Rallye mathématique du Centre

Éléments de correction de l'épreuve officielle 2020

Exercice n°1 **Une carapace pour la légion**

8 points

1. Soit N le nombre total de personnes avec n de chaque côté du carré.
   On a $N = n^2 + 8 = (n+1)^2 - 5$. Donc 2 n = 12 et n = 6 . Ainsi **N = 44**.
2. Maintenant N = 54. Comme $7^2 < 54 < 8^2$ on ne peut faire une tortue carrée !
   On fait une tortue rectangulaire avec n soldats sur la largeur, $\frac{3n}{2}$ sur la longueur.
   Alors $N = \frac{3n^2}{2}$ donc $n^2 = \frac{2 \times 54}{3} = 36$ et n = 6. Donc la largeur est **6** et la longueur **9**.
3. On part de N = 2 567 000. On a $1602^2 < 2\,567\,000 < 1603^2$.
   • Donc la plus grande tortue carrée possible a n=**1602** habitants par côté. Il resterait alors **596** habitants hors tortue.

   • Pour une tortue rectangulaire à n habitants en largeur et $\frac{3n}{2}$ sur la longueur, on cherche $\frac{3n^2}{2}$ aussi proche de 2 567 000 que l'on peut donc n^2 proche de 1 711 333,33...
   Comme $1308^2 < 1\,711\,333 < 1309^2$, la tortue rectangulaire la plus grande possible de ce type aura **1308** habitants en largeur et **1962** en longueur. Resteront alors **704** habitants non inclus.

Exercice n°2 **Merci pour tout Jean-Marie**

5 points

En rassemblant les informations dans un tableau on obtient :

	Jean-Pierre	Philippe	Rémy	Pierrick	Jean-Marie	Total
Chapeau	oui					3
Lunettes			non	non		3
Echarpe		oui	non			2

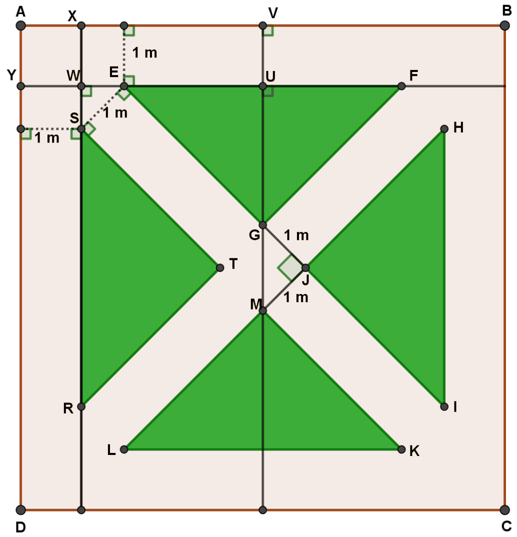
On complète avec les contraintes :

	Jean-Pierre	Philippe	Rémy	Pierrick	Jean-Marie	Total
Chapeau	oui	non	oui	oui	non	3
Lunettes	oui	oui	non	non	oui	3
Echarpe	non	oui	non	oui	non	2

Jean-Marie a des lunettes mais pas d'écharpe ni de chapeau.

Exercice n°3 | Jardin à la française

10 points



On appelle O le centre du carré, on note alors que EGF est un triangle rectangle isocèle comme AOB par égalité des angles à côtés parallèles.
Pour calculer l'aire totale des allées, on va calculer l'aire d'un des 4 triangles rectangles isocèles, multiplier ce résultat par 4 puis le soustraire à l'aire du carré.

• Grâce au théorème de Pythagore dans le triangle rectangle GMJ, on a GM $= \sqrt{2}$ m.
Donc GU $= \dfrac{24-2-\sqrt{2}}{2} = 11 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ m.

• Grâce au théorème de Pythagore dans le triangle rectangle WES, on a :
$2\times$ WE $^2 = 1^2$ donc WE $^2 = 0{,}5$

Donc WE $= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$ m (solution positive).

Donc EF $= 24 - 2 - 2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = (22-\sqrt{2})$ m

Donc Aire(EFG) $= \dfrac{EF \times GU}{2} = \dfrac{(22-\sqrt{2}) \times (11 - \dfrac{\sqrt{2}}{2})}{2} \approx 105,94$ m^2

Donc Aire des allées $= 24^2 - 4 \times \dfrac{(22-\sqrt{2}) \times (11 - \dfrac{\sqrt{2}}{2})}{2} \approx 152{,}22$ m ^{2}

Le volume estimé de gravier est de 7,6 m^3, d'où un coût d'environ 1598 euros.

Exercice n°4 La tour infernale de MathCraft

9 points

1. On note que chaque structure en dessous d'une autre a deux blocs de plus sur chaque côté.
   On détermine le plus grand entier p tel que $1 + 3 + 5 + ... + (2p + 1) \leq 191$.
   Par additions successives on trouve 2p+1 =25.
   La tour de Mattéo comprend au plus 13 structures cubiques.
   Dans ce cas la tour mesure $1 + 3 + 5 + 7... + 21 + 23 + 25 = 169$ blocs de haut.

2. Calcul du nombre de blocs nécessaires pour construire la tour la plus haute :
   $1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + ... + 23^3 + 25^3 = 56\ 953$

   Le temps passé par Mattéo sera égal à $\frac{56953}{13} \times 4 = 17\ 524$ s. Donc un temps de 4 h 52 min 4s.
3. On ne peut construire deux tours de la plus grande hauteur possible avec 83 000 blocs seulement. Mais si l'on retire de celle-ci la structure de 25^3 blocs on pourra construire chaque tour avec 56 953 - 25^3 = 41 328 blocs ; donc 82 656 blocs pour les deux. Il restera alors 344 blocs non utilisés.
   La hauteur de chacune des tours sera égale à $1 + 3 + 5 + 7... + 21 + 23 = 144$ blocs.

Exercice n°5 Le codage dur à lire

6 points

Le plus simple (mais peut-être pas le plus rapide) est de faire au préalable le codage de toutes les lettres ; ce qui donne :

A→B	H→Y	O→V	V→S
B→I	I→F	P→C	W→Z
C→P	J→M	Q→J	X→G
D→W	K→T	R→Q	Y→N
E→D	L →A	S→X	Z→U
F→K	M→H	T →E	
G→R	N→O	U→L	

Alors :

1) RALLYE MATHEMATIQUE est codé en QBAAND HBEYDHBEFJLD ;

2) Le texte à décoder est : MERCI POUR TOUT JEAN MARIE.

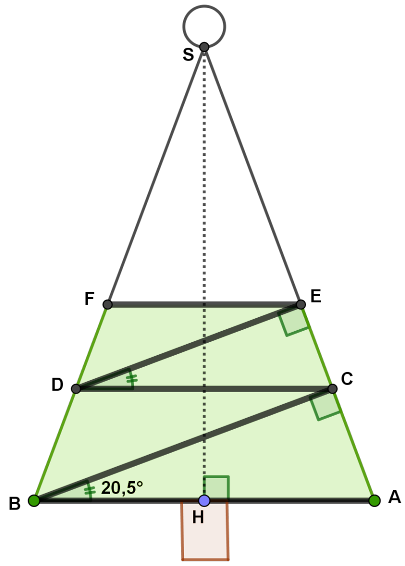
Exercice n°6 **Le sapin de Noël sans guirlande**

10 points

On sait que $AB = 1,2$ m et $SH = 1,6$ m.

Grâce au théorème de Pythagore, on calcule SA.

$SA = \sqrt{0,6^2 + 1,6^2} = \sqrt{2,92}$
d'où $SA \approx 1,709$m.



Dans le triangle rectangle ABC :
$AB = 1,20$ m
$BC = 1,20 \times \cos(20,5°) \approx 1,124$ m
$AC = 1,20 \times \sin(20,5°) \approx 0,420$ m

donc $SC = SA - AC \approx 1,289$ m.

Ensuite en utilisant le théorème de Thalès on obtient :

$\dfrac{DC}{BA} = \dfrac{SC}{SA}$ d'où $DC = AB \times \dfrac{SC}{SA} \approx 1,20 \times \dfrac{1,289}{1,709} \approx 0,905$ m.

On itère ensuite en remplaçant AB par DC.

Dans le triangle rectangle EDC :
$DC \approx 0,905$ m
$DE = DC \times \cos(20,5°) \approx 0,848$ m
$EC = DC \times \sin(20,5°) \approx 0,317$ m

donc $SE = SC - EC \approx 0,972$ m.

Ensuite en utilisant le théorème de Thalès on obtient :

$\dfrac{EF}{DC} = \dfrac{SE}{SC}$ d'où $EF = DC \times \dfrac{SE}{SC} \approx 0,905 \times \dfrac{0,972}{1,289} \approx 0,682$ m.

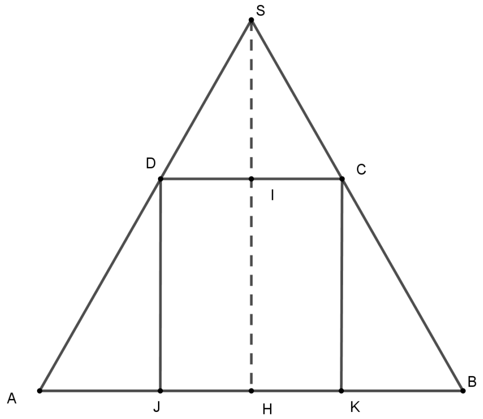
La longueur de la guirlande est : $l = AB + BC + CD + DE + EF \approx 4,76$ m.
C'est donc Aliénor qui a raison.

Exercice n°7 — Un cône pour l'enceinte

8 points

Modélisation pour passage à une étude de fonction.

On note h la hauteur du cône et R le rayon du cercle de base et on trace une figure dans un plan contenant l'axe du cône.



On a alors $h = SH$, $IC = 5$, $IH = 15$ et $R = HB$

Grâce au théorème de Thalès on a : $\dfrac{IC}{HB} = \dfrac{SI}{SH}$

d'où $\dfrac{5}{R} = \dfrac{h-15}{h} = 1 - \dfrac{15}{h}$

On obtient alors $h = \dfrac{15R}{R-5}$ et $R = \dfrac{5h}{h-15}$

Fonction à étudier.

On sait que si V est le volume du cône on a : $V = \dfrac{1}{3}h\pi R^3$.

On en tire que $V = f(R)$ avec $f(R) = 5\pi\dfrac{R^3}{R-5}$

On en tire aussi que $V = g(h)$ avec $g(h) = \dfrac{25\pi}{3}\dfrac{h^3}{(h-15)^2}$

On étudie l'une ou l'autre des fonctions avec une préférence pour f, un peu plus simple.
Le minimum de f est atteint pour $R = 7,5$ **cm** ce qui donne $h = 45$ **cm**.

Exercice n°8 — Docteur, est-ce grave ?

7 points

Sur un million de personnes on compte 1000 malades et 999 000 personnes saines.
Pour le test A :
- sur 1 000 malades, 990 sont testés positifs, 10 négatifs ;
- sur 999 000 sains, 9 990 sont testés positifs, 989 010 négatifs.

Ainsi Pierre fait partie des 9 990 + 990 = 10 980 testés positifs.
La proportion qu'il appartienne à la population des malades parmi ceux qui ceux testés positifs est de $\dfrac{990}{10980} \simeq 9,02\%$

Pour le test B :
- sur 1 000 malades, tous sont testés positifs ;
- sur 999 000 sains, 19 980 sont testés positifs, 979 020 négatifs.

Ainsi Anaïs fait partie des 19 980 + 1000 = 20 980 testés positifs.
La proportion qu'elle appartienne à la population des malades parmi ceux qui ceux testés positifs est de $\dfrac{1000}{20980} \simeq 4,77\%$

Exercice Informatique-Algorithmique **Chat c'est chouette, il y a des mulots !**

12 points

1. Fin du 1er mois : 11 mulots, du 2d mois : 22 mulots, du 3e mois : 44 mulots.
   A l'aide de la calculatrice (ou tableur) on détermine que le nombre de mulots dépassera 10 millions en 21 mois.

A21 =A20*2

	A	B
1	11	
2	22	
3	44	
4	88	
5	176	
6	352	
7	704	
8	1408	
9	2816	
10	5632	
11	11264	
12	22528	
13	45056	
14	90112	
15	180224	
16	360448	
17	720896	
18	1441792	
19	2883584	
20	5767168	
21	11534336	
22		

2. Il y a 88 mulots au 4e mois, donc les chats mangent 60 mulots par mois à partir du 5e mois.
   Toujours avec une calculatrice (ou tableur) ou avec un programme on détermine que le nombre de mulots dépassera 100 000 en 16 mois. Les chats ne ralentissent que très peu la progression des mulots.

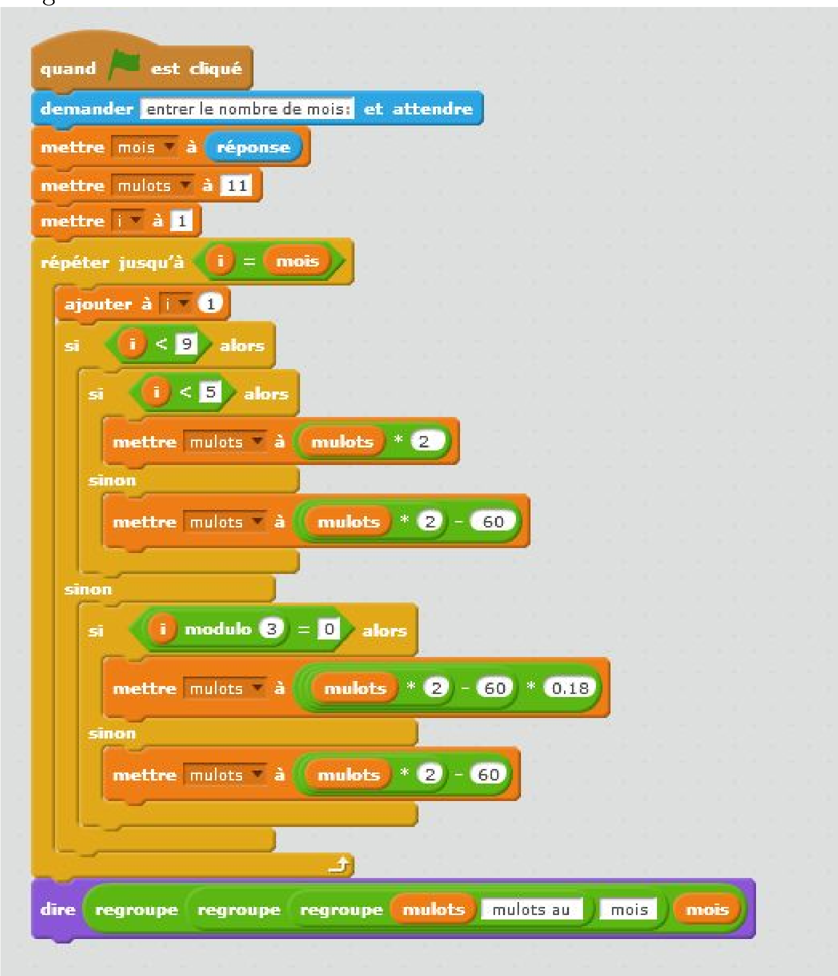
A16 =A15*2-60

	A	B
1	11	
2	22	
3	44	
4	88	
5	116	
6	172	
7	284	
8	508	
9	956	
10	1852	
11	3644	
12	7228	
13	14396	
14	28732	
15	57404	
16	114748	

3. Programme Python :

```python
n=eval(input("entrer le nombre de mois "))
a=11
i=1
while i<n:
    i=i+1
    if i<5:
        a=a*2
    elif 5<=i<9:
        a=a*2-60
    else:
        if i%3==0:
            a=(a*2-60)*0.18
        else:
            a=a*2-60
print("le nombre de mulots est",a,"au bout de ",n,"mois")
```

Programme Scratch :



4. Les chouettes semblent avoir ralenti la progression des mulots pendant plus de 50 mois mais cela ne dure pas. La population dépasse 3000 mulots en 77 mois et ne cesse ensuite de croitre