Rallye mathématique du Centre

Éléments de correction de l'épreuve officielle 2021

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification. Les solutions partielles seront examinées.

Exercice n°1 — Goldbach fait des sommes de premiers

9 points

1. $6 = 3+3$; $8 = 3+5$; $10 = 3+7 = 5+5$; $12 = 5+7$.
2. Liste des nombres premiers compris entre 3 et 100 :

   3 , 5 , 7 , 11 , 13 , 17 , 19 , 23 , 29 , 31 , 37 , 41 , 43 , 47 , 53 , 59 , 61 , 67 , 71 , 73 , 79 , 83 , 89 , 97 .

   Décomposition de 100 : $100 = 3+97 = 11+89 = 17+83 = 29+71 = 41+59 = 47+53$.

3. Pour avoir toutes les décompositions des nombres pairs compris entre 14 et 100 un bon moyen est d'établir une table d'addition des nombres premiers compris entre 3 et 100. Cela donne ;

   $14 = 3+11 = 7+7$; $16 = 3+13 = 5+11$; $18 = 5+13 = 7+11$; $20 = 3+17 = 7+13$; $22 = 3+19 = 11+11$;

   $24 = 5+19 = 7+17 = 11+13$; $26 = 3+23 = 7+19 = 13+13$; $28 = 5+23 = 11+17$; $30 = 7+23 = 13+17$;

   $32 = 3 +29 = 13+19$; $34 = 3+31 = 11+23 = 17+17$; $36 = 5+31 = 7+29 = 13+23 = 17+19$;

   $38 = 7+31 = 19+19$; $40 = 3+37 = 11+29 = 17+23$; $42 = 5+37 = 11+31 = 13+29 = 23+23$;

   $44 = 3+41 =7+37 = 13+31$; $46 = 3+43 = 5+41 = 17+29 = 23+23$; $48 = 5+43 = 7+41 =11+37 = 17+31 = 19+29$;

   $50 = 3+47 = 7+43 = 13+37 = 19+31$; $52 = 5+47 = 11+41 = 23+29$; $54 = 7+47 = 11+43 = 13+41 = 17+37 = 23+31$;

   $56 = 3+53 = 13+43 = 19+37$; $58 = 5+53 = 11+47 = 17+41 = 29+29$;

   $60 = 7+53 = 13+47 = 17+43 = 19+41 = 23+37 = 29+31$; $62 = 3+59 = 19+43 = 31+31$;

   $64 = 3+61 = 5+59 = 11+53 = 17+47 = 23+41$; $66 = 5+61 = 7+59 = 13+53 = 19+47 = 23+43 = 29+37$;

   $68 = 7+61 = 31+37$; $70 = 3+67 = 11+59 = 17+53 = 23+47 = 29+41$; $72 = 5+67 = 19+53 = 29+43 = 31+41$;

   $74 = 3+71 = 7+67 = 13+61 = 31+43 = 37+37$; $76 = 3+73 = 5+71 = 17+59 = 23+53 = 29+47$;

   $78 = 5+73 = 7+71 =11+67 = 17+61 = 19+59 = 37+41$; $80 = 7+73 = 13+67 = 19+61 = 37+43$;

   $82 = 3+79 = 11+71 = 23+59 = 29+53 = 41+41$;

   $84 = 5+79 = 11+73 = 13+71 = 17+67 = 23+61 =31+53 = 37+47 = 41+43$;

   $86 = 3+83 = 7+79 = 13+73 = 19+67 = 43+43$; $88 = 5+83 = 17+71 = 29+59 =41+47$;

   $90 = 7+83 = 11+79 = 17+73 = 23+67 = 29+61 = 31+59 = 37+53 = 43+47$;

$92 = 3+89 = 13+79 = 3+61$; $94 = 5+89 = 11+83 = 23+71 = 41+53 = 47+47$;

$96 = 7+89 = 13+83 = 17+79 = 23+73 = 29+67 = 37+59 = 43+53$; $98 = 19+79 = 31+67 = 37+61$.

4. On peut en déduire une conjecture qui ,bien que vérifiée par calcul pour un très grand nombre de nombres pairs, n'a pas encore été démontrée comme vraie ou fausse en toute généralité.

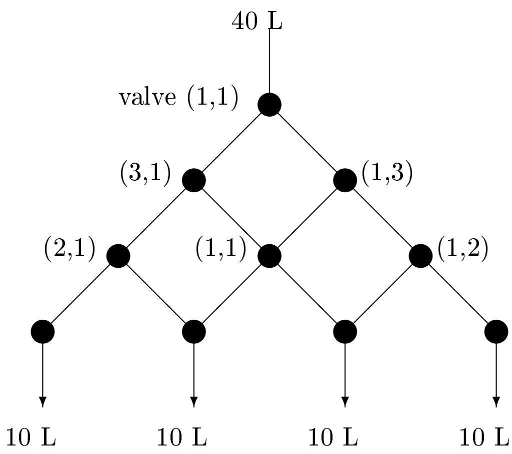
   Cette conjecture a été avancée pour la première fois par un mathématicien allemand , Christian Goldbach, dans une lettre adressée à Leonhard Euler en 1742 :

   « Tout nombre entier pair strictement plus grand que 2 peut s'écrire comme somme de deux entiers premiers positifs (égaux ou non) ».

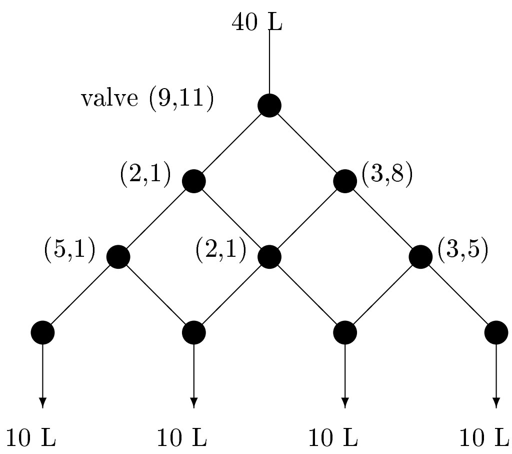
Exercice n°2 **La valse des valves**

8 points

1. (i) 6 litres de chaque coté.
   (ii) 2/3 à gauche et 1/3 à droite, soit 8 L et 4 L.
   (iii) 2/5 à gauche et 3/5 à droite, soit 4.8 L et 7.2 L.
2. (i) De gauche à droite : 3,125 L ; 14,275 L ; 20,6 L et 2 L.
   (ii) Il faut qu'il y ait en sortie 10 L sur chaque tuyau. Il y a plein de solutions.
   Par exemple :



ou encore :



Exercice n°3 La tour d'Emma Toeux

6 points

On pose n le nombres de marches de l'escalier de la tour

- Au premier panneau : $\dfrac{3500}{16} = 218,25$ et $\dfrac{4200}{16} = 262,5$ donc n est compris entre 219 et 262 : $219 < n < 262$.
- Au second panneau : il reste alors $\dfrac{n}{2}$ marches.
- Au troisième panneau : on vient de gravir $\dfrac{n}{6}$ marches depuis le panneau précédent. Il reste alors $\dfrac{n}{2} - \dfrac{n}{6} = \dfrac{n}{3}$ marches.
- Au quatrième panneau : on vient de gravir $\dfrac{n}{24}$ marches depuis le panneau précédent.

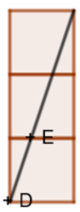
Comme $\dfrac{n}{24}$ est un nombre entier cela signifie que n est un multiple de 24. Le seul multiple de 24 compris entre 219 et 262 est n=240.

La hauteur de l'escalier de la tour est donc de $240 \times 0,16 = 38,4$ m

Exercice n°4 Les n-diagonales

6 points

1. En appliquant le théorème de Pythagore, on trouve AC=$\sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$.
   En appliquant le thorème de Thalès (ou droite des milieux), on trouve AB= $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.
2. En appliquant de même théorème de Pythagore, on détermine la mesure d'une diagonale d'un 3-rectangle comme $\sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$. De même avec le théorème de Thalès, la mesure d'une 3-diagonale est $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$.



3. La longueur de la n-diagonale doit être inférieure à 1,001 cm.
   En suivant les explications précédentes, la mesure d'une n-diagonale est de $\dfrac{\sqrt{1+n^2}}{n}$. On trouve alors n=23.

Exercice n°5 Une fourmi sur une pyramide

12 points

1. (a) 1er trajet : Grâce à des raisons évidentes de symétrie,
   longueur 1er trajet = 2,24 cm + 10 cm + 2,24 cm = 14,48 cm.
   Le 1er trajet mesure environ 14,5 cm.

   (b) 2ème trajet :
   Calcul de SP : SHP est un triangle rectangle en H donc d'après le théorème de Pythagore :
   SP^2=SH^2+HP^2 donc SP^2=10^2 +5^2 donc SP=$\sqrt{125}$ cm $\approx$ 11,18 cm.
   Donc FS$\approx$ 11,18 - 2,24 cm d'où FS $\approx$ 8,94 cm or 8,94 $\times$2 = 17,88
   Le 2e trajet mesure environ 17,9 cm.

   (c) 3ème trajet :
   D'abord il faut calculer FM. Mais pour cela, il faut calculer AF et AM.
   Calcul de AF :
   Le triangle AFP est rectangle en P donc d'après le théorème de Pythagore :
   AF^2 = FP^2 + AP^2 donc AF^2 = $2,24^2$ + 5^2 donc AF = 30,0176 cm $\approx$ 5,48 cm

Calcul de AM :
Le triangle AFP est rectangle en P donc $\tan\widehat{FAP} = \dfrac{FP}{AP} = \dfrac{2,24}{5}$ donc $\widehat{FAP} \approx 24°$.
Le triangle AMB est rectangle en M donc $\cos\widehat{MAB} = \dfrac{AM}{AB}$ donc $\cos 24° = \dfrac{AM}{10}$
ainsi AM $= 10 \times \cos 24° \approx$ 9,14 cm donc FM $\approx$ 9,14-5,48 cm soit FM$\approx$ 3,66 cm.

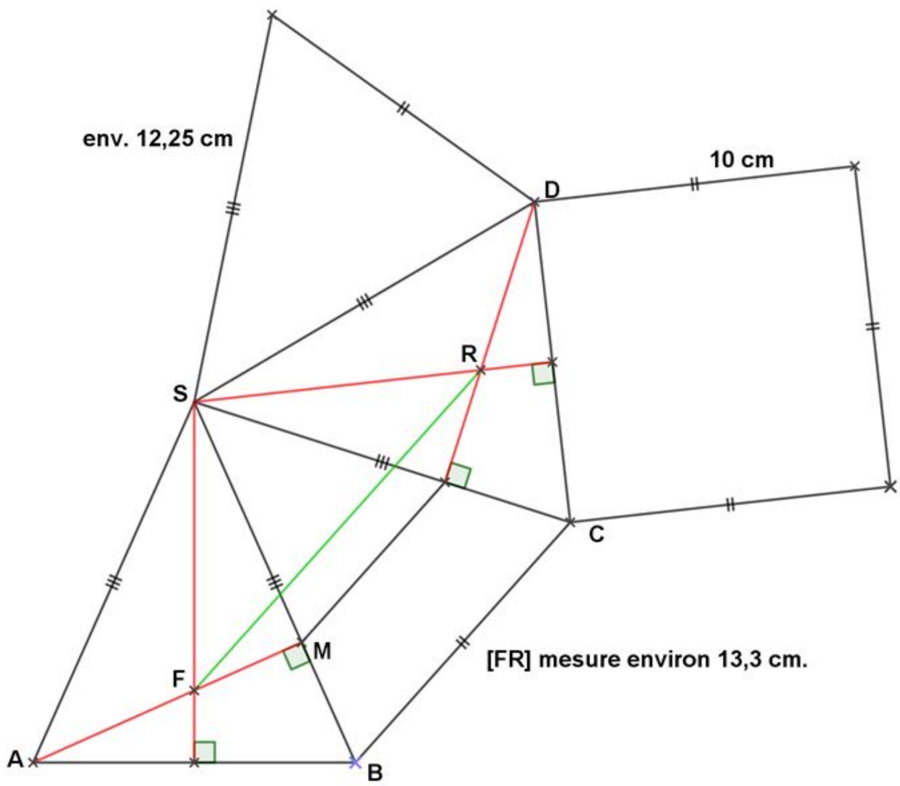
Ensuite, il faut calculer la longueur parcourue sur la face SBC. Pour cela, il faut calculer SB, MB et SM.
Calcul de SB :
Le triangle DCB est rectangle en C donc d'après le théorème de Pythagore DB $= \sqrt{200}$ cm.
Donc comme H est le milieu de [DB], HB $= \dfrac{\sqrt{200}}{2}$ cm.
Le triangle SHB est rectangle en H donc d'après le théorème de Pythagore :
$SB^2 = HS^2 + HB^2 = 10^2 + (\dfrac{\sqrt{200}}{2})^2 = 150$ donc SB $= \sqrt{150}$ cm $\approx$ 12,25 cm
Calcul de MB :
Le triangle AMB est rectangle en M donc $\sin\widehat{MAB} = \dfrac{MB}{AB}$ donc $\sin 24° = \dfrac{MB}{10}$
Donc MB $=$ 10 cm $\times \sin 24° \approx$ 4,07 cm

Calcul de SM :
SM $\approx$ 12,25 - 4,07 cm $=$ 8,18 cm

Calcul de la longueur MN parcourue sur la face SBC :
(BM) et (CN) sont sécantes en S et (MN) et (BC) sont parallèles donc d'après le théorème de Thalès : $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{MN}{BC}$ donc $\dfrac{8,18}{12,25} = \dfrac{MN}{10}$ donc MN $\approx$ 6,68 cm.
Grâce à des raisons évidentes de symétrie, la longueur 3ème trajet vaut 3,66 cm + 6,68 cm + 3,66 cm = 14 cm
Le troisième trajet mesure environ 14 cm.

Donc le chemin le plus court est le 3ème chemin.

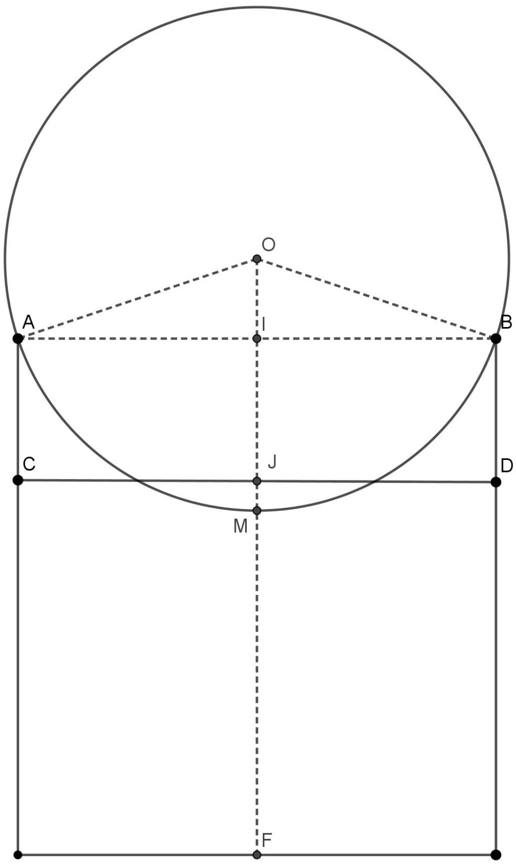
2. Il existe un chemin encore plus court qui mesure environ 13,3 cm. Voir le patron ci-dessous.



Exercice n°6 **La galette fait-elle trempette ?**

6 points

Le rayon du mug étant 3,7 cm, la surface de base du mug est $\pi \times 3,7^2 = 13,69 \times \pi$ cm^2.
On utilise les notations de la figure ci-dessous.



Comme 25 cL = 250 cm^3, la hauteur de lait dans le mug est FJ=$\dfrac{250}{13,69 \times \pi}$ soit FJ$\approx$ 5,81cm.
On a : OA=OM=3,9 cm et AI=3,7 cm.
En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OAI on obtient :

$OA^2 = OI^2 + IA^2$
$OI^2 = OA^2 - IA^2$
$OI^2 = 3.9^2 - 3.7^2$
$OI = \sqrt{3.9^2 - 3.7^2}$
$OI = \sqrt{1.52} \approx 1.23$ cm

et donc IM = OM - OI soit IM = 3,9 - $\sqrt{1.52}$

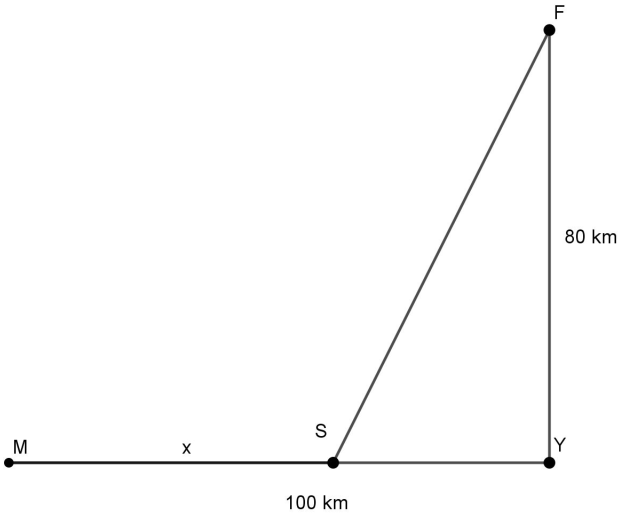
or FM = FI - IM d'où FM = 8-(3,9 - $\sqrt{1.52}$) soit FM = 4,1 + $\sqrt{1.52} \approx$ 5,33 cm.

FM $<$ FJ donc la galette trempe dans le lait de FJ-FM soit plus de 4,7 mm.

Exercice n°7 — De Mercalme au fort Thune

6 points

On pose :
M : port de Mercalme, F : le fort Thune, Y : la ville de Yakoto, S : la station à construire. (voir la figure ci dessous)
On a MY = 100 km , FY = 80 km , et note MS = x km.



Par le théorème de Pythagore on obtient :
$\text{SF}^2 = 80^2 + (100-x)^2$ donc $\text{SF} = \sqrt{80^2 + (100-x)^2}$

Le transport par caravane dans le désert étant trois fois plus cher que par la ligne de chemin de fer , on minimise donc la grandeur MS+3$\times$ SF.

Il suffit d'étudier la fonction f définie par $f : [0, 100] \to \mathbf{R}$
$$x \mapsto x + 3\sqrt{80^2 + (100-x)^2}.$$

A l'aide de la calculatrice ou du tableur on trouve un minimum atteint pour $x = 72$ km à l'unité près.

65	326,963738
66	326,775766
67	326,617026
68	326,487911
69	326,388811
70	326,320112
71	326,282197
72	326,275441
73	326,300217
74	326,35689
75	326,445819
76	326,567356
77	326,721845
78	326,909622

Exercice n°8 — Le jackpot au bout du bras

6 points

1. Pour gagner le Jackpot, il faut avoir trois 0, trois 1, ..., trois 9.
De 000 à 999, il y a 1 000 possibilités. Et on gagne dans 10 cas.
La probabilité de gain du Jackpot est donc de $\dfrac{10}{1000}$, soit $\dfrac{1}{100}$.

2. Ensuite pour le droit de rejouer :
deux nombres identiques (et seulement deux nombres) avec les 0, c'est possible si on a : 001, 010 ou 100. Donc trois possibilités. Idem si on mélange avec 2, puis 3, ..., 9. Ce qui fait $3 \times 9 = 27$ possibilités. On recommence avec les 1, les 2, ..., les 9. Soit 10 fois plus.
Au total, on a ainsi $27 \times 10 = 270$ possibilités de pouvoir rejouer.
La probabilité est donc : $\dfrac{270}{1000} = \dfrac{27}{100}$.

Exercice Informatique-Algorithmique **Un vol pour Syracuse**

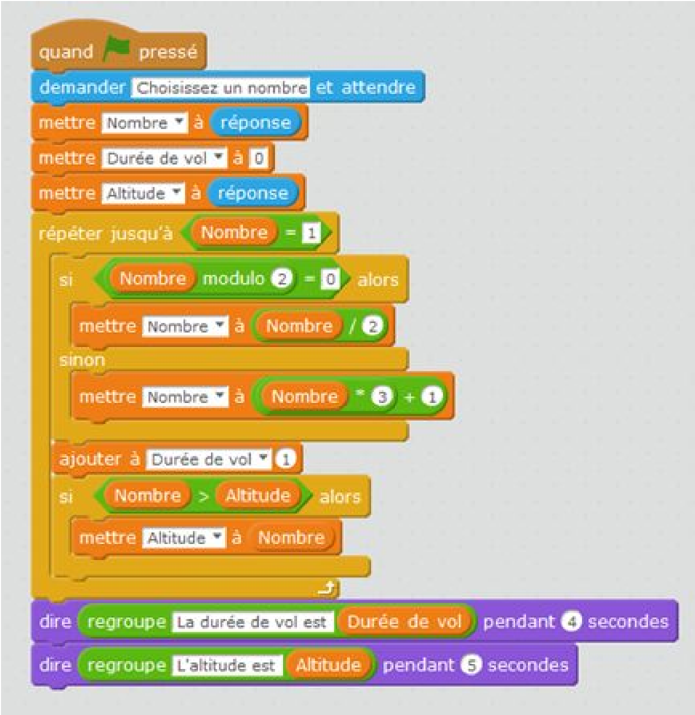
12 points

1. (a) **13** ; 40 ; 20 ; 10 ; 5 ; 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ;...
   34 ; 17 ; 52 ; 26 ; 13 ; 40 ; 20 ; 10 ; 5 ; 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ;...
   42 ; 21 ; 64 ; 32 ; 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ;...

   (b) On remarque que pour chacun des 3 nombres l'algorithme boucle indéfiniment sur 4 ; 2 ; 1.

2. (a) **18** ; 9 ; 28 ; 14 ; 7 ; 22 ; 11 ; 34 ; 17 ; 52 ; 26 ; 13 ; 40 ; 20 ; 10 ; 5 ; 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ;...
   La durée de vol de 18 est bien 20 et son altitude est bien 52.

   (b)




```python
nombre = eval(input("Choissisez un nombre entier positif non nul:"))
nombre_duree = 0
nombre_altitude = nombre

while nombre != 1:
    nombre_duree = nombre_duree + 1

    if nombre % 2 == 1:
        nombre = nombre * 3 + 1
    else:
        nombre = nombre / 2

    if nombre > nombre_altitude:
        nombre_altitude = nombre

print("L'altitude est", nombre_altitude, "et la durée de vol est",
nombre_duree)
```

   (c) Il y a 5 nombres inférieurs à 1 000 dont la durée de vol est strictement supérieure à 150 et dont l'altitude est strictement supérieure à 10 fois le nombre.

Nombre	Durée de vol	Altitude
703	170	250 504
763	152	9 232
775	152	9 232
871	178	190 996
937	173	250 504