Rallye mathématique du Centre et du Congo

Épreuve officielle

2021

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.
Les solutions partielles seront examinées.

Exercice n°1 — Goldbach fait des sommes de premiers

9 points

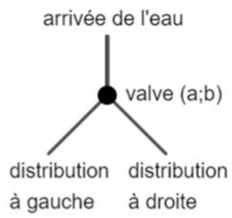
On rappelle qu'un nombre premier est un nombre entier qui possède deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.
Les premiers nombres premiers sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11...
Étant donné un nombre entier fixé, on va chercher deux nombres premiers dont la somme est égale à ce nombre.
Par exemple, si on prend 4 on a $4 = 2+2$. De même, avec 32, on a $32 = 3+29$ et $32 = 13+19$.

1. Est-il possible d'obtenir 6 ; 8 ; 10 et 12 comme somme de 2 nombres premiers ? Si oui donner toutes les sommes possibles.
2. Est-il possible d'obtenir 100 comme somme de 2 nombres premiers ? Si oui donner toutes les sommes possibles.
3. Pour tous les nombres entiers pairs compris entre 14 et 100, donner si c'est possible une somme de deux nombres premiers qui leur soit égale.
4. Quelle conjecture pouvez-vous en déduire ?

Exercice n°2 — La valse des valves

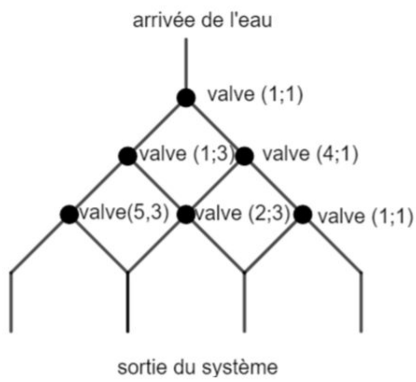
8 points

Une valve de coefficients (a ; b) est définie ainsi (a et b sont des nombres entiers positifs) :
pour un volume d'eau entrant v dans la valve, en sortie ce volume se divise en deux parties :
celle de gauche est $\dfrac{a}{a+b} \times v$ et celle de droite est $\dfrac{b}{a+b} \times v$.

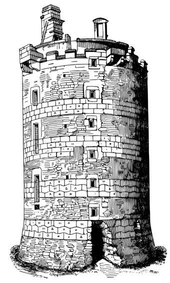


1. Un volume $v = 12$ litres d'eau arrive sur une valve de coefficients (a ; b). Donner le volume distribué à gauche et à droite dans chacun des cas suivants :
   (i) une valve de coefficients (1 ; 1) ;
   (ii) une valve de coefficients (2 ; 1) ;
   (iii) une valve de coefficients (2 ; 3).

2. Un système de tuyaux et de valves de coefficients (a ; b) est installé tel que ci-contre.
   Le volume d'eau entrant est de 40 litres.
   (i) Quel est le volume d'eau à la sortie de chacun des tuyaux de ce système ?
   (ii) Reproduire le schéma de ce système en modifiant certains coefficients des valves afin que dans chacun des tuyaux il sorte la même quantité d'eau ?



Exercice n°3 La tour d'Emma Toeux



6 points

La tour d'Emma Toeux, princesse de Topologie, est une haute tour qui possède un escalier d'accès en colimaçon. Elle est très célèbre pour l'énigme qu'elle abrite.
Lors de l'ascension de cette tour, on peut découvrir un panneau à chacune des 4 étapes de la montée. Voici ce que mentionnent ces panneaux :

• Sur le premier, en bas de la tour, on peut lire : « La hauteur de chaque marche est de 16 cm et la hauteur de cet escalier est comprise entre 35 m et 42 m ».
• Sur le second panneau, on peut lire : « Arrivé ici, tu as gravi la moitié des marches ».
• Sur le 3e panneau, on peut lire : « Arrivé ici, tu as gravi le tiers de ce qui restait des marches après le panneau précédent ».
• Sur le 4e panneau, on peut lire : « Arrivé ici, tu as gravi le huitième de ce qui restait des marches après le panneau précédent. Quelle est donc la hauteur de cet escalier ? ».

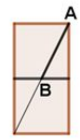
Résoudre l'énigme de la tour d'Emma Toeux.

Exercice n°4 Les n-diagonales

6 points

Un n-rectangle est un rectangle de 1 cm de large et composé de n carrés de 1 cm de côté tous alignés. Une n-diagonale est un segment dont les extrémités sont l'intersection de la diagonale du rectangle avec les côtés d'un carré de 1 cm de côté.

1. Voici ci-contre le schéma d'un 2-rectangle avec une 2-diagonale représentée par le segment [AB].
   Montrer que la 2-diagonale mesure $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ cm.

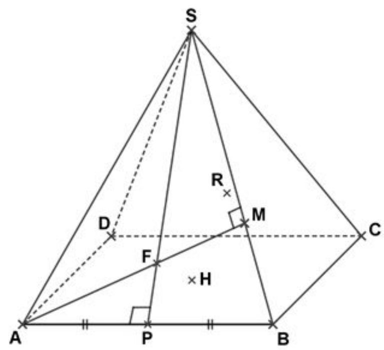


2. Construire un 3-rectangle et une 3-diagonale dont on déterminera la longueur exacte.
3. On considère que deux segments sont visiblement de longueurs identiques lorsque l'écart entre leurs mesures est inférieur au millième de centimètre.
   À partir de quelle valeur de n une n-diagonale est visiblement égale à la largeur d'un n-rectangle ?

Exercice n°5 Une fourmi sur une pyramide

12 points

SABCD est une pyramide régulière à base carrée de côté 10 cm suspendue en son sommet S. Sa hauteur [SH] mesure 10 cm.
Une fourmi se trouve au point F qui est le point d'intersection de la hauteur issue de A et de la hauteur issue de S dans le triangle SAB.
Elle désire se rendre au point R qui est le point d'intersection de la hauteur issue de D et de la hauteur issue de S dans le triangle SDC.
On sait aussi que FP $= \sqrt{5}$ cm. On pourra prendre FP $\approx 2{,}24$ cm.
Elle se déplace uniquement sur les faces de la pyramide et en ligne droite.



1. La fourmi envisage 3 trajets.
   1er trajet : elle se rend en P puis elle se déplace parallèlement à l'arête [BC] jusqu'à atteindre l'arête [DC] puis elle se rend en R.
   2ème trajet : elle se rend en S puis en R.
   3ème trajet : elle se rend en M puis elle se déplace parallèlement à l'arête [BC] jusqu'à atteindre l'arête [SC] puis elle se rend en R.
   Calculer la longueur, arrondie au mm, de chaque trajet. Lequel de ces trois trajets doit-elle suivre pour parcourir la plus petite distance possible ?
2. Existe-t-il un chemin encore plus court ? Si oui, le décrire et en donner une longueur au mm près.

Exercice n°6 — La galette fait-elle trempette ?

6 points

Maxence adore tremper ses galettes dans son bol de lait le matin au petit déjeuner. Mais ce matin il n'y a plus de bols disponibles, il prend donc un mug (tasse cylindrique) pour y verser ses 25 cL de lait.
Peut-il tout de même tremper ses galettes préférées qui ont un diamètre de 7,8 cm sachant que son mug mesure 8 cm de haut et a un diamètre interne de 7,4 cm ?

Exercice n°7 — De Mercalme au fort Thune

6 points

À partir du port de Mercalme, on doit ravitailler le fort Thune dans le désert. Une ligne de chemin de fer rectiligne de 100 km de long relie Mercalme à la ville de Yakoto. Le fort est situé à 80 km de Yakoto perpendiculairement à la ligne de chemin de fer.
Le transport par caravane dans le désert coûte trois fois plus cher que par la ligne de train. Pour réduire les frais de transport, on souhaite donc construire une station sur la ligne de chemin de fer entre Yakoto et Mercalme. Le ravitaillement du fort se fera en train de Mercalme jusqu'à cette station puis en ligne droite par caravane à travers le désert jusqu'au fort.
À quelle distance de Mercalme doit-on construire la station pour que le coût de transport soit le plus petit possible ?