Rallye mathématique du Centre

Éléments de correction de l'épreuve officielle 2018

Exercice n°1 — Nombres Harshad

8 points

1. **11 est le plus petit nombre qui n'est pas Harshad.**
2. **Voici la liste de tous les nombres Harshad inférieurs à 200 :**
   1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 18, 20, 21, 24, 27, 30, 36, 40, 42, 45, 48, 50, 54, 60, 63, 70, 72, 80, 81, 84, 90, 100, 102, 108, 110, 111, 112, 114, 117, 120, 126, 132, 133, 135, 140, 144, 150, 152, 153, 156, 162, 171, 180, 190, 192, 195, 198, 200.
3. 10^{32} **est un nombre Harshad s'écrivant avec 33 chiffres.**
4. $10^{23}+2$ **est un nombre Harshad s'écrivant avec 24 chiffres et se terminant par 2.**
5. **Non, il n'existe pas de nombre Harshad premier strictement supérieur à 7.**
   En effet, si un tel nombre N existait, il serait :
   - divisible par la somme de ses chiffres
   - supérieur à 10 (car le plus petit nombre premier strictement supérieur à 7 est 11).
   En observant que la somme des chiffres d'un entier supérieur à 10 est toujours strictement inférieure à cet entier, il vient :
   • si la somme des chiffres vaut 1 alors le nombre vaut 1 qui est inférieur à 7 ou il est une puissance de 10 et n'est donc pas premier.
   • sinon, la somme de ses chiffres est alors un diviseur de N compris entre 1 et N, ce qui est impossible car N est premier.
   c.q.f.d

Exercice n°2 — Éteindre le feu

5 points

1. **Un canadair transporte 6 000 L d'eau soit 6 m^3.**
   Durée de l'écopage : t=$\dfrac{6}{0,5}$ **= 12 s.**
   Distance parcourue : d=$110 \times \dfrac{12}{3600} \approx 0,367$ **km**

   Pendant l'écopage le canadair parcourt 367 m.

2. **4h = 240 min ;** $\dfrac{240}{3} = 80$
   Les avions ont fait 80 largages chacun.

   $80 \times 4 \times 6000$=**1 920 000 L**

   Les canadairs ont largué le 26 juillet 1920 m^3.

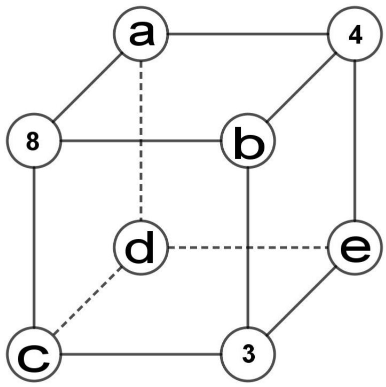
Exercice n°3	Quand le cube fait sa somme

5 points

Les 6 conditions imposées amènent au système suivant qui leur équivaut :

$$\begin{cases} a = 6 - b \\ e = 11 - b \\ c = 7 - b \\ d = 2b - 3 \end{cases}$$

où a,b,c,d et e sont des nombres entiers positifs.



b joue le rôle d'un paramètre et l'on a :

$$\begin{cases} b \geq 2 \textbf{ car } d \geq 0 \\ b \leq 6 \textbf{ car } a \geq 0 \end{cases}$$

On a donc 5 solutions pour (a,b,c,d,e).

Pour b=2, (4,2,5,1,9)
Pour b=3, (3,3,4,3,8)
Pour b=4, (2,4,3,5,7)
Pour b=5, (1,5,2,7,6)
Pour b=6, (0,6,1,9,5)

Exercice n°4	Un problème renversant

6 points

1. **Il faut calculer BC et comparer avec la hauteur du verre.**
   On peut raisonner sur les égalités d'aires car le volume est proportionnel à l'aire.

   Les deux aires coloriées sont égales et elles font 63 cm^2 car 7 cm $\times$ 9 cm $=$ 63 cm^2
   Or Aire(ABC) $= \dfrac{AB \times BC}{2}$ donc $\dfrac{7 \times BC}{2} = 63$ donc <u>BC = 18 cm</u>.

2. **On peut aussi calculer l'aire de ABC d'une autre façon :**
   Aire(ABC) $= \dfrac{AH \times AC}{2}$. Or AH= 7 $\times sin\alpha$
   Pour calculer AC on peut appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABC.
   AC^2 = AB^2 + BC^2
   AC^2 = 7^2 + 18^2 donc AC = $\sqrt{373}$
   Ainsi
   Aire(ABC) $= \dfrac{AH \times AC}{2} = \dfrac{7 \times \sin\alpha \times \sqrt{373}}{2} = 63$
   On obtient $\alpha \approx 69°$, il faut incliner le verre de 69°.

   <u>Autre méthode :</u>
   On a $\alpha = \widehat{BAC}$ car ils sont alternes-internes. Ainsi $\tan\alpha = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{18}{7}$ d'où $\alpha \approx 69°$

Exercice n°5 **Les courses des robots R2 et D2**

6 points

• Robot R2 :

On note que si M et N sont deux points du parcours qui ne sont ni sur une horizontale, ni sur une verticale, les chemins les plus courts sur le quadrillage sont ceux dont la longueur est le demi-périmètre du rectangle de sommets M et N et dont les côtés sont horizontaux ou verticaux.

Il en est ainsi pour les parcours les plus courts des robots si les surfaces de stockage laissent libre au moins un parcours du type précédent. Dans le cas contraire, il faut contourner l'obstacle par le chemin le plus court.
Pour le robot R2 les étapes sont fixées. Seuls les parcours BC et FG sont dans le dernier cas .

On note Ω le point de départ et Φ le point d'arrivée.
On trouve pour parcours d'étape les plus courts (en mètres) :
$\Omega A = 19$; $AB = 6$; $BC = 8$; $CD = 10$; $DE = 9$; $EF = 9$; $FG = 12$; $G\Phi = 16$.
Les chemins les plus courts pour R2 mesurent 79 m.

• Robot D2 :

Il faut désormais choisir les étapes pour minimiser le parcours.

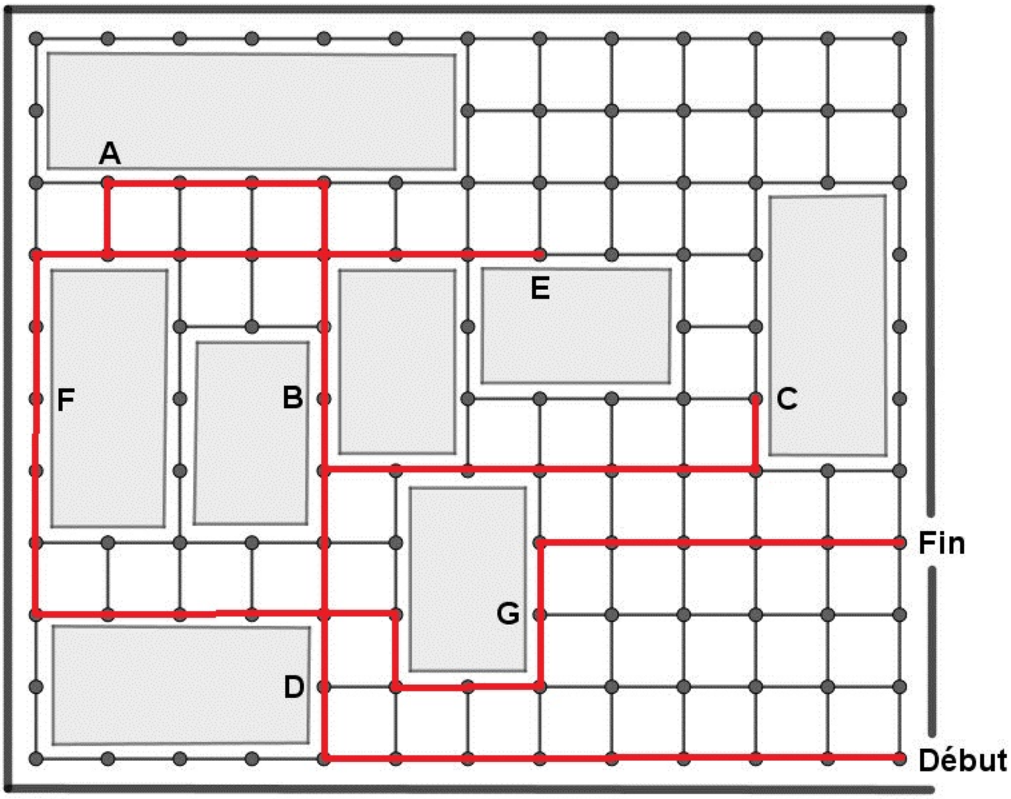
On adopte la stratégie suivante :
. on choisit les points étapes pour avoir le moins de retours en arrière ;
. on choisit pour chaque étape un parcours de longueur minimale.

Pour minimiser le nombre de retour en arrière on note que Ω, D et G sont sous l'horizontale passant par Φ et que A et E sont au dessus de l'horizontale passant par F, B et C.
On interdit les retours dans le sens horizontal qui seraient trop nombreux !

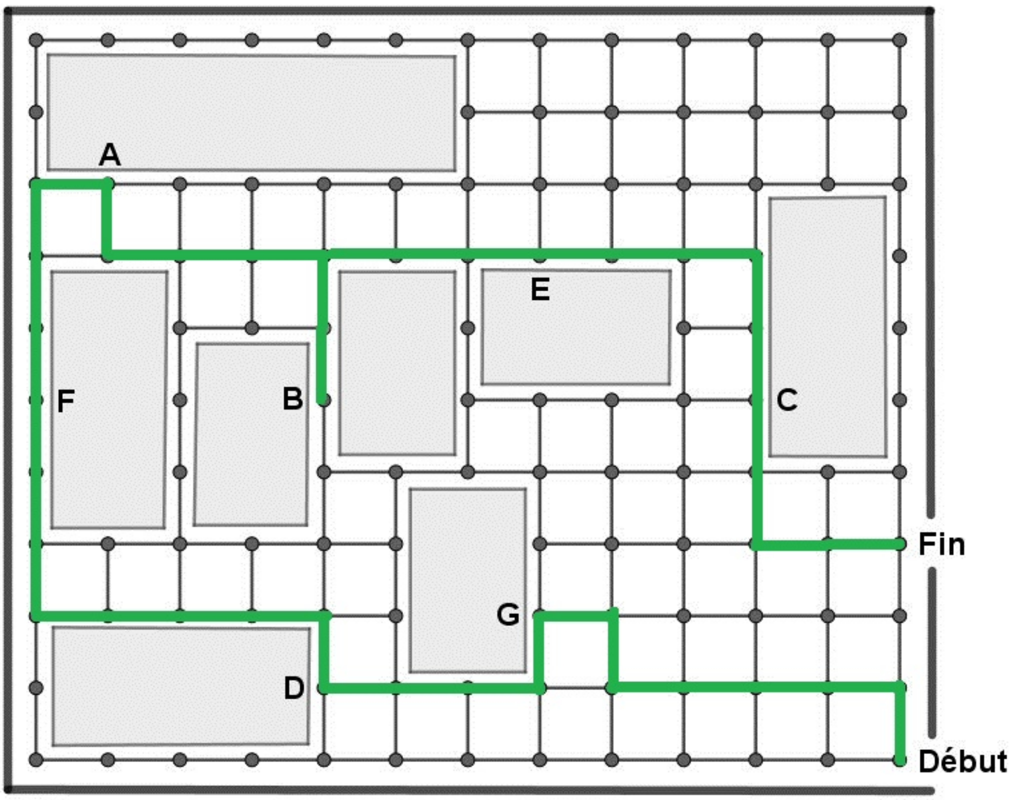
On dégage deux séries de points d'étape :
a) Ω , G , D , F , A , B , E , C , Φ ;
b) Ω , G , D , B , F , A , E , C , Φ ;
On trouve la même longueur dans chacun des cas : 43 m.

Détail du parcours a) : (avec les longueurs en mètres)
$\Omega G = 7$; $GD = 4$; $DF = 8$; $FA = 4$; $AB = 6$; $BE = 5$; $EC = 5$; $C\Phi = 4$.

Exemple de trajet de longueur minimale pour R2.

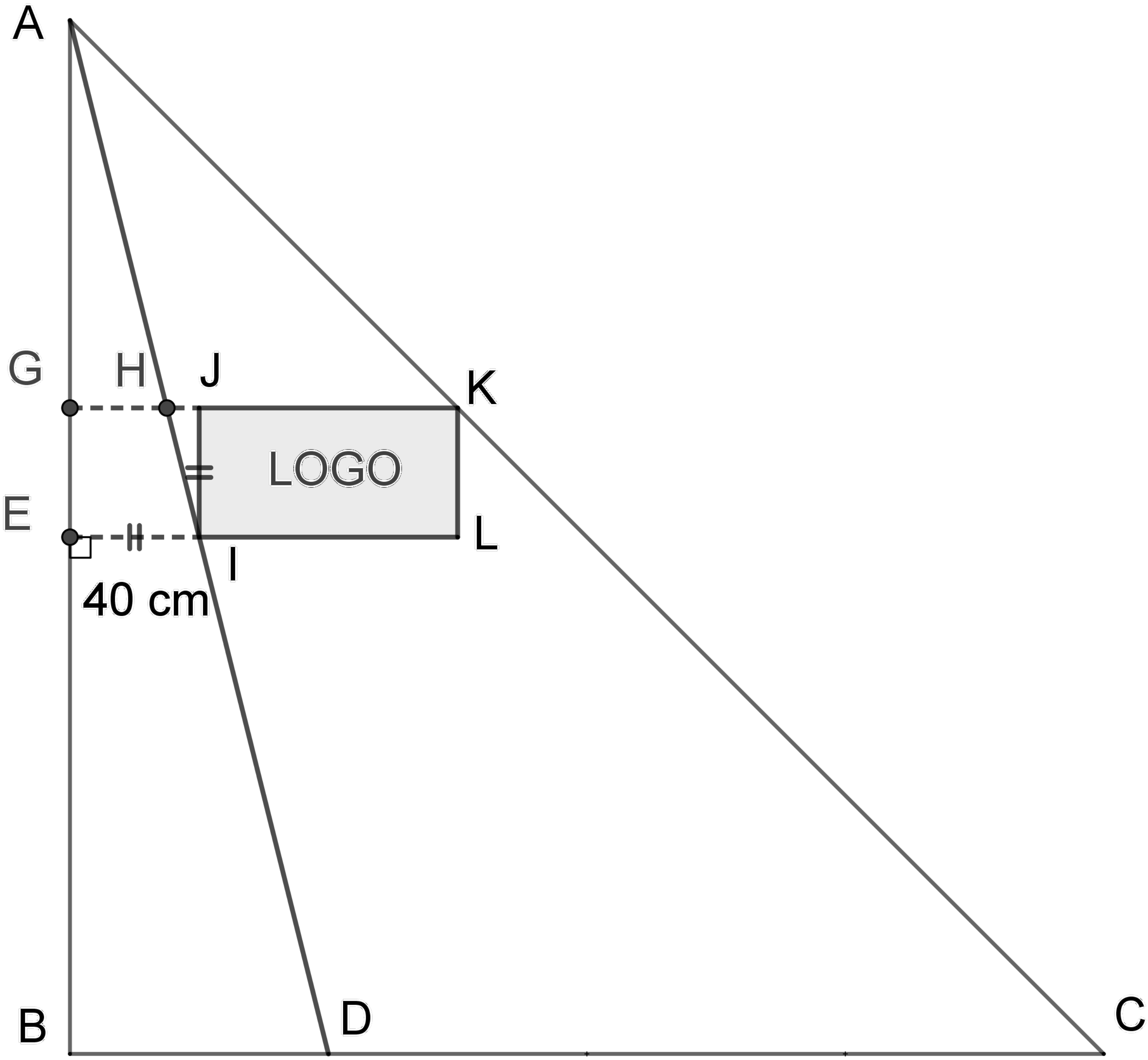


Exemple de trajet de longueur minimale pour D2.



Exercice n°6 | Le logo prend la voile

6 points



1. **Voir ci-dessus**
2. **On utilise le théorème de Thalès :**

   - **(IL)//(BC) donne** $\frac{1}{4} = \frac{BD}{BC} = \frac{BD}{AB} = \frac{GH}{AG}$
   - **(IJ)//(AB) donne** $\frac{GH}{AG} = \frac{HJ}{IJ}$

   Donc $\frac{HJ}{IJ} = \frac{1}{4}$ **et HJ = 10 cm. Ainsi GH = 30 cm.**

   - **Donc** $\frac{AG}{AB} = \frac{GH}{BD} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$ **d'où** $AG = \frac{AB}{3}$ **= 12 dm.**

   Comme ABC est rectangle isocèle et que (GK)//(BC) on a AGK triangle rectangle isocèle

d'où GK=12 dm.

• Finalement JK=GK-GJ=(12-4)dm =8 dm.
Aire(logo)= (8 $\times$ 4) dm^2= 32 dm^2.

Exercice n°7 — La vache en cubes

8 points

1. **Pour le premier cube pris au hasard :**
   Il y a une une chance sur 5 de le mettre dans le bon emplacement
   Il y a une une chance sur 6 pour que ce soit la bonne face qui apparaisse
   Il y a une une chance sur 4 de le mettre dans le bon sens.
   $\frac{1}{5} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{120}$
   Donc il y a une chance sur 120 que le cube soit correctement placé.

2. $\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{120}$
   Donc il y a une chance sur 120 que les 5 cubes soient à leur place.

3. $\frac{1}{5} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{955514880}$

   Donc il y a bien environ une chance sur un milliard de terminer le puzzle de la vache.

Exercice n°8 — La fontaine tient tout juste

7 points

Les dimensions de l'étoile sont déterminées dès que l'on connaît la longueur du côté du carré.

1. **L'aire de l'étoile égale** $x^2 + 4 \times \frac{x \times (10 - x)}{4} = (10x)$ **m^2.**
   Quand cette aire est égale au cinquième de l'aire du patio , $x = \mathbf{2}$ **m**

2. **Dans ce cas, l'aire de la zone blanche est égale à** $(10x - \frac{\pi x^2}{4})$ **m^2.**
   Quand cette aire est égale au cinquième de l'aire du patio, x **est solution de l'équation :**
   $(10x - \frac{\pi x^2}{4}) = 20$ **soit** $\pi x^2 - 40x + 80 = 0$.
   A l'aide de la calculatrice on trouve que cette équation à deux solutions $x_1 \approx 2,4850$ **et** $x_2 \approx 10,2473$
   Comme $x \leqslant 10$ **on ne retient que :** $x_1 \approx 2,49$.

Exercice Informatique-Algorithmique — A-t-il eu le un ?

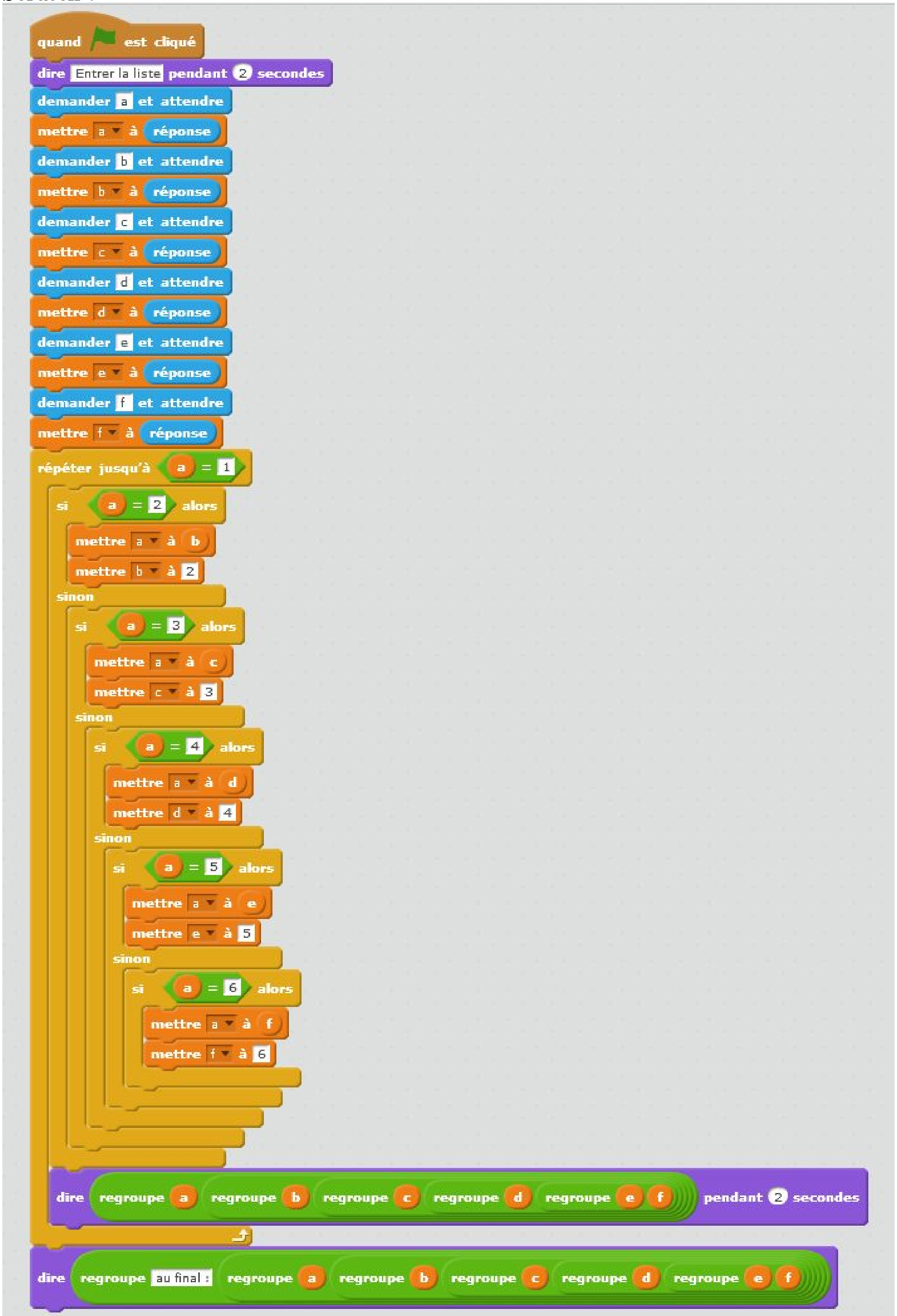
8 points

1. **On obtient :**
   Etape 1 : (5 1 6 2 4 3)
   Etape 2 : (4 1 6 2 5 3)
   Etape 3 : (2 1 6 4 5 3)
   Etape 4 : (1 2 6 4 5 3)

2. **L'algorithme s'arrête lorsque l'ordre des nombres ne change plus, cela se produit lorsque le nombre 1 est en première position.**

3. **Voici deux programmes, le premier en Scratch et le second en Python, répondant à la consigne.**

Scratch :


quand est cliqué
dire Entrer la liste pendant 2 secondes
demander a et attendre
mettre a à réponse
demander b et attendre
mettre b à réponse
demander c et attendre
mettre c à réponse
demander d et attendre
mettre d à réponse
demander e et attendre
mettre e à réponse
demander f et attendre
mettre f à réponse
répéter jusqu'à a = 1
si a = 2 alors
mettre a à b
mettre b à 2
sinon
si a = 3 alors
mettre a à c
mettre c à 3
sinon
si a = 4 alors
mettre a à d
mettre d à 4
sinon
si a = 5 alors
mettre a à e
mettre e à 5
sinon
si a = 6 alors
mettre a à f
mettre f à 6
dire regroupe a regroupe b regroupe c regroupe d regroupe e f pendant 2 secondes
dire regroupe au final : regroupe a regroupe b regroupe c regroupe d regroupe e f

Python :

```python
a=int(input("entrer la valeur du premier nombre"))
b=int(input("entrer la valeur du deuxième nombre"))
c=int(input("entrer la valeur du troisième nombre"))
d=int(input("entrer la valeur du quatrième nombre"))
e=int(input("entrer la valeur du cinquième nombre"))
f=int(input("entrer la valeur du sixième nombre"))
while a!=1 :
    if a==2:
        a=b
        b=2
    else:
        if a==3:
            a=c
            c=3
        else:
            if a==4:
                a=d
                d=4
            else:
                if a==5:
                    a=e
                    e=5
                else:
                    if a==6:
                        a=f
                        f=6
    print(a,b,c,d,e,f)
print("le résultat final est : ",a,b,c,d,e,f)
```