Rallye mathématique du Centre

Correction de l'épreuve préparatoire décembre 2020

Exercice n°1 — Jules décode

7 points

Le code comporte 5 chiffres suivis de la lettre B.
Sachant que le code n'a jamais été changé, que deux touches sont quasiment effacées, qu'une autre touche montre des traces d'usure mais moins que les deux autres et que les autres touches sont comme neuves, on peut en déduire que le code utilise uniquement trois chiffres différents : un chiffre est utilisé deux fois, un autre chiffre est aussi utilisé deux fois et un chiffre est utilisé une seule fois.

Les 4 premiers chiffres forment un carré parfait donc on cherche les nombres de 4 chiffres qui sont des carrés parfaits composés de 3 chiffres différents.
De plus comme le nombre de la combinaison à cinq chiffres est un palindrome, son chiffre des dizaines est le même que celui des unités de mille donc dans la liste des carrés il faut éliminer tous les nombres dont le chiffre des unités n'est pas égal au chiffre des centaines.

Finalement, il reste comme carrés possibles : 3969, 5929 et 8464.
La combinaison étant un palindrome, il reste comme possibilités : 39693B , 59295B et 84648B.

Il n'y a donc que 3 codes possibles donc il est certain de rentrer dans l'immeuble sans bloquer la porte.
Il a donc raison.

Exercice n°2 — Le peintre 10 traits

6 points

1.

couleur	on veut	première fois	deuxième fois	total	il faut	on ajoute
blanc	1	1	2	3	3	rien
rose	4	5	2	7	12	5

Il faut 4 fois plus de rose que de blanc, donc avec 3 parts de blanc, il faut 12 parts de rose.

2.

couleur	on veut	on a	il faut	on ajoute
blanc	6	2	36	34
violet	2	1	12	11
bleu	1	6	6	rien

Exercice n°3 — My fortune for 10 €!

5 points

Notons x le montant cherché.
1er magasin : $(x + x - 10) = (2x - 10)$
2ème magasin : $(2x - 10) + (2x - 10) - 10 = (4x - 30)$
3ème magasin : $(4x - 30) + (4x - 30) - 10 = 8x - 70$
Donc $8x - 70 = 0$ ce qui donne $x = 8,75$ €.

Exercice n°4 — Le délice du limaçon

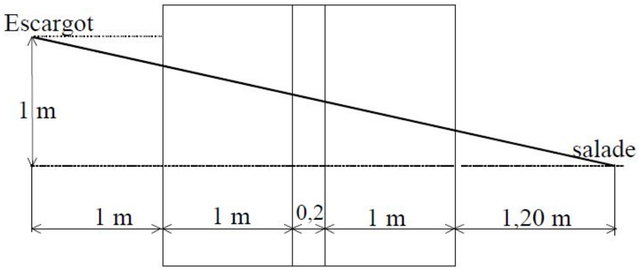
10 points

1. Trajet 1 $= 3,2 + \sqrt{2,44} \approx 4,762$ m

   Trajet 2 $= 3,4 + \sqrt{2} \approx 4,814$ m

2. Trajet 3 $= 2,2 + \sqrt{1,25} + \sqrt{1,69} \approx 4,618$ m

3. Le trajet minimal est en « ligne droite » de l'escargot à la salade.



   Trajet minimal $= \sqrt{20,36} \approx 4,512$ m

Exercice n°5 — Histoire d'appartements

6 points

Soit a le nombre de personnes ayant vue sur le port, b le nombre de personnes ayant vue sur la ville, c le nombre de personnes ayant vue sur la montagne et d le nombre de personnes ayant vue sur la mer.

b est multiple de 3 et 4 et $b \leq 20$ donc $b = 12$, $a = 4$, $c = 8$ et $d = 3$.

<table>
<tr><td rowspan="5">montagne</td><td colspan="3">mer</td><td rowspan="5">port</td><td rowspan="5">x + y + z = 3 donc x = 1, y = 1 et z = 1.
1 + t + u = 4 donc t + u = 3
soit t = 1 et u = 2 ou t = 2 et u = 1</td></tr>
<tr><td>x</td><td>y</td><td>z</td></tr>
<tr><td>s</td><td></td><td>t</td></tr>
<tr><td>w</td><td>v</td><td>u</td></tr>
<tr><td colspan="3">ville</td></tr>
</table>

Si t = 1 et u = 2, alors w + v +2 = 12 d'où w + v = 10 et 1 + s + w = 8 d'où s + w = 7, de plus,

x + y + z + t + u + v + w + s = 20 donc s + 16 = 20 **s = 4** alors **w = 3** et **v =7**.

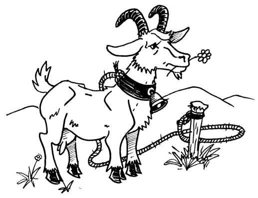
Si t = 2 et u = 1, alors w + v +1 = 12 d'où w + v = 11 et 1 + s + w = 8 d'où s + w = 7, de plus,

x + y + z + t + u + v + w + s = 20 donc s + 17 = 20 **s = 3** alors **w = 4** et **v =7.**

Deux dispositions possibles :

1	**1**	**1**
4		**1**
3	**7**	**2**

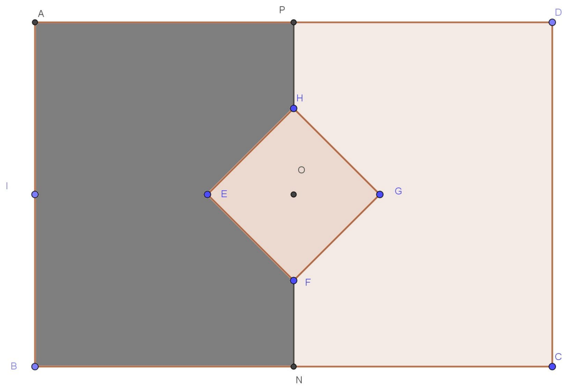
1	**1**	**1**
3		**2**
4	**7**	**1**



Exercice n°6 **La chèvre, le pré et le hangar**

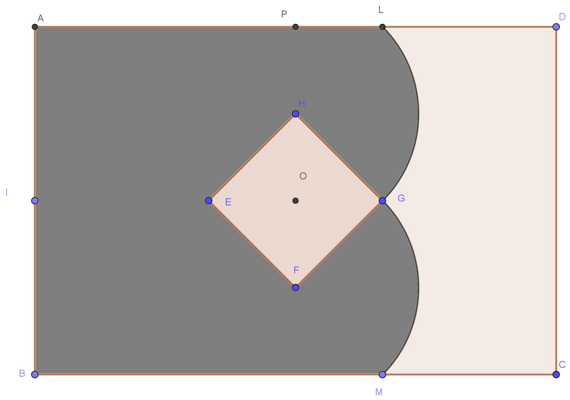
10 points

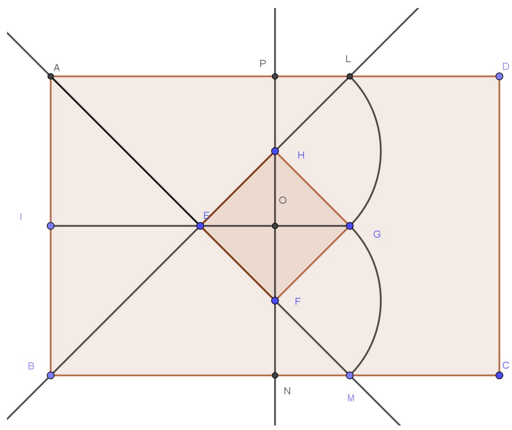
1.



Avec les barrières [HP] et [FN].
L'aire que peut brouter la chèvre est celle du rectangle ABNP moins celle du triangle EFH.
Ainsi, Aire à brouter = 60 × 20 - 20 × 10 : 2
Aire à brouter = 1200 - 100 = 1100 m^2

2.





Soit L le point d'intersection entre (EH) et (AD).
Soit M le point d'intersection entre (EF) et (BC)
Les droites (AD) et (EG) sont parallèles car elles sont toutes les deux perpendiculaires à (FH).
Grâce au théorème de Thalès, comme HP = HO = 10, on a HL = HE = HG = $10\sqrt{2}$.
Donc le point L est à intersection de l'arc de cercle de centre H de rayon $10\sqrt{2}$ avec le coté [AD].
De même, le point M est à intersection de l'arc de cercle de centre F de rayon $10\sqrt{2}$ avec le coté [BC].

Ainsi ABML est un carré de 40 mètres de côté dont E est le centre.
Les diagonales [AM] et [BL] se coupent leur milieu commun E. Ainsi EA = EL = EM = EB =$20\sqrt{2}$.
La chèvre peut donc brouter, en plus de la surface de la première situation celles des triangles HPL et FNM et celles des quarts de disque HLG et FGM.

On note que Aire(EFH) = Aire (HPL) + Aire(FNM), donc au total l'aire à brouter est celle du rectangle ABNP et d'un demi-disque de rayon $10\sqrt{2}$ m.
Aire à brouter = 1200 + $\pi \times (10\sqrt{2})^2 : 2$
Aire à brouter = 1200 + 100π
L'aire à brouter est donc d'environ 1514 m^2.

Exercice n°7 — Bûche, ô ma bûche !

8 points

volume $=0{,}5\times x \times y = 1$
Soit l la longueur de tubes métalliques nécessaires.

1. • Si $x = 1$ alors $l = 16 + 2\sqrt{5} \approx 20,47$ m

   • Si $x = 2$ alors $l = 15 + 2\sqrt{5} \approx 19,47$ m

2. $l(x,y) = 10 \times 0,5 + 3x + 4y + 2\sqrt{x^2+y^2}$

   $l(x,y) = 5 + 3x + 4y + 2\sqrt{x^2+y^2}$

   or $0,5xy = 1$ d'où $y = \dfrac{2}{x}$

   Ainsi $l(x) = 5 + 3x + \dfrac{8}{x} + 2\sqrt{x^2 + \dfrac{4}{x^2}}$

   En utilisant la calculatrice, le tableur ou par lecture graphique on obtient une valeur minimale de longueur de tubes de 18,84 m (valeur arrondie au cm près) pour $x = 1{,}53$ m (valeur arrondie au cm près).

Exercice n°8 — Des dés

7 points

Première manche
L'attaquant a obtenu 5.
Le défenseur doit faire 5 ou 6. La probabilité est : $P = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Deuxième manche
L'attaquant a obtenu 3 et 5.
Le défenseur doit faire 4, 5 ou 6. La probabilité est : $P = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Troisième manche
L'attaquant a obtenu 3 et 4.
Le défenseur doit faire un des scores non rayés du tableau suivant :

	1	2	3	4	5	6
1	~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	7
2	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	7	8
3	~~4~~	~~5~~	~~6~~	7	8	9
4	~~5~~	~~6~~	7	8	9	10
5	~~6~~	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Et on a : $P = \dfrac{21}{36}$ $(> \dfrac{1}{2})$

Exercice Informatique-Algorithmique **L'information secrète se répand**

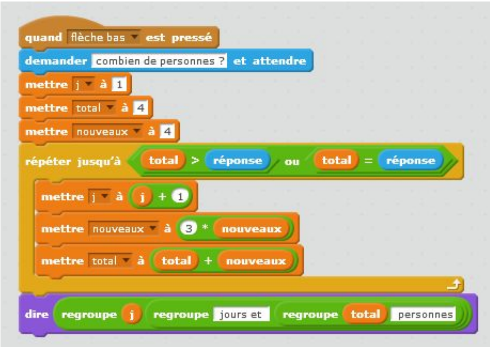
10 points

1. $4 + (3 \times 4) = 16$. Le 2 avril 2020, 16 personnes sont au courant.
   $4 + (3 \times 4) + 3 \times (3 \times 4) = 4 + 12 + 3 \times 12 = 52$. Le 3 avril 2020, 52 personnes sont au courant.

2. 


```
nombre_jour = eval(input("Combien de jours ?"))
nombre_total = 4
nombre_nouveaux = 4
for i in range(nombre_jour-1):
    nombre_nouveaux =3*nombre_nouveaux
    nombre_total = nombre_total + nombre_nouveaux
print(nombre_total)
```

3. Au vingtième jour, le 20 avril 2020, 6 973 568 800 personnes seront informées.




```
nombre_personnes = eval(input("Combien de personnes ?"))
nombre_nouveaux = 4
nombre_total = 4
jour = 1

while nombre_total < nombre_personnes:
    jour = jour + 1
    nombre_nouveaux =3*nombre_nouveaux
    nombre_total = nombre_total + nombre_nouveaux

print("Au " + str(jour) + "ème jours il y aura " +
str(nombre_total) + " personnes.")
```