Rallye mathématique du Centre

Éléments de correction de l'épreuve officielle 2019

Exercice n°1 **Au bonheur, l'escape game !**

6 points

-L'heure de l'horloge de la pièce centrale est un entier parmi : 2,3,5,7 et 11.
- Les heures des trois autres pièces sont trois entiers consécutifs compris entre 1 et 12.
Soit :
-1,2,3 avec 6 possibilités de répartitions des heures sur les 3 horloges à savoir (1,2,3) ;(1,3,2) ;(2,1,3) ;(2,3,1) ;(3,1,2) et (3,2,1)
-2,3,4 avec de la même façon 6 possibilités de répartitions des heures sur les 3 horloges
-3,4,5 avec de la même façon 6 possibilités de répartitions des heures sur les 3 horloges
-4,5,6 avec de la même façon 6 possibilités de répartitions des heures sur les 3 horloges
-5,6,7 avec de la même façon 6 possibilités de répartitions des heures sur les 3 horloges
-6,7,8 avec de la même façon 6 possibilités de répartitions des heures sur les 3 horloges
-7,8,9 avec de la même façon 6 possibilités de répartitions des heures sur les 3 horloges
-8,9,10 avec de la même façon 6 possibilités de répartitions des heures sur les 3 horloges
-9,10,11 avec de la même façon 6 possibilités de répartitions des heures sur les 3 horloges
-10,11,12 avec de la même façon 6 possibilités de répartitions des heures sur les 3 horloges

Ce qui donne $10 \times 6 = 60$ possibilités pour chacun des nombres 2,3,5,7 et 11.
Au total, il y a donc au maximum 300 combinaisons possibles à tester, à raison de 3 secondes par combinaison cela fait 900 secondes soit 15 minutes.
Tiphaine a donc raison, ils n'ont pas assez de temps pour être sûr de pouvoir sortir.

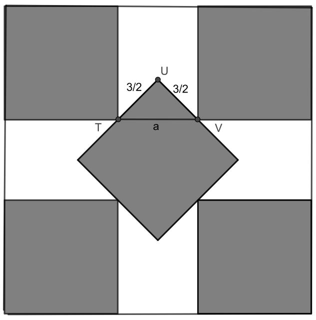
Exercice n°2 — 5 chocolats^3 en boîte^2

8 points

• Projet de Yann

La base de la boîte est un carré de 9 cm de côté.

•Projet de Catherine

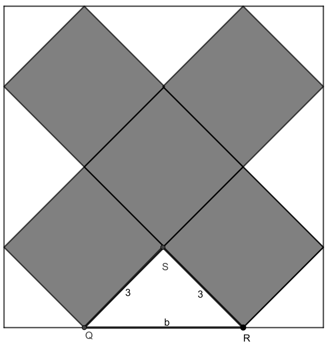


En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle TUV, il vient :

$a^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$ d'où $a = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

La base de la boîte est un carré de $6 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm de côté.

•Projet de Jérôme



En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle QRS, il vient : $b^2 = 9 + 9$ d'où $b = 3\sqrt{2}$

La base de la boîte est un carré de $6\sqrt{2}$ cm de côté.

Conclusion

$6 + \frac{3\sqrt{2}}{2} < 6\sqrt{2} < 9$.   C'est donc le projet de Catherine qui est le plus économique.

Exercice n°3 — Il faut qu'un tiroir soit ouvert ou fermé

8 points

1. Un tiroir sera fermé s'il possède un nombre pair de diviseurs, il sera ouvert sinon.
   Il faut donc lister les diviseurs de 12 : 1,2,3,4,6,12 soit 6 diviseurs donc le tiroir 12 est fermé.
2. Donner la position finale des 20 premiers tiroirs.
   Les tiroirs 1,4,9,16 sont ouverts, les autres fermés.
3. De façon générale, les nombres qui ont un nombre impair de diviseurs sont les carrés parfaits ; tous les autres ont un nombre pair de diviseurs. Les tiroirs ouverts après le passage de la 300^{eme} personne sont les numéros :
   1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289.
   Il y a 17 tiroirs ouverts en tout (18^2=324).

Exercice n°4 Le peintre 10 traits

6 points

1.

couleur	on veut	première fois	deuxième fois	total	il faut	on ajoute
blanc	1	1	2	3	3	rien
rose	4	5	2	7	12	5

Il faut 4 fois plus de rose que de blanc, donc avec 3 parts de blanc, il faut 12 parts de rose.

2.

couleur	on veut	on a	il faut	on ajoute
blanc	6	2	36	34
violet	2	1	12	11
bleu	1	6	6	rien

Exercice n°5 La belle échappée !

6 points

Distance parcourue par Florence à 42 km/h en 10 min :
donc d = 42 km/h $\times$ 10/60 h = 7 km
Distance parcourue par Olivier à 24 km/h en 10 min :
donc d = 24 km/h $\times$ 10/60 h = 4 km

Donc quand Florence fait demi-tour, les deux cyclistes sont séparés de 3 km.
Florence roule à 36 km/h alors que Olivier roule à 24 km/h.

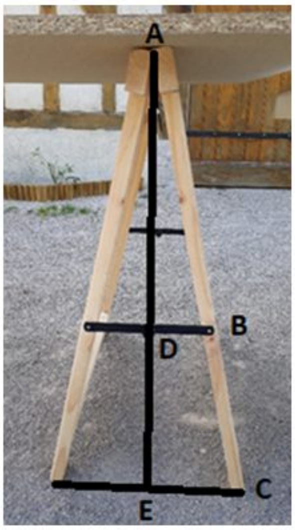
En 1 min, Florence parcourt : d = v $\times$ t donc d = 36 km/h $\times$ 1/60 h = 0,6 km
En 1 min, Olivier parcourt : d = v $\times$ t donc d = 24 km/h $\times$ 1/60 h = 0,4 km

Donc en 3 min, Florence aura parcouru 1,8 km et Olivier aura parcouru 1,2 km et donc ils se retrouveront à ce moment-là puisque 1,8 km + 1,2 km = 3 km.
Donc au final Florence aura parcouru 8,8 km toute seule et Olivier aura parcouru 5,2 km tout seul.

Exercice n°6 | (i) Les tréteaux pour mettre la table

9 points

1ère option :



On cherche à calculer DB sachant que AB = 41 cm.

Hauteur totale table en plastique : 65 cm + 5 cm = 70 cm

70 cm – 2 cm = 68 cm donc [AE] doit mesurer 68 cm.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AEC rectangle en E :

$CE^2 = 76^2 - 68^2 = 1152$ donc $CE \approx 34$ cm.

(DB) // (EC) donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{CE} \text{ donc } \frac{41}{76} = \frac{DB}{34} \text{ donc } DB \approx 18{,}3 \text{ cm.}$$

Donc la longueur de la barre métallique doit être d'environ 36,6 cm.

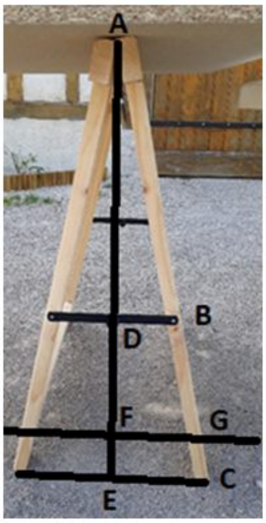
2ème option :

Cette fois on cherche à calculer AB sachant que DB = 10 cm.

Toujours d'après le théorème de Thalès, $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{CE}$ donc $\frac{AB}{76} = \frac{10}{34}$ donc $AB \approx 22{,}4$ cm

Il faut fixer la barre à 22,4 cm du sommet A du tréteau.

3ème option :



On chercher à calculer AG sachant que AF = 68 cm.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ADB rectangle en D :

$DA^2 = 41^2 - 10^2 = 1581$ donc $DA \approx 39{,}8$ cm

(DB) // (FG) donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AD}{AF} = \frac{AB}{AG} \text{ donc } \frac{39{,}8}{68} = \frac{41}{AG} \text{ donc } AG \approx 70 \text{ cm}$$

Donc il faut couper 6 cm à chaque pied des tréteaux.

Exercice n°7 — Mise en boîte de la pâte

8 points

Il faut d'abord calculer la surface du petit triangle équilatéral, découpé à partir du grand en enlevant les coins grisés. Soit h la hauteur de la boîte. Un « coin » est formé de deux triangles rectangles dont un des petits côtés est h, et les angles ont pour mesure 30 et 60 degrés. Donc le côté qu'il faut enlever (deux fois) au côté (10 cm) du grand triangle n'est autre que la hauteur d'un triangle équilatéral de côté $2h$. Soit $h\sqrt{3}$.
Le petit triangle équilatéral a donc pour côté (en cm) : $10 - 2h\sqrt{3}$.

Comme un côté est positif, ceci implique que $10 - 2h\sqrt{3} \geq 0$ donc $h \leq \dfrac{5}{\sqrt{3}}$. Soit $h < 2,9$.

Sa surface est :

$$S = (10 - 2h\sqrt{3})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \cdot (5 - h\sqrt{3})^2$$

Et le volume de la boîte est :

$$V = h \cdot (5 - h\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}$$

$$V = \sqrt{3} \cdot (25h - 10h^2\sqrt{3} + 3h^3)$$

Dans un tableur ($0 < h < 2,9$), le maximum est atteint pour $h = 0,96$ cm (approximativement).

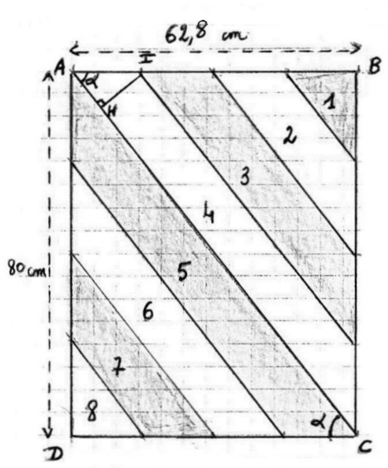
0	0		
0,1	4,03532317		
0,2	7,50182326		
0,3	10,4306772		
0,4	12,8530618		
0,5	14,8001541		
0,6	16,303131		
0,7	17,3931694		
0,8	18,1014462	0,91	18,4768256
0,9	18,4591383	0,92	18,4913501
1	18,4974226	0,93	18,5027429
1,1	18,2474761	0,94	18,511035
1,2	17,7404756	0,95	18,5162579
1,3	17,0075981	0,96	18,5184425
1,4	16,0800205	0,97	18,5176201
1,5	14,9889197	0,98	18,5138219
1,6	13,7654726	0,99	18,507079
1,7	12,4408562	1	18,4974226
1,8	11,0462473	1,01	18,4848839
1,9	9,61282283	1,02	18,4694941
2	8,17175976		
2,1	6,75423498		
2,2	5,39142541		
2,3	4,11450796		
2,4	2,95465955		
2,5	1,94305708		
2,6	1,11087747		
2,7	0,48929765		
2,8	0,10949451		
2,9	0,00264499		

Exercice n°8	L'enseigne du barbier en noir et blanc

10 points

1. La longueur du rectangle est de 80 cm.
   La largeur du rectangle est de 20π cm soit soit environ 62,8 cm au mm près.

2. Soit α l'angle formé par chaque bande avec l'horizontale et soit l la largeur d'une bande.



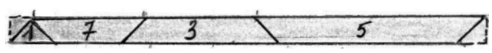
On a alors $\tan\alpha = \dfrac{80}{20\pi}$ d'où $\alpha \approx 51,9°$. Par ailleurs $\sin\alpha = \dfrac{l}{\frac{20\pi}{4}} = \dfrac{l}{5\pi}$.

Ainsi $l = 5\pi\sin\alpha$ soit $l \approx 12,4$cm.

Autre méthode :

On peut aussi utiliser le théorème de Pythagore pour le calcul de la longueur, d, de la diagonale du rectangle : $d^2 = 80^2 + (20\pi)^2 = 400\left(\pi^2 + 16\right)$ d'où $d = 20\sqrt{\pi^2+16}$.
et près avoir remarqué que : $\sin\alpha = \dfrac{l}{\frac{20\pi}{4}} = \dfrac{80}{d}$. On obtient $l = \dfrac{20\pi}{\sqrt{\pi^2+16}}$ cm.

3. On s'intéresse aux morceaux de bande noire. Le cas des bandes blanches est identique pour raison de symétrie centrale. On recole les morceaux de la façon suivante :



Les raccordements sont assurés par les angles de raccordement : ils sont supplémentaires.

Avec les morceaux 5, 3, 1 et 7 on obtient un parallélogramme. Le plus petit rectangle le contenant est obtenu en ajoutant à chaque bout un petit triangle rectangle identique à AHI.

La longueur de ce rectangle est $L = AC + \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}AC + AH = 2AC + AH$.

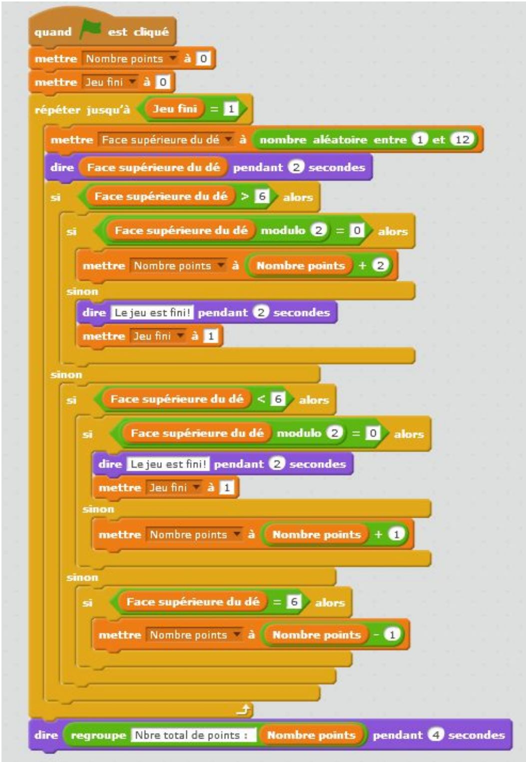
AC se calcule par exemple à l'aide du théorème de Pythagore, on trouve $AC = 20\sqrt{\pi^2+16} \approx 101,7$cm.
AH se calcule par exemple à l'aide de la trigonométrie, on trouve $AH = 5\pi\cos\alpha = \dfrac{5\pi^2}{\sqrt{\pi^2+16}}$ soit $AH \approx 9,7$cm.

Ainsi, $L = 40\sqrt{\pi^2+16} + \dfrac{5\pi^2}{\sqrt{\pi^2+16}} \approx 213$ cm.

Les rouleaux de bandes adhésives de 2,20 m de long suffisent donc.

Exercice Informatique-Algorithmique — Un impair ou un pair et on perd !

12 points

1. 1. Avec la séquence 8, 6, 5, 3 et 11, on marque 3 points.
2. 2. Avec la séquence 5, 12, 6, 8, 9 et 3, on marque 4 points et après avoir fait 9 le jeu se termine donc il n'a pas pu faire un 3 ensuite.
3. 


```python
from random import*
S=0
P=True
while P==True:
    de=randint(1,12)
    print(de)
    if de >6 :
        if de %2 ==0:
            S=S+2
        else :
            P=False
    if de <6:
        if de %2==0:
            P=False
        else :
            S=S+2
    if de ==6:
        P=False
        S=S-1
print("le nombre de point est ",S)
```