Rallye mathématique du Centre

Correction de l'épreuve préparatoire décembre 2019

Exercice n°1 — Les aventuriers de $\rho\lambda$

8 points

Soit x la quantité de riz quotidienne que pourra manger un candidat.
Il vient :
$16 \times 3 \times x + 15 \times 3 \times x + 14 \times 3 \times x + 13 \times 3 \times x + ... + 2 \times 3 \times x = 12000$ g

Remarque : La durée du jeu est de $15 \times 3 = 45$ jours

On obtient : $3x[16 + 15 + 14 + ... + 2] = 12000$ g
soit $3x \times 135 = 12000$ g d'où $x = \dfrac{4000}{135}$ g

La quantité de riz quotidienne que pourra manger un candidat est d'environ 29,6 g de riz par jour.

Exercice n°2 — Le Carré de POLYBE

5 points

Le mot important du texte est SESAME On utilise donc les lettres : SEAM en premier puis l'alphabet dans l'ordre alphabétique.

	1	2	3	4	5
1	S	E	A	M	B
2	C	D	F	G	H
3	I	J	K	L	N
4	O	P	Q	R	T
5	U	V	X	Y	Z

$41 \Rightarrow$ O
$15 \Rightarrow$ B
$32 \Rightarrow$ J
$12 \Rightarrow$ E
$21 \Rightarrow$ C
$45 \Rightarrow$ T ...

Réponse : OBJECTIF PREMIER DE LA CLASSE

Exercice n°3 — Au bal masqué, ohé...

6 points

	Déguisements					
Aristide	V	V	P	P	F	F
Ben	P	F	V	F	V	P
Christian	F	P	F	V	P	V

Le tableau ci-dessus donne toutes les répartitions possibles de déguisements.
Les possibilités en rouge sont exclues par les affirmations du texte. Il reste donc deux possibilités :

Aristide	Pirate
Ben	Vampire
Christian	Fantôme

Aristide	Fantôme
Ben	Vampire
Christian	Pirate

Exercice n°4 Nombre de Champernowne

7 points

1. Une stratégie commode consiste à noter que :

   -de 1 à 9 il y a 9 chiffres ; de 10 à 19 il y a 20 chiffres, comme de 20 à 29, et ainsi de suite jusqu'à 90 à 99 ; on itère avec 30 chiffres de 100 à 109,...,jusqu'à 900 à 909 ; etc.

   Pour la 20e décimale , on le fait directement : c'est 1.

   Pour la 100e, de 1 à 49 il y a 89 chiffres ; on écrit ensuite 505152535455 : c'est 5.

   Pour la 2020e, de 1 à 709 il y a 2019 chiffres ; on écrit ensuite 710711 : c'est 7.

2. Pour 35, on examine l'écriture obtenue en écrivant les chiffres représentant les 9 premiers nombres entiers naturels. On n'y trouve pas la suite 35 (alors qu'on y trouve la suite 34 par exemple). Donc la suite 35 arrive quand on écrit la suite 35 représentant le nombre 35 !
   On compte le nombre de chiffres écrits en progressant du nombre 1 au nombre 34 : il y en a $9 + 2\times25 = 59$. Ainsi le 3 suivi de 5 apparaît à la 60ème place dans ce cas.

   Pour 181, en observant les premières décimales de 0,12345678910111213141516171**181**9..., on remarque que 181 se trouve de la 26ème à la 28ème décimale.

   Pour 2020 -Le fait qu'aucun nombre entier ne s'écrit avec un chiffre 0 en début permet d'établir que la suite de chiffres 2020 ne peut être obtenue comme tout ou partie d'une suite de chiffres incluse dans la partie décimale illimitée du nombre de Champernowne obtenue en alignant en ordre croissant les chiffres des nombres de 1 à 999.
   Ainsi la suite de chiffres 2020 intervient pour la 1ère fois quand on écrit les chiffres du nombre 2020 à la suite de ceux du nombre 2019. Le nombre de chiffres obtenu en écrivant bout à bout ceux de 1 à 2019 est :
   $9 + 2\times90 + 3\times900 + 4\times1020 = 6969$
   Donc le chiffre 2 du début de 2020 est en 6970ème position.
   Pour 2021, toujours en observant les premières décimales de 0,12345678910111213141516171819**2021**..., on remarque que 2021 se trouve de la 30ème à la 33ème décimale.

Exercice n°5 Le jardin de Jean

12 points

1. Pour répondre à cette question, il faut d'abord calculer : BE, EF, CA, DA, $\overset{\frown}{BF}$ et $\overset{\frown}{DB}$.

   ∗ BE = ED = EF = rayon du quart de disque = 75 m + 45 m = 120 m donc <u>BE = 120 m</u> et <u>EF = 120 m</u>.

   ∗ En utilisant le théorème de Thalès dans la configuration en « papillon » définie par les droites parallèles (BE) et (DA) et les sécantes (BA) et (DE), on a :
   $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{CD}{CE} = \dfrac{DA}{BE}$ donc $\dfrac{CA}{96} = \dfrac{45}{75}$ donc $\underline{CA = 57{,}6\text{ m}}$.

$*$ Toujours en appliquant Thalès dans la même configuration que précédemment, on a :
$\dfrac{\text{CA}}{\text{CB}} = \dfrac{\text{CD}}{\text{CE}} = \dfrac{\text{DA}}{\text{BE}}$ donc $\dfrac{\text{DA}}{120} = \dfrac{45}{75}$ donc $\underline{\text{DA} = 72 \text{ m}}$.

$* \ \widehat{\text{BF}} = \dfrac{2 \times \pi \times 120\, m}{4}$ donc $\widehat{\text{BF}} \approx 188\, m$

$*$ En utilisant la relation de Pythagore dans DEA rectangle en A, on a $\underline{\text{EA} = 96 \text{ m}}$.

$*$ Dans le triangle DEA rectangle en A, on a $\cos \widehat{\text{DEA}} = \dfrac{\text{EA}}{\text{ED}}$ donc $\cos \widehat{\text{DEA}} = \dfrac{96}{120}$.
Donc $\widehat{\text{DEA}} \approx 37°$, on en déduit que $\widehat{\text{BED}} \approx 53°$.
La longueur d'un arc de cercle étant proportionnelle à la mesure de son angle au centre, le tableau ci-dessous est un tableau de proportionnalité.

Angle au centre (°)	53°	360°
Longueur arc (cm)	$\widehat{\text{DB}}$	$2 \times \pi \times 120$

donc $\underline{\widehat{\text{DB}} \approx 111 \text{ m}}$.

$*$ Longueur totale du trajet :
120 m + 188 m + 120 m + 120 m + 111 m + 96 m + 58 m + 72 m + 120 m = 1005 m
Il a parcouru environ 1005 m.

2. Pour répondre à cette question , il faut calculer toutes les longueurs manquantes c'est-à-dire AF et $\widehat{\text{DF}}$.

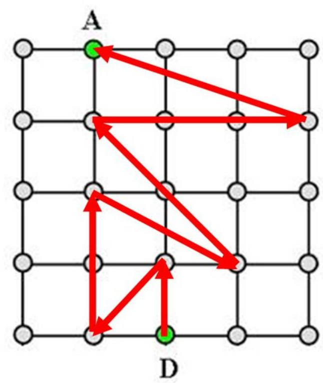
   $*$ AF $\approx$ 120 m - 96 m donc $\underline{\text{AF} \approx 24 \text{ m}}$.
   $* \ \widehat{\text{DF}} \approx$ 188 m - 111 m donc $\underline{\widehat{\text{DF}} \approx 77 \text{ m}}$.

   $*$ Voici un chemin plus court :
   E → C → D → F → A → D → B → C → A → E → B → E
   Longueur :
   120 m + 77 m + 24 m + 72 m + 111 m + 96 m + 58 m + 96 m + 120 m + 120 m = 894 m.

Exercice n°6 Le trajet s'enracine

8 points

1. La longueur du trajet représenté sur la *fig b* est : $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{8} + \sqrt{9}$.
2. Le trajet représenté sur la *fig c* ci-dessous a pour longueur : $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{8} + \sqrt{9} + \sqrt{10}$.



3. La longueur du trajet représenté sur la *fig d* ci-dessous est :

$$\sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{8} + \sqrt{10} + \sqrt{16} + \sqrt{17} + \sqrt{20} + \sqrt{25} + \sqrt{32} + \sqrt{34} \approx 40,724.$$

Exercice n°7 — De dé en dé

9 points

1. Une façon simple est de lister tous les cas possibles, comme dans le tableau ci-dessous (les sommes sont à l'intersections des lignes et des colonnes) :

les dés	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Il suffit alors de faire les décomptes. Les probabilités sont :

somme	**proba (sur 36)**
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6
8	5
9	4
10	3
11	2
12	1

2. On reprend le tableau précédent, en modifiant les nombres affichés par le premier dé ; puis, ligne par ligne, on indique les nombres de l'autre dé de façon à obtenir les sommes voulues. Cela donne :

autre dé\ premier dé	**1**	**2**	**2**	**3**	**3**	**4**
1	2	3	3	4	4	5
3	4	5	5	6	6	7
4	5	6	6	7	7	8
5	6	7	7	8	8	9
6	7	8	8	9	9	10
8	9	10	10	11	11	12

L'autre dé portait donc les nombres **1, 3, 4, 5, 6 et 8**.

Exercice n°8 — A l'eau la bouée

7 points

Soient :
r le rayon du cercle de base de la bouée
$2h$ la hauteur de la bouée
V le volume de la bouée

On a $V = \dfrac{2\pi r^2 h}{3} = \dfrac{2\pi}{3}(80^2 - h^2)h = \dfrac{2\pi}{3}(6400h - h^3)$

Volume	1 m^3	V
Masse	110 kg	1716 g

On en déduit : $V = 15,6$ dm$^3 = 15600\ cm^3$.

Le problème se traduit par l'équation :
$\dfrac{2\pi}{3}(6400h - h^3) = 15600$ soit $\pi h^3 - 6400\pi h + 23400 = 0$

On peut alors utiliser la calculatrice, Géogébra ou le tableur pour obtenir une valeur approchée de h.

On obtient $h \approx -80,57$ ou $h \approx 79,41$ ou $h \approx 1,16$.
On retiendra raisonnablement $h \approx 79,41cm$.

Exercice n°9 — Jeu du Potkimonte

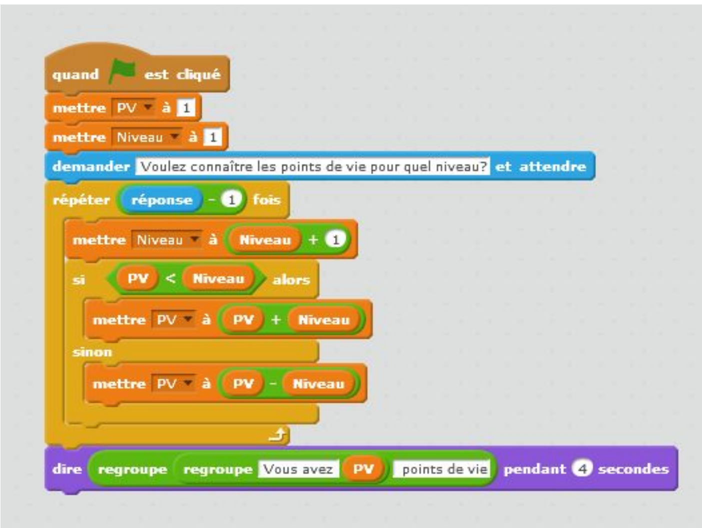
8 points

1. Compléter ce tableau jusqu'au niveau 20.

niveau	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
PV	1	3	0	4	9	3	10	2	11	1	12	0	13	27	12	28	11	29	10	30

2. Que remarque-t-on aux niveaux 3 et 12 ?
   A ces niveaux on obtient 0 PV.

3.




```python
lvl=eval(input("Entrer le niveau voulu :"))
Pv=1
for i in range(2,lvl+1):
    if Pv<i:
        Pv=Pv+i
    else:
        Pv=Pv-i
print("Vous avez",Pv,"Pv au niveau",lvl)
```

4. Au 2020e niveau, le personnage a 2650 PV.
5. Au 39e niveau, le personnage a de nouveau 0 PV.