# Rallye mathématique du Centre

## Éléments de correction de l'épreuve officielle 2022

**Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.**
**Les solutions partielles seront examinées.**

### Exercice n°1 — Au bonheur des nombres

**8 points**

1. 7 -> $7^2$ =49 -> $4^2+9^2$= 97 -> $9^2+7^2$=130 -> $1^2+3^2+0^2$=10 -> $1^2+0^2$=1 donc 7 est **heureux**.
   23 -> 13 -> 10 -> 1 donc 23 est **heureux**.
   139 -> 91 -> 82 -> 68 -> 100 -> 1 donc 139 est **heureux**.

2. 4 -> 16 -> 37 -> 58 -> 89 -> 145 -> 42 -> 20 -> 4 donc **non heureux**.
   58 n'est **pas heureux** car 58 est dans la série ci-dessus.
   529 -> 110 -> 2 -> 4 donc **non heureux** comme ci-dessus.
   794 -> 146 -> 53 -> 34 -> 25 -> 29 -> 85 -> 89 donc **non heureux** aussi.
   2022 -> 12 -> 5 -> 25 donc **non heureux**.

3. Liste des nombres **heureux** inférieurs ou égaux à 100.
   Nous pouvons utiliser un algorithme de crible en procédant de la façon suivante : on remarque que lorsque a et b sont deux chiffres tels que ab soit heureux (resp. non heureux) il en est de même de ba ; de plus, si dans une suite construite selon la procédure il existe un nombre heureux, tous les termes de la suite sont heureux ; il en va de même pour les nombres non heureux.
   On va donc commencer par 1 et mettre à part 1, 10 et 100 qui sont heureux. On les range dans la classe des nombres heureux.
   On part de 2 ensuite pour écrire la suite suivante :
   2 -> 4 -> 16 -> 37 -> 58 -> 89 -> 145 -> 42 -> 20 -> 4
   d'où l'on tire que 2, 4, 16, 20, 24, 37, 42, 58, 61, 73, 85, 89 et 98 ne sont pas heureux. On les range dans cette classe et on les barre.
   On part ensuite du plus petit des nombres non encore étudiés : 3 -> 9 -> 81 -> 65 -> 61 -> 37 tous non heureux comme 37 et donc 3, 9, 16, 18, 56, 61, 65 et 81 sont classés dans les non heureux.
   On itère le procédé en passant à 5 (car 4 est classé !) :
   5 -> 25 -> 29 -> 85 qui ajoute 5, 25, 29, 52 et 92 aux non heureux.
   Ensuite : 6 -> 36 -> 45 -> 41 -> 17 -> 50 -> 25 qui ajoute 6, 14, 17, 36, 41, 45, 50, 54, 63 et 71 aux non heureux.
   On retrouve des nombres heureux avec 7 :
   7 -> 49 -> 97 -> 130 -> 10 qui classe 7, 49, 79, 94 et 97 dans les nombres heureux.
   On poursuit avec les suites obtenues en prenant pour premiers termes 8, 11, 12, 13, 15, 17, 19, 22, 23, 27, 33, 38, 39, 44, 47, 48, 55, 57, 59, 66, 67, 69, 77, 78, 88 et 99 ce qui permet de couvrir tous les nombres de 1 à 100. Seuls 13, 19, 23 et 44 fournissent des suites de nombres heureux.

   Par cette méthode on obtient comme ensemble des nombres **heureux** compris entre 1 et 100 les 20 nombres suivants :
   1, 7, 10, 13, 19, 23, 28, 31, 32, 44, 49, 68, 70, 79, 82, 86, 91, 94, 97 et 100.

   NB : on peut signaler que l'étude de 1 et celles de 7 et 23 traitées dans la question 1 fournissent en fait 12 des solutions sur 20 ! On peut même y ajouter 70 lié directement à 7 ! Seuls 19 et 44 au départ ajoute des nombres heureux et la méthode de crible permet d'éliminer tous les autres cas. En effet le nombre 1 est heureux (donc 10 et 100 aussi), le nombre 13 est heureux car dans la file de début 23, le nombre 23 a été montré heureux et le nombre 19 est heureux car 91 est dans la file de début 139 qui est heureux...
   Seul 44 ne peut être atteint grâce à l'usage de la question n°1...
   La méthode de crible permet surtout de s'assurer qu'il n'y a pas d'autres nombres heureux !

## Exercice n°2 — Les cartes du chapeau

**5 points**

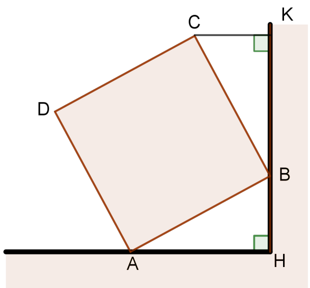
On nomme A, B, C, D, E et F les nombres de points de chacun des 6 amis.
On raisonne sur les cartes possibles pour chacun.
Il vient alors A=11, B=4, C=16, D=7, E > 11+7 soit E>18 donc F>19.

La seule possibilité est **B = 1 + 3**.
Donc D = 1 + 6 et D = 3 + 4 sont impossibles, il ne reste que **D = 2 + 5**.
Donc A = 1 + 10, A = 2 + 9, A = 3 + 8 , A = 5 + 6 sont impossibles, il ne reste que **A = 4 + 7**.
Donc C = 12 + 4, C = 11 + 5, C = 9 + 7 sont impossibles, il ne reste que **C = 10 + 6**.

Les cartes restantes sont 8, 9, 11 et 12.
F = 11 + 12 implique E = 8 + 9 = 17 est impossible car E > 18.
F = 8 + 9 et F = 8 + 11 sont impossibles car F > 19.
F = 8 + 12 = 20 implique E = 9 + 11 = 20 est impossible car F > E.
F = 9 + 11 = 20 implique E = 8 + 12 = 20 est impossible car F > E.
Il ne reste donc que **F = 9 + 12** qui implique **E = 8 + 11** .

## Exercice n°3 — Les cubes du musée

**8 points**




On note K le projeté de C sur (BH)et $\alpha = \widehat{BAH}$

Il vient alors $\widehat{HBA} = 90 - \alpha$. D'où $\widehat{KBC} = 90 - \widehat{HBA} = \alpha$ et $\widehat{BCK} = 90 - \alpha$

Les triangles $ABC$ et $BCK$ sont donc semblables.
Or $AB = BC = 5$ donc $ABC$ et $BCK$ sont des triangles égaux (isométriques).
On a ainsi $AH = BK$ et $BH = CK$.
La **hauteur** à laquelle culmine chaque cube est donc $HK = HB + BK$ soit **BH+AH**.

***cube 1*** :
Ici $AH = 4$, en utilisant le théorème de Pythagore on trouve $BH = 3$ m. La hauteur du *cube 1* est AH+BH = **7 m**.

***cube 2*** :
De le même façon, on trouve $AH = 4$ m. La hauteur du *cube 2* est AH+BH = **7 m**.

***cube 3*** :
$\widehat{BAH} = 40$ d'où $AH = 5 \times \cos 40$ et $BH = 5 \times \sin 40$.
Ainsi la hauteur du *cube 3* est BH+AH $= 5(\cos 40 + \sin 40) \approx$ **7,04 m**.

***cube le plus haut*** :
Il faut maximiser BH+AH $= 5(\cos\alpha + \sin\alpha)$, ce qui est réalisé pour $\alpha = 45°$.
Ainsi la hauteur maximale est BH+AH $= 5(\cos 45 + \sin 45) = 5 \times \sqrt{2} \approx$ **7,07 m**.

*solution géométrique pour le maximum de hauteur : montrons que c'est $AC$.*
On note J la projection orthogonale de C sur la droite (AH).
On a CJ = HK donc on cherche à maximiser CJ. Or dans le cas où J est distinct de A, le triangle AJC est rectangle en J et le théorème de Pythagore permet d'affirmer que CJ < AC .
Ainsi AC est un majorant de tous les CJ. Ce majorant est atteint lorsque J est en A car alors CA = CJ : ceci correspond à la situation du cube lorsqu'il est appuyé en B et que l'angle $\widehat{BAH}$ vaut 45°. C'est donc le maximum.

## Exercice n°4 — Duel dans l'octogone

**8 points**

1. Du carré à l'octogone.
   Pour chaque pièce on calcule les temps mis pour l'entrée, les déplacements de sommet à sommet puis les tirs :
   Salle carrée : 5s ; 4×4 = 16s ; 4×3×3 = 36s - total : 57s
   Salle pentagone régulier : 5s ; 5×4 = 20s ; 5×4×3 = 60s total : 85s
   Salle hexagone régulier : 5s ; 6×4 = 24s ; 6×5×3 = 90s total : 119s
   A la fin de la salle hexagonale Arthur aura mis 261s, soit **4 min 21s**. Meddhi a raison.

2. Passage par les salles heptagonale et octogonale.
   Salle heptagone régulier : 5s ; 7×4 = 28s ; 7×6×3 = 126s total : 159s
   Salle octogone régulier : 5s ; 8 ×4= 32s ; 8×7×3 = 168s total : 205s

   Pour atteindre et achever la mission de la salle octogonale il faut au minimum **625s** soit **10 min 15s**.

## Exercice n°5 — Myrtille et son sorbet de mûres

**8 points**

1. Avec les 110 g de purée de mûres, les 50 g de sucre et les 40 g d'eau, on obtient 200 g de sorbet.
   Pour en avoir 1000 g (1 kg), il faut multiplier par 5.
   Il faut donc **550 g** de purée, **250 g** de sucre et **200 g** d'eau.
   Pour obtenir 550 g de purée, qui représentent donc 70% de la masse de mûres,
   il faut : $\dfrac{550 \times 100}{70} = 786$ **g de mûres** au gramme près.
2. Volume de sorbet dans la boîte :
   partie parallélépipédique : $11 \times 7.5 \times 6 = 495\ cm^3$ ;
   partie cylindrique (deux demi-cylindres) : $\dfrac{\pi \times 11^2}{4} \times 6 \approx 570,2\ cm^3$.
   Soit un volume de sorbet d'environ $1065,2\ cm^3$.
   Volume d'une boule de sorbet : $\dfrac{4}{3} \times \pi \times (\dfrac{5}{2})^3 \approx 65,45\ cm^3$.
   On peut alors réaliser **16 boules** de sorbet car $16 \times 65,45 = 1047,2$ alors que $17 \times 65 = 1105$ .

| Exercice n°6 | A la recherche du code perdu |
|---|---|

**10 points**

1. 6 possibilités avec le **premier indice** : 47, 74, 48, 84, 78 ou 87.
   4 possibilités avec le **deuxième indice** : 2, 3, 5 ou 7
   3 possibilités avec **le troisième indice** : 1, 3 ou 9
   3 possibilités avec le **quatrième indice** : 29, 41, 47
   Mais la somme de tous les chiffres est égale à 20.

   Donc c'est soit **473141**, soit **743141**, soit **482141**, soit **842141**.

   Il y a **4 codes possibles** donc la probabilité est de $\frac{3}{4}$.
2. La somme de toutes les lignes, de toutes les colonnes et des deux diagonales est égale à 18.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 2 | 8 | 3 |
| 9 | 2 | 6 | 1 |
| 1 | 6 | 4 | 7 |
| 3 | 8 | 0 | 7 |

   Le code est donc 821673.

   *Solution experte (en considérant que les chiffres sont compris entre 0 et 9 et qu'ils ne sont pas forcément tous différents) :*
   On doit chercher 6 chiffres a, b, c, d, e et f compris entre 0 et 9 et disposés comme suit :
   -1e ligne : 5 2 a 3
   -2e ligne : 9 b 6 1
   -3e ligne : c d 4 e
   -4e ligne : f 8 0 7

   Comme ce carré doit être magique on doit avoir égalité entre 10 nombres :
   $a + 10 = b + 16 = c + d + e + 4 = f + 15 = c + f + 14 = b + d + 10 = a + 10 = e + 11 = d + f + 9 = b + 16$
   De $f + 15 = c + f + 14$ on tire $c = 1$ . De $f + 15 = d + f + 9$ on tire $d = 6$ .
   Reste les égalités suivantes : $a + 10 = b + 16 = e + 11 = f + 15$ .
   On choisit b comme paramètre d'où $a = b + 6$ ; $f = b + 1$ ; $e = b + 5$ . Comme a est compris entre 0 et 8 les valeurs que peut prendre b sont 0 , 1 ou 2.
   Ceci fournit 3 solutions pour (a , b , c , d , e , f ) à savoir :
   **( 6 , 0 , 1 , 6 , 5 , 1 )** , **(7 , 1 , 1 , 6 , 6 , 2 )** et **( 8 , 2 , 1 , 6 , 7 , 3 )**

   Mais comme les chiffres sont tous différents le code cherché est **( 8 , 2 , 1 , 6 , 7 , 3**).

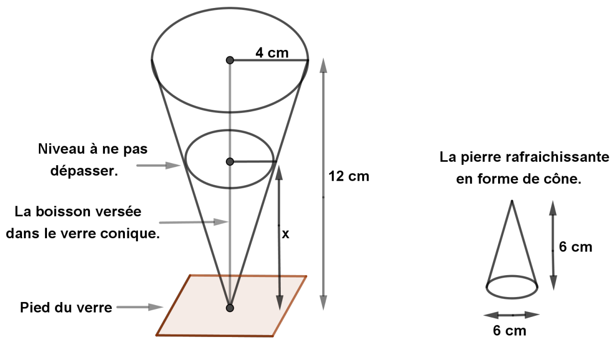
## Exercice n°7 — Les mille et une glaces

**8 points**

1. Pierre : il dit $15 \times 2$ ; il inclut dans ses choix deux boules de même parfum. Ce n'est pas ce que l'on demande.
   Anaïs : elle dit $15 \times 15$ ; il peut y avoir deux boules de même parfum, plus le fait que l'on peut avoir "fraise - vanille" et "vanille - fraise".
   Nora : $15 \times 14$ ; on se rapproche, mais même problème pour les doublets d'Anaïs.
   Bonne réponse de la marchande : $\dfrac{15 \times 14}{2} = 105$ possibilités.
2. Avec trois boules, Adam a $\dfrac{15 \times 14 \times 13}{1 \times 2 \times 3} = 455$ possibilités de choix différents.
3. Possibilités de glaces à 4 boules : $\dfrac{15 \times 14 \times 13 \times 12}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 1365$.
   Rien qu'avec les glaces à 4 boules, on est au dessus des 1000 possibilités glaces. La marchande pourra appeler sa boutique « Les mille et une glaces... et quelques unes en plus » sans aucun problème.

## Exercice n°8 — Un verre bien frais

**8 points**




Le volume du Verre est : $V_{verre} = \dfrac{1}{3}\pi \times 4^2 \times 12 = 64\pi \text{ cm}^3$.

Le volume de la pierre est : $V_{pierre} = \dfrac{1}{3}\pi \times 3^2 \times 6 = 18\pi \text{ cm}^3$.

Le volume de liquide maximum à ne pas dépasser est : $V_{max} = V_{verre} - V_{pierre} = 64\pi - 18\pi = 46\pi \text{ cm}^3$.

On nomme $r$ le rayon du cercle à graver, en utilisant le théorème de Thalès , il vient : $\dfrac{x}{12} = \dfrac{r}{4}$ d'où $r = \dfrac{x}{3}$.

Le volume de liquide maximum à ne pas dépasser est : $V_{max} = \dfrac{1}{3}\pi \times r^2 \times x$.

Soit $V_{max} = \dfrac{1}{3}\pi \times (\dfrac{x}{3})^2 \times x$ d'où $V_{max} = \dfrac{\pi}{27}x^3$.

Il faut donc résoudre l'équation : $46\pi = \dfrac{\pi}{27}x^3$ soit $x^3 = 1242$.

A l'aide d'un tableau de valeurs sur la calculatrice, on trouve $x = 10,7$ arrondi au dixième près.
Ou en remarquant que $10,7^3 = 1225,043$ et $10,8^3 = 1259,712$ on constate alors $1225,043 < 1242 < 1259,712$.

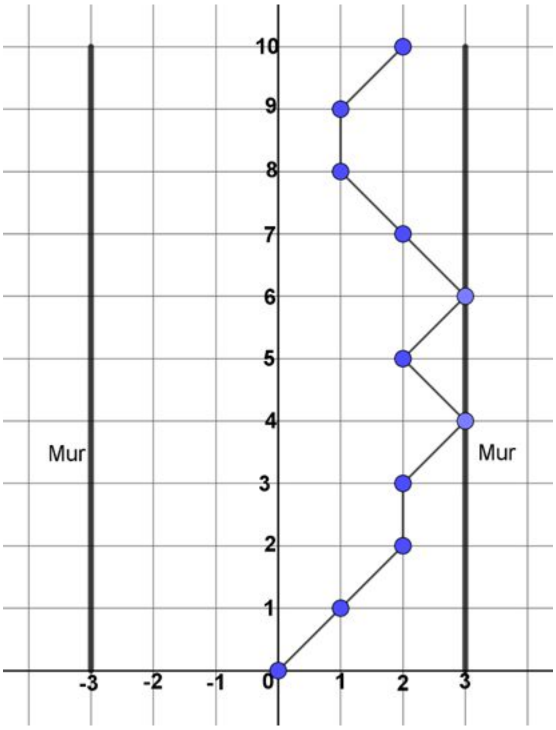
Le verre devra être gravé à la hauteur de **10,7 cm** au mm près.

**Exercice Informatique-Algorithmique** **La balle errante**

**12 points**

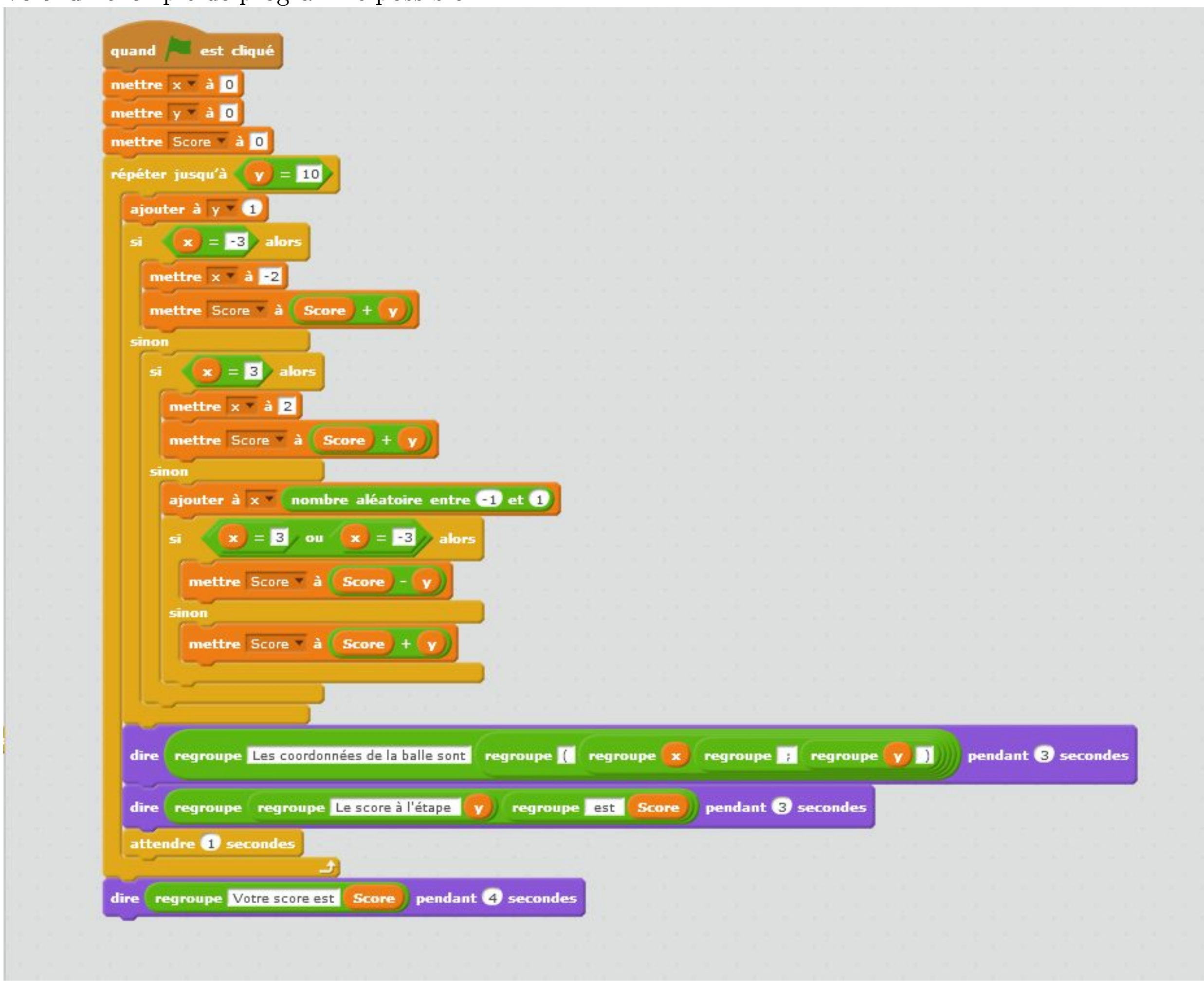
1. (a) Pour avoir le nombre de points maximum, il ne faut jamais toucher le mur.
   Nombre de points maximum : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$

   (b) Il y a plusieurs parcours possibles. Dans tous les cas la balle doit toucher le mur à l'étape 4 et à l'étape 6.
   Voici un exemple de parcours possible.




   (c) Nombre de points minimum : $1 + 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10 = -1$

2. Voici un exemple de programme possible.



```python
from random import*
x=0
y=0
score=0
for y in range(1,11):

    if x==-3:
        x=-2
        score=score+y

    elif x==3:
        x=2
        score=score+y

    else:
        x=x+randint(-1,1)
        if x==3 or x==-3:
            score=score-y
        else:
            score=score+y
    print("Etape: ",y)
    print("Les coordonnées de la balle sont : (",x,";",y,")")
    print("Le score à l'étape ",y," est",score,".")
print("-----")
print("Le score finale est",score,".")
```