

RALLYE MATHÉMATIQUE DU CENTRE ET DU CONGO

Épreuve préparatoire - Décembre 2019

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.
Les solutions partielles seront examinées.
Bon courage et rendez-vous le 10 mars pour l'épreuve officielle.

Exercice n°1

Les aventuriers de $\rho\lambda$

8 points

Sur l'île de $\rho\lambda$, deux équipes de 8 joueurs s'affrontent tous les trois jours lors d'une épreuve qui a toujours lieu l'après-midi. A l'issue de chaque épreuve un joueur est éliminé.

Un sac de 6 kg de riz est distribué à chaque équipe avant le repas du premier jour de l'aventure. La première épreuve a lieu le troisième jour de l'aventure. Quand il reste 8 joueurs, le jeu devient individuel et le riz restant est mis en commun. L'aventure s'arrête quand il reste un seul joueur.

Tous les joueurs mangent la même quantité de riz chaque jour, lors d'un unique repas qui a lieu tous les matins. Les joueurs éliminés ne mangent plus de riz. Sachant qu'à la fin de l'aventure tout le riz a été consommé, quelle est la quantité quotidienne de riz que pourra manger un candidat ?



Exercice n°2

Le Carré de POLYBE

5 points



	1	2	3	4	5
1	A	B	C	D	E
2	F	G	H	I	J
3	K	L	M	N	O
4	P	Q	R	S	T
5	U	V	X	Y	Z

Polybe, un historien grec (vers 200 – 125 av. J.-C.), est à l'origine du premier procédé de chiffrement par substitution. C'est un système de transmission basé sur un carré de 25 cases. Chaque lettre peut être ainsi représentée par un groupe de deux chiffres : celui de sa ligne suivi de celui de sa colonne.

Ainsi : "E" = 15, "U" = 51, "N" = 34 ...

Mais ce codage est peut-être un peu simple. On décale alors l'alphabet avec un mot de passe... Par exemple, si le mot de passe est ELECTRICITE, on commence à remplir le carré avec les lettres de ce mot, en ne gardant que la première occurrence de chaque lettre, ce qui donne E L C T R I, puis on complète le tableau avec les lettres inutilisées dans l'ordre alphabétique.

(voir ci-contre)

Le W n'est pas utilisé. Au besoin, on emploie le V à sa place.

	1	2	3	4	5
1	E	L	C	T	R
2	I	A	B	D	F
3	G	H	J	K	M
4	N	O	P	Q	S
5	U	V	X	Y	Z

Que se cache-t-il derrière le message chiffré ci-dessous ? Pour le découvrir, il faut le SESAME.

41153212214531234244121431124422123413213413111112

Exercice n°3**Au bal masqué, ohé...****6 points**

Aristide, Ben et Christian préparent une fête masquée chez l'une de leurs camarades. Ils disposent de trois déguisements, un pour chacun : fantôme, pirate et vampire.

- Ben dit : « Si Christian se déguise en vampire, alors moi je me mets en pirate!!! »
- Christian répond : « Si Ben se déguise en fantôme, alors moi je me mets en pirate!!! »
- Et Aristide de conclure : « Si Ben ne se déguise pas en vampire, alors moi je me mets en pirate!!! »

Quelles sont les répartitions possibles des déguisements de chacun ?

Exercice n°4**Nombre de Champernowne****7 points**

Le nombre de Champernowne est le nombre défini de la façon suivante : 0,123456789101112131415... dans lequel la partie décimale est infinie, construite en mettant bout à bout tous les entiers naturels.

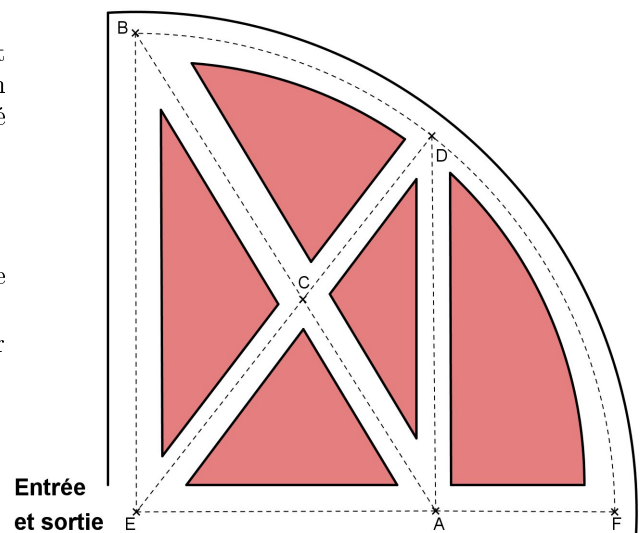
1. Quelle est la 20ème décimale de ce nombre? la 100ème? la 2020ème?
2. Quelle est la première position dans la partie décimale du nombre de Champernowne, où l'on trouve les successions de chiffres suivantes? (Donner la position du premier chiffre.)
 - 35
 - 181
 - 2020
 - 2021

Exercice n°5**Le jardin de Jean****12 points**

Jean, qui est employé à l'entretien du parc d'un château, doit passer la tondeuse dans toutes les allées engazonnées d'un ancien jardin ayant la forme d'un quart de disque constitué de cinq parterres de fleurs.

Voici des indications concernant ce jardin :

- l'entrée et la sortie ne peuvent se faire qu'en E ;
- les allées [BE] et [DA] sont perpendiculaires à l'allée [EF] qui passe par A ;
- l'allée \widehat{BF} est un quart de cercle de centre E passant par D ;
- les allées [BA] et [DE] se coupent en C ;
- Par mesure à 0,1 m près, on a :
EC = 75 m , CD = 45 m et BC = 96 m .



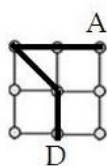
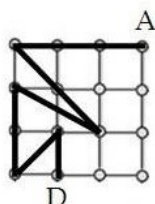
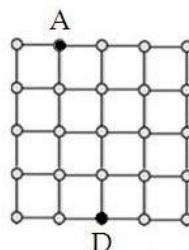
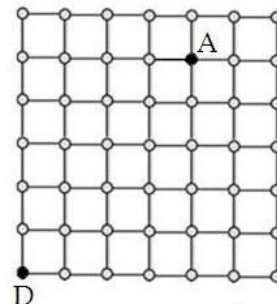
1. Hier, Jean a passé la tondeuse dans toutes les allées de ce jardin. Il a fait le trajet suivant :
E → A → F → D → B → E → C → D → B → C → A → D → C → E
Calculer la longueur de son trajet. (Arrondir les longueurs des allées au mètre près.)
2. Après avoir passé la tondeuse, Jean se dit que son trajet n'est certainement pas le plus court pour entretenir toutes ces allées. Il se demande alors quel trajet emprunter pour avoir le chemin le plus court possible. Proposer un chemin, le plus court possible, pour l'entretien de ces allées et donner sa longueur.

Exercice n°6**Le trajet s'enracine****8 points**

Sur un quadrillage formé de carrés de côté une unité, on construit des trajets d'un point de départ D jusqu'à un point d'arrivée A. Ces trajets sont formés d'une suite de segments consécutifs qui ne se coupent pas, de longueurs strictement croissantes et dont chaque extrémité est un point du réseau.

Par exemple, le trajet représenté sur la *fig a* ci-après a pour longueur : $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{4}$

1. Donner de la même façon la longueur du trajet représenté sur la *fig b* ci-après.
2. Tracer sur le quadrillage de la *fig c* (à découper et à coller sur la feuille-réponse) un trajet de D à A dont la longueur est : $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{8} + \sqrt{9} + \sqrt{10}$
3. Tracer sur le quadrillage de la *fig d* (à découper et à coller sur la feuille-réponse) un trajet de D à A le plus long possible et donner sa longueur.

*fig a**fig b**fig c**fig d*