Rallye mathématique du Centre

Correction de l'épreuve préparatoire décembre 2017

Exercice n°1 **Les nombres de Friedman**

8 points

Il n'y a pas toujours unicité.

$25 = 5^2$	$121 = 11^2$
$125 = 5^{1+2}$	$126 = 6 \times 21$
$127 = -1 + 2^7$	$128 = 2^{8-1}$
$153 = 3 \times 51$	$216 = 6^{2+1}$
$289 = (8+9)^2$	$343 = (3+4)^3$
$347 = 7^3 + 4$	$625 = 5^{6-2}$
$688 = 8 \times 86$	$736 = 7 + 3^6$
$1022 = 2^{10} - 2$	$1024 = (4-2)^1 0$
$1206 = 6 \times 201$	$1255 = 5 \times 251$
$1260 = 6 \times 210$	$1285 = (1+2^8) \times 5$
$1296 = 6^{(9-1)/2}$	$1395 = 15 \times 93$
$1435 = 35 \times 41$	$1503 = 3 \times 501$
$1530 = 3 \times 510$	$1792 = 7 \times 2^{9-1}$
$1827 = 21 \times 87$	$2048 = 8^4/2 + 0$
$2187 = (2+1^8)^7$	$2349 = 29 \times 3^4$
$2500 = 50^2 + 0$	$2501 = 50^2 + 1$
$2502 = 2 + 50^2$	$2503 = 50^2 + 3$
$2504 = 50^2 + 4$	$2505 = 50^2 + 5$
$2506 = 50^2 + 6$	$2507 = 50^2 + 7$
$2508 = 50^2 + 8$	$2509 = 50^2 + 9$
$2592 = 2^5 \times 9^2$	$2737 = (2 \times 7)^3 - 7$
$2916 = (1 \times 6 \times 9)^2$	$3125 = (3 + 1 \times 2)^5$
$3159 = 9 \times 351$	$3281 = (3^8 + 1)/2$
$3375 = (3+5+7)^3$	$3378 = (7+8)^3 + 3$
$3685 = (3^6 + 8) \times 5$	$3784 = 8 \times 473$
$3864 = 3 \times (-8 + 6^4)$	$3972 = 3 + (9 \times 7)^2$
$4088 = 8^4 - 8 - 0$	$4096 = (4 + 0 \times 9)^6$
$4106 = 4^6 + 10$	$4167 = 4^6 + 71$
$4536 = 56 \times 3^4$	$4624 = (64+4)^2$
$4628 = 68^2 + 4$	$5120 = 5 \times 2^{10}$
$5776 = 76^{7-5}$	$5832 = (2 \times 5 + 8)^3$
$6144 = 6 \times 4^{4+1}$	$6145 = 6 \times 4^5 + 1$
$6455 = (6^4 - 5) \times 5$	$6880 = 8 \times 860$
$7928 = 89^2 - 7$	$8092 = 90^2 - 8$
$8192 = 8 \times 2^{9+1}$	$9025 = 95^2 + 0$
$9216 = 1 \times 96^2$	$9261 = 21^{9-6}$

Exercice n°2 **Code secret**

5 points

1. (a) La réponse est HMSHHSATMMAATSHTMS MSHHHS HMATAHTATSHHTSHMATMS
   (b) le message est : ON EST BIEN EN AUTOMNE
2. Le mot clé était : RAYON

Exercice n°3 — L'écart d'heure

5 points

1. Écart de 3 s par heure donc pour avoir 7 minutes, il faut $\frac{420}{3} = 140$ h soit 5 jours et 20 heures.

2. Au bout de 7 jours soit 168 h, il y aura 168 s de retard sur la première montre et 336 s d'avance sur la seconde.

   La première marque (8 h - 2 min 48 s) soit 7 h 57 min 12 s.

   La seconde marque (8 h + 5 min 36 s) soit 8 h 5 min 36 s.

Exercice n°4 — La brique de lait

5 points

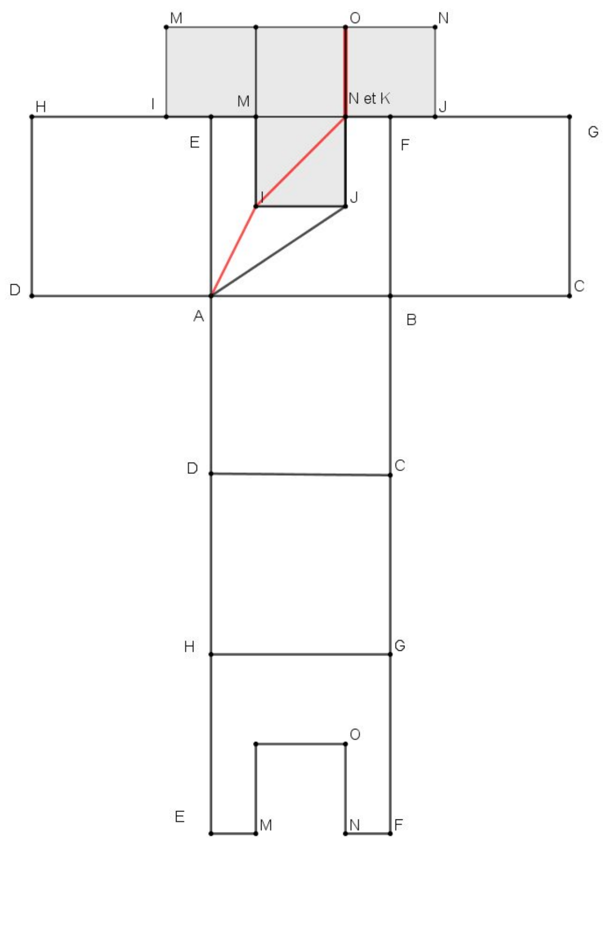
Calculons le volume maximum de lait contenu dans la brique :
$V_{max} = (9,5 - 2) \times 17 \times 6,4$
$V_{max} = 816 \text{ cm}^3$

Nous obtenons ainsi la hauteur maximale de lait dans la brique lorsqu'elle placée verticalement :
$h_{max} = \frac{816}{9,5 \times 6,4}\ cm$
d'où $h_{max} \approx 13,4\ cm$

Exercice n°5 — Deux fourmis sur un cube « écubé »

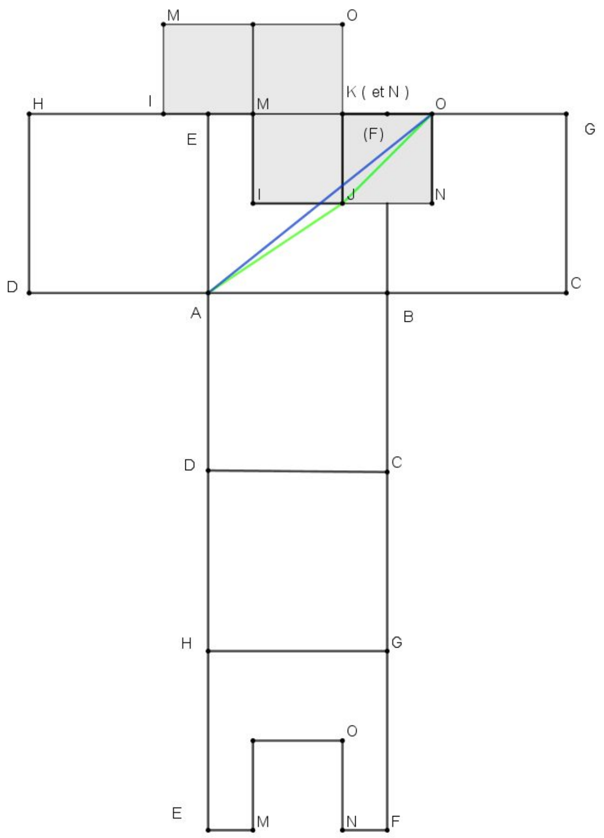
8 points

1. Voici un patron de ce cube évidé.



2. En appliquant le théorème de Pythagore à de judicieux triangles rectangles, on obtient :
   Pour le trajet AIKO (en rouge) :
   AI=$\sqrt{5}$ cm et IK=$2\sqrt{2}$ cm d'où la longueur du chemin AIKO.
   AIKO = AI + IK + KO
   AIKO = $\sqrt{5} + 2\sqrt{2} + 2$ cm
   AIKO $\approx$ 7,1 cm
   Pour le trajet AJKO (en noir) :
   AJ=$\sqrt{13}$ cm d'où la longueur du chemin AJKO.
   AJKO = AJ + JK + KO
   AJKO = $\sqrt{13} + 2 + 2$ cm
   AJKO $\approx$ 7,6 cm
   Donc le trajet le plus court est **AIKO**.
3. Calculons la longueur du **trajet AJO** (en vert) :
   AJ=$\sqrt{13}$ cm et JO=IK=$2\sqrt{2}$ cm d'où la longueur du chemin AJO.
   AJO = AJ + JO
   AJO = $\sqrt{13} + 2\sqrt{2}$ cm
   AJO $\approx$ 6,4 cm

   Donc le trajet **AJO** est un trajet plus court que ceux de la question 2).



Addendum :
Toujours en circulant sur les parties planes du solide, il possible d'emprunter un chemin encore plus court pour rejoindre O en partant de A (**trajet en bleu**).
En utilisant un autre développement de la partie écubée. On utilise le théorème de Pythagore pour calculer la longueur du segment [AO].

AO = $\sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$ cm

or $\sqrt{41} < \sqrt{13} + 2\sqrt{2}$ donc **ce trajet est encore plus court**.

Exercice n°6 — Qui perd double !

5 points

On note A, B et C les trois joueurs :

	A	B	C
Avoir après la 3ème partie	16	16	16
3eme partie	gagnant	gagnant	perdant
Avoir avant la 3ème partie	8	8	32
2eme partie	perdant	gagnant	gagnant
Avoir avant la 2ème partie	28	4	16
1ere partie	gagnant	perdant	gagnant
Avoir avant la 1ère partie	14	26	8

Exercice n°7 — Des pensées sans trop dépenser

8 points

Soit x le petit côté du triangle de pensées de grand côté 60 m (qui est le même que celui de côté 80).
Calculons les surfaces de chaque morceaux.
Tulipes : $st(x) = (80 - x)(60 - x) = 4800 - 140x + x^2$.
Pensées : $sp(x) = \dfrac{1}{2}(60x + 80x) = 70x$.
Gazon : $sg(x) = 60 \times 80 - (4800 - 140x + x^2 + 70x) = 70x - x^2$.
Pour les prix, on multiplie st par 8, sp par 7 et sg par 4.
Le prix total est alors : $Pt(x) = 38400 - 350x + 4x^2$.
Il faut minimiser cette valeur. En utilisant un tableur on obtient le minimum du prix pour x compris entre 43,7 et 43,8 (en m). Le prix total est alors : $Pt = 30\ 743,76$ euros.
Par calcul, on obtient le minimum pour $x = \frac{350}{8} = 43,75$. Le prix est $Pt = 30\ 743,75$ euros.

Exercice n°8 — Ne jetons pas les pions !

8 points

1. Il y a 32 cases libres et sur ces 32 cases, 8 cases le font perdre.
   La probabilité de perdre est donc de $\dfrac{8}{32}$ soit $\dfrac{1}{4}$.

2. Le joueur perd s'il tire un pion jaune. Il reste 7 pions jaunes sur les 31 pions restants dans le 2^e sac.
   La probabilité de perdre est donc de $\dfrac{7}{31}$.

3. Si le joueur choisit l'option 1 :
   Avec la couleur bleue : quelle que soit le numéro de case tirée, il perd.
   Avec la couleur rouge : il y a 4 cases (E3, D4, E4, F5) sur les 12 restantes pour lesquelles il ne perd pas.
   La probabilité de ne pas perdre est de $\dfrac{4}{12}$ soit $\dfrac{1}{3}$.
   Avec la couleur verte : il ne peut pas choisir de pion vert car ils sont tous posés.
   Avec la couleur jaune : il y a 3 cases (A3, A6, C6) sur les 12 restantes pour lesquelles il ne perd pas.
   La probabilité de ne pas perdre est de $\dfrac{3}{12}$ soit $\dfrac{1}{4}$.

   Si le joueur choisit l'option 2 :
   Avec la case A3 : il doit tirer un pion jaune. Il en reste 4 sur les 12 pions restants.
   La probabilité de ne pas perdre est de $\dfrac{4}{12}$ soit $\dfrac{1}{3}$.
   Avec la case A6 : il doit tirer un pion jaune. Il en reste 4 sur les 12 pions restants.
   La probabilité de ne pas perdre est de $\dfrac{4}{12}$ soit $\dfrac{1}{3}$.
   Avec la case B3 : il perd quelle que soit la couleur du pion tiré.

Avec la case B4 : il perd quelle que soit la couleur du pion tiré.
Avec la case C3 : il perd quelle que soit la couleur du pion tiré.
Avec la case C5 : il perd quelle que soit la couleur du pion tiré.
Avec la case C6 : il doit tirer un pion jaune. Il en reste 4 sur les 12 pions restants.
La probabilité de ne pas perdre est de $\frac{4}{12}$ soit $\frac{1}{3}$.
Avec la case D4 : il doit tirer un pion rouge. Il en reste 2 sur les 12 pions restants. La probabilité de ne pas perdre est de $\frac{2}{12}$ soit $\frac{1}{6}$.
Avec la case E1 : il perd quelque soit la couleur du pion tiré.
Avec la case E3 : il doit tirer un pion rouge. Il en reste 2 sur les 12 pions restants.
La probabilité de ne pas perdre est de $\frac{2}{12}$ soit $\frac{1}{6}$.
Avec la case E4 : il doit tirer un pion rouge. Il en reste 2 sur les 12 pions restants.
La probabilité de ne pas perdre est de $\frac{2}{12}$ soit $\frac{1}{6}$.
Avec la case F5 : il doit tirer un pion rouge. Il en reste 2 sur les 12 pions restants.
La probabilité de ne pas perdre est de $\frac{2}{12}$ soit $\frac{1}{6}$.

Donc soit il choisit l'option 1 avec la couleur rouge, soit il choisit l'option 2 avec les cases A3 ou A6 ou C6. Dans chaque cas la probabilité de ne pas perdre est de $\frac{1}{3}$.