la longueur de l'arc de ceercle $\widehat{AE}$ est égale à $\dfrac{1}{8}$ de la longueur d'un cercle de rayon 14cm.
Donc $L_2 = \dfrac{1}{8} \times 2 \times \pi \times 14 = 3,5\pi cm \approx 11cm$

Longueur L_3 de l'arc de cercle $\widehat{BD}$:
DE même que pour L_2 , on : $L_3 = 3,5\pi cm \approx 11cm$

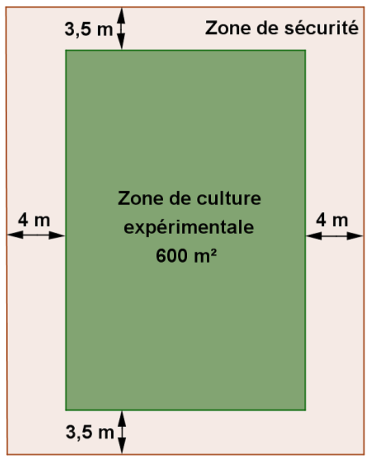
Longueur L_4 de l'arc de cercle $\widehat{ED}$:
Le rayon du cercle de centre C passant par D et E est égale à 14 - CB cm.
Or d'après le théorème de Pythagore dans triangle OCB rectangle en O on a :

$CB^2 = 7^2 + 7^2 = 98$ donc $CB = \sqrt{98}cm \approx 9,90$ cm
Donc le rayon du cercle de centre C passant par D et E est égale à environ 14 cm - 9,9 cm c'est dire 4,1 cm.
L'angle $\widehat{ECD}$ est égale à l'angle $\widehat{ACB}$ donc il est égale à 2×45 c'est à dire 90°.
Donc la longueur de l'arc $\widehat{ED}$ est égale au quart de la longueur d'un cercle de rayon 4,1 cm.
Donc $L_4 = \dfrac{1}{4} \times 2 \times \pi \times 4,1cm \approx 6,44cm$

Périmètre de l'œuf :
$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 21,99cm + 11cm + 11cm + 6,44cm \approx 50,4cm$
Périmètre exact de l'œuf :
$7\pi + 3,5\pi + 3,5\pi + \frac{1}{4} \times 2 \times \pi \times (14 - \sqrt{98}) = 14\pi + (\dfrac{14 - 7\sqrt{2}}{2})\pi = 7\pi(3 - \dfrac{\sqrt{2}}{2})cm$

Exercice n°7 A la recherche du blé pas cher !

8 points



Soit x la "largeur" du terrain et y sa "longueur".

L'aire de la zone de culture étant de 600 m^2, on obtient :

$(x-8)(y-7) = 600$ avec $x > 8$ et $y > 7$
d'où $y = 7 + \dfrac{600}{x-8}$

Soit A l'aire du terrain acheté : $A(x) = xy = x(7 + \dfrac{600}{x-8}) = \dfrac{7x^2 + 544x}{x-8}$

A l'aide d'un tableur, d'une calculatrice, d'un logiciel traceur-grapheur ...
on détermine que l'aire A est minimale lorsque $x \approx 34{,}2$ m d'où $y \approx 29{,}9$ m.

Exercice n°8 — Argh ! Tu parles...

6 points

1. Phrase d'un cri :« argh », « irgh » et « orgh »
   Phrases de deux cris :
   « argh argh », « argh irgh » ,« argh orgh »
   « irgh argh »,« irgh irgh »,« irgh orgh »
   « orgh argh »,« orgh orgh »,« orgh orgh »

   $3 + 3^2 + 3^3 = 39$
2. $4 + 4^2 + 4^3 = 84$
3. Des phrases d'au plus 15 cris suffisent :

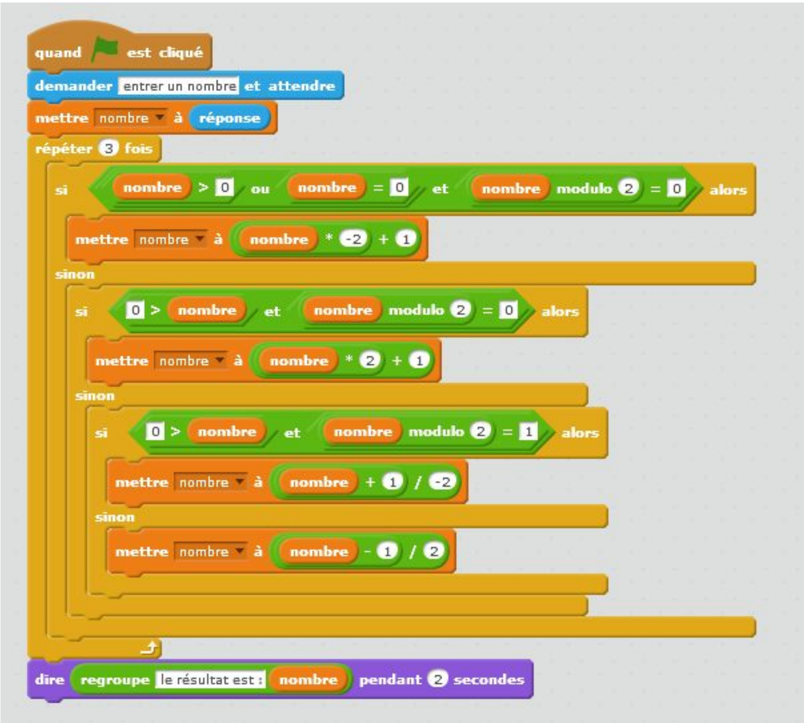
	A	B
1	Taille phrase	Nombre de phrases
2	3	84
3	4	340
4	5	1364
5	6	5460
6	7	21844
7	8	87380
8	9	349524
9	10	1398100
10	11	5592404
11	12	22369620
12	13	89478484
13	14	357913940
14	15	1431655764

Exercice Informatique-Algorithmique   Un, deux, trois p'tits tours

12 points

1.
   - $n = 0$ $\rightarrow$ $\boxed{n = 1}$ $\rightarrow$ $\boxed{n = 0}$ $\rightarrow$ $\boxed{n = 1}$
   - $n = -1$ $\rightarrow$ $\boxed{n = 0}$ $\rightarrow$ $\boxed{n = 1}$ $\rightarrow$ $\boxed{n = 0}$
   - $n = 14$ $\rightarrow$ $\boxed{n = -27}$ $\rightarrow$ $\boxed{n = 13}$ $\rightarrow$ $\boxed{n = 6}$
   - $n = -16$ $\rightarrow$ $\boxed{n = -31}$ $\rightarrow$ $\boxed{n = 15}$ $\rightarrow$ $\boxed{n = 7}$
   - $n = 2011$ $\rightarrow$ $\boxed{n = 1005}$ $\rightarrow$ $\boxed{n = 502}$ $\rightarrow$ $\boxed{n = -1003}$

2.




```
x=eval(input())
for i in range(3):
    y=x%2
    if y==0 and x>=0:
        x=-2*x+1
    elif y==0 and x<0:
        x=2*x+1
    elif y==1 and x>0:
        x=(x-1)/2
    else :
        x=(x+1)/(-2)
print(x)
```

3. Si l'on fait fonctionner ce programme avec un entier pair supérieur ou égal à 2 , on obtient la moitié du nombre moins 1.
4. Les nombres qui donnent 2021 comme affichage final sont : 16175, -16175, 4044, -4044, 4045 et -4045.