RALLYE MATHÉMATIQUE
DU CENTRE ET DU CONGO

Épreuve préparatoire - Décembre 2017

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.
Les solutions partielles seront examinées.
Bon courage et rendez-vous le 13 mars pour l'épreuve officielle.

Exercice n°1 — Les nombres de Friedman

8 points

Un nombre de Friedman est un nombre entier qui est égal au résultat obtenu en appliquant une formule dans laquelle apparaissent TOUS les chiffres qui le composent et uniquement ceux là, chaque chiffre intervenant le nombre exact de fois où il est présent dans l'écriture de ce nombre. Dans cette formule, on peut utiliser des nombres écrits avec ses chiffres, des parenthèses, l'élévation à la puissance et les quatre opérations $+$, $-$, $\times$, $\div$.
Dans la suite, les nombres utilisés sont écrits dans le système habituel de notation (en base 10).

Par exemple : $25 = 5^2$, $289 = (8+9)^2$, $37\,668 = 6 \times 73 \times 86$, $2\,048 = \dfrac{8^4}{2} + 0$, etc.

Voici la liste des nombres de Friedman inférieurs à 10 000 :
25, 121, 125, 126, 127, 128, 153, 216, 289, 343, 347, 625, 688, 736, 1 022, 1 024, 1 206, 1 255, 1 260, 1 285, 1 296, 1 395, 1 435, 1 503, 1 530, 1 792, 1 827, 2 048, 2 187, 2 349, 2 500, 2 501, 2 502, 2 503, 2 504, 2 505, 2 506, 2 507, 2 508, 2 509, 2 592, 2 737, 2 916, 3 125, 3 159, 3 281, 3 375, 3 378, 3 685, 3 784, 3 864, 3 972, 4 088, 4 096, 4 106, 4 167, 4 536, 4 624, 4 628, 5 120, 5 776, 5 832, 6 144, 6 145, 6 455, 6 880, 7 928, 8 092, 8 192, 9 025, 9 216, 9 261.

Choisir un maximum de nombres dans la liste ci-dessus (parmi ceux qui n'ont pas été donnés en exemple) et montrer que ces nombres sont bien des nombres de Friedman.

Exercice n°2 — Le code se crée

5 points

Dans ce codage, chaque lettre est remplacée par ses coordonnées obtenues grâce à la clé dans la grille. Pour coder un message avec la clé secrète MATHS, il faut commencer par supprimer la ponctuation puis associer à chaque lettre du texte ses coordonnées dans la grille. On a ainsi : a=MM, b=MA, c=MT ...
Si on a besoin d'utiliser la lettre W, on la remplacera par la lettre V.

clé	M	A	T	H	S
M	a	b	c	d	e
A	f	g	h	i	j
T	k	l	m	n	o
H	p	q	r	s	t
S	u	v/w	x	y	z

1. Avec la clé MATHS.
   (a) Coder le message suivant : Pythagore est philosophe
   (b) Décoder le message suivant : TSTH MSHHHS MAAHMSTH MSTH MMSMHSTSTTTHMS
2. On a choisi un autre mot clé que MATHS.
   Le message codé de la question 1 (b) devient : YNYO RNOOON RAAORNYO RNYO RRNRONYNYYYORN
   Quel était le mot clé ?

Exercice n°3 — L'écart d'heure

5 points

Un horloger se voit confier deux montres pour réglage.
Le lendemain matin, un mardi, il les règle toutes les deux sur 8 heures puis les démarre au même instant lorsqu'il est exactement 8 heures sur son horloge de référence.
Au bout de quelque temps, il constate que l'une des montres prend une seconde de retard toutes les heures et l'autre deux secondes d'avance toutes les heures par rapport à son horloge de référence.

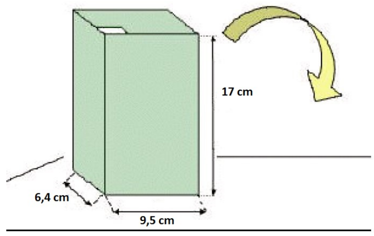
1. Au bout de combien de temps auront-elles exactement 7 minutes de différence ?

2. Le mardi suivant, quelles heures affichent les deux montres lorsqu'il est exactement 8 heures à son horloge de référence ?

Exercice n°4 — La brique de lait

5 points

Une brique de lait a la forme d'un pavé droit de dimensions 6,4 cm, 9,5 cm et 17 cm.
La face supérieure est munie, dans l'un des coins, d'un orifice carré de 2 cm de côté.
Maxence a perdu le bouchon de cette ouverture, il sait que la brique n'est pas pleine mais il ne connaît pas la hauteur de lait restant.
Il décide de ranger cette brique au réfrigérateur mais faute de place, il la couche horizontalement (voir schéma) et le lait ne coule pas !
Quelle est la hauteur maximale de lait contenu dans la brique lorsqu'elle est posée verticalement sur la face de dimensions 9,5 cm et 6,4 cm ?

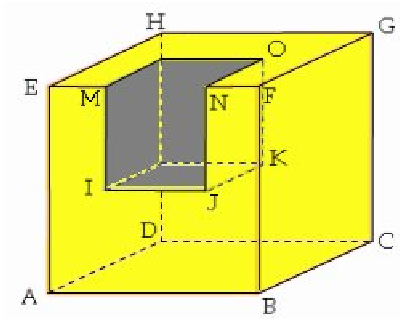


Exercice n°5 — Deux fourmis sur un cube « écubé »

8 points

ABCDEFGH est un cube de 4 cm d'arête. Il est « évidé » d'un autre cube de 2 cm d'arête tel que EM = NF = 1 cm (voir schéma ci-contre).

1. Réaliser un patron de ce cube évidé.
2. Une fourmi rouge part de A pour se rendre en O. Elle ne se déplace que sur les faces planes du solide. Elle emprunte le trajet AIKO.
   De le même façon, une fourmi noire part de A pour se rendre en O mais emprunte le trajet AJKO.
   Quelle est la fourmi ayant effectué le trajet le plus court ?
   Tracer en rouge et en noir les deux trajets sur le patron.
3. Toujours en circulant sur les parties planes du solide, est-il possible d'emprunter un chemin plus court pour rejoindre O en partant de A ?
   Si oui, donner sa longueur et le tracer en vert sur votre patron.



Exercice n°6 — Qui perd double !

5 points

Trois joueurs entament une suite de trois parties où chacun dispose au début d'une certaine somme et n'ajoutera aucun euro en plus durant ces parties.
Ils conviennent que le perdant de chaque partie doublera l'avoir de chacun des deux autres en fin de cette partie.
Ils jouent les trois parties et perdent chacun une partie.
A la fin de la dernière partie, chacun possède 16 euros. De combien chacun disposait-il au début du jeu ?