

Rallye mathématique du Centre et du Congo

Épreuve officielle

Mardi 10 mars 2020

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.
Les solutions partielles seront examinées.

Exercice n°1

Une carapace pour la légion

8 points

Un groupe de passionnés de l'histoire romaine organise une reconstitution de son armée. Une célèbre formation de combat est la « tortue ».



1. Le groupe peut former une tortue carrée (autant de soldats en longueur qu'en largeur) mais il restera 8 passionnés de côté. S'ils décidaient de faire une tortue, toujours carrée, avec une personne de plus sur le côté, il leur manquerait 5 passionnés. Combien de passionnés y a-t-il dans le groupe?
2. Déçus de ne pouvoir tous se retrouver dans la tortue, le groupe fait venir d'autres passionnés et dix personnes de plus arrivent. Ne pouvant faire une tortue carrée, le groupe choisit de faire alors une tortue rectangulaire dont le rapport (ratio) de la longueur à la largeur est égal à $\frac{3}{2}$. Quelles sont les dimensions de cette tortue?
3. Au premier janvier 2019, la région Centre-Val de Loire comptait 2 567 000 habitants. Quelle serait la plus grande tortue carrée que l'on pourrait faire et combien d'habitants ne pourraient pas l'intégrer? Y aurait-il moins d'habitants laissés de côté si on choisissait une tortue rectangulaire de ratio $\frac{3}{2}$?

Exercice n°2

Merci pour tout Jean-Marie

5 points

Cinq amis Jean-Marie, Philippe, Jean-Pierre, Rémi et Pierrick se réunissent pour une partie de poker.

Chacun d'eux porte au moins un de ces accessoires : un chapeau ou des lunettes ou une écharpe ; il peut porter deux éléments à la fois mais jamais les trois en même temps. On sait que :

- Jean-Pierre a un chapeau ;
- Philippe porte une écharpe mais pas Rémi ;
- Rémi et Pierrick n'ont pas de lunettes ;
- ils ont chacun une combinaison d'accessoires différente.

Au total deux amis ont une écharpe, trois portent des lunettes et trois portent un chapeau. Que porte Jean-Marie?

Exercice n°3

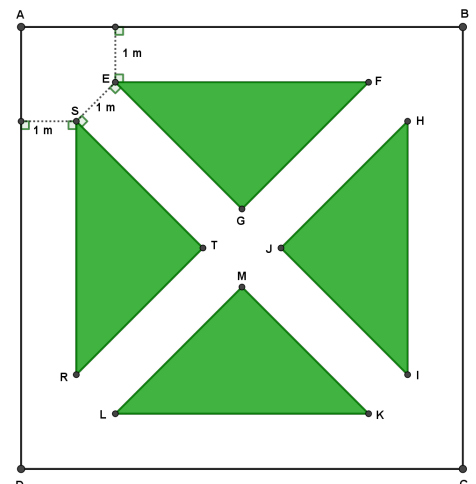
Jardin à la française

10 points

Charles souhaite rénover les allées du jardin à la française de son manoir. Ce jardin a la forme d'un carré de 24 m de côté et a deux axes de symétrie : les diagonales du carré. Les allées font toutes un mètre de large et déterminent quatre parties triangulaires cultivées (voir plan ci-contre).

Pour la rénovation, il envisage de recouvrir toutes les allées de 5 cm d'épaisseur de gravier. Le gravier choisi revient à 210 euros le m^3 , livraison et installation comprises.

Combien va lui coûter cette réalisation ?



Exercice n°4**La tour infernale de MathCraft****9 points**

MathCraft est un jeu de construction qui plonge le joueur dans un univers composé de blocs cubiques qui permettent de construire des bâtiments de toutes dimensions.

Mattéo est passionné par ce jeu, il souhaite bâtir une tour de la façon suivante :

- elle est constituée d'un empilement de structures cubiques constituées à l'aide des blocs ;
- chaque structure cubique est centrée sur celle du dessous et réduite d'un bloc dans chaque direction ;
- la tour se termine par un cube constitué d'un seul bloc.

Sur la figure ci-contre la tour est constituée de trois structures cubiques et sa hauteur totale est de 9 blocs.



1. Dans ce jeu, la hauteur maximale d'une construction est de 191 blocs. De combien de structures cubiques est constituée au maximum la tour de Mattéo ?
2. Mattéo est capable de construire en moyenne 13 blocs toutes les 4 secondes. Combien lui faudra-t-il de temps pour construire la tour la plus haute possible ?
3. Mattéo veut maintenant construire deux tours jumelles absolument identiques. Il dispose pour cela de 83 000 blocs au maximum. Il veut encore qu'elles soient les plus hautes possibles. Quelle sera leur hauteur une fois réalisées et combien lui restera-t-il de blocs inutilisés à la fin ?

Exercice n°5**Le codage dur à lire****6 points**

Pour communiquer avec ses amies Audrey utilise un système de codage. Le codage consiste à commencer par remplacer chaque lettre par sa position dans l'alphabet, mais pour des raisons techniques la position de la lettre A est 0, celle de B est 1, ..., celle de Z est 25.

On choisit ensuite deux nombres entiers **a** et **b** qui constituent la clef de chiffrement. La position d'une lettre est alors codée en la multipliant par **a** puis en ajoutant **b**. Ce nombre n'étant pas forcément compris entre 0 et 25, on prend son reste dans la division euclidienne par 26. Enfin ce dernier nombre est à son tour remplacé par la lettre qui lui correspond.

Par exemple, si on souhaite coder le mot MATHS avec le choix **a=3** et **b=5** :

- Etape 0 - message initial : M A T H S
- Etape 1 - en positions : 12 0 19 7 18
- Etape 2 - après chiffrement : 41 5 62 26 59
- Etape 3 - reste de la division par 26 : 15 5 10 0 7
- Etape 4 - message codé : P F K A H

1. Coder « RALLYE MATHEMATIQUE » avec maintenant **a=7** et **b=1**.
2. Décoder « HDQPF CVLQ EVLE MDBO HBQFD » toujours avec **a=7** et **b=1**.

Exercice n°6**Le sapin de Noël sans guirlande****10 points**

Manuel et Aliénor veulent fabriquer un sapin de Noël dans une planche en bois. Le sapin a la forme d'un triangle isocèle de sommet S. La base [AB] mesure 1,20 m et sa hauteur [SH] mesure 1,60 m. La partie supérieure formée par le triangle SFE sera peinte en blanc pour symboliser la neige. Au sommet du sapin trônera une belle boule dorée. Le quadrilatère ABFE sera peint en vert. Ils veulent fixer une guirlande électrique ABCDEF comme indiqué sur la figure ci-contre.

On sait que les angles \widehat{ABC} et \widehat{CDE} sont égaux et mesurent environ $20,5^\circ$ et que les droites (BC) et (DE) sont perpendiculaires à (SA).

Alors que Aliénor pense qu'il leur faut une guirlande de plus de 4,5 m de long, Manuel prétend que 4,5 m suffisent.

Qui a raison et quelle sera la longueur de la guirlande ABCDEF (arrondir au cm) ?

