Rallye mathématique du Centre

Correction de l'épreuve préparatoire décembre 2016

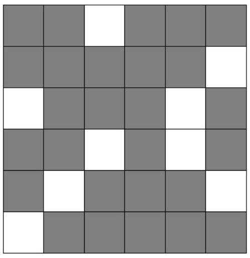
Exercice n°1 — Le cache secret, le message se transforme

8 points

1. Le message que Maxence va envoyer à Sarah est : OASEQ NRDNR OU ?ET RIEER NLECT .

2. Maxence va pouvoir lire : RDVP RESD UCHA TEAU soit rdv près du château.

3. Voici le cache reconstitué.



Exercice n°2 — Les âges

5 points

$31^2 = 961$ et 32^2=1024 donc 32 est le premier entier dont le carré est à 4 chiffres
$99^2 = 9801$ et $100^2 = 10000$ donc 99 est le dernier nombre entier dont le carré est à 4 chiffres.

On utilise le tableur pour trouver rapidement la réponse :
• A1 => 32
• A2 => =A1 + 1 puis on « copie-colle » cette formule sur 68 lignes (c-à-d de 32 à 99)
• B1 => =A1^2 puis on « copie-colle » cette formule jusque B68 pour avoir le carré des nb entiers entre 32 et 99
• C1 => =B1 + 3131 puis on « copie-colle » cette formule jusque C51 (inutile d'aller plus loin car après on obtient un nombre à 5 chiffres) pour respecter la contrainte du texte sur les 31 ans
Enfin, il reste à comparer les colles B et C : le seul nombre à 4 chiffres qui apparaît dans ces 2 colonnes et 4356.

Conclusion :
Marie et Bruno ont 12 et 25 ans car :
• $1225 = 35^2$
• $12 + 31 = 43$; $25 + 31 = 56$ et $4356 = 66^2$
En comparant tous les résultats, on voit qu'il n'y a qu'une possibilité à ce problème.

C1 | f_x | =B1+3131

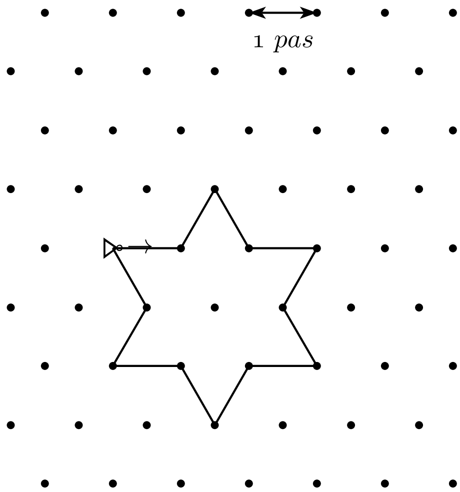
	A	B	C	D	E
1	32	1024	4155		
2	33	1089	4220		
3	34	1156	4287		
4	35	1225	4356		
5	36	1296	4427		
6	37	1369	4500		
7	38	1444	4575		
8	39	1521	4652		
9	40	1600	4731		
10	41	1681	4812		
11	42	1764	4895		
12	43	1849	4980		
13	44	1936	5067		
14	45	2025	5156		
15	46	2116	5247		
16	47	2209	5340		
17	48	2304	5435		
18	49	2401	5532		
19	50	2500	5631		
20	51	2601	5732		
21	52	2704	5835		
22	53	2809	5940		
23	54	2916	6047		
24	55	3025	6156		
25	56	3136	6267		
26	57	3249	6380		
27	58	3364	6495		
28	59	3481	6612		
29	60	3600	6731		
30	61	3721	6852		
31	62	3844	6975		
32	63	3969	7100		
33	64	4096	7227		
34	65	4225	7356		
35	66	4356	7487		
36	67	4489	7620		
37	68	4624	7755		

Feuil1 | Feuil2 | Feuil3

Exercice n°3 — Nono le robot

5 points

1. C'est le programme n°2 qui permet à nono de rejoindre l'étoile.
2.



Exercice n°4 — In the pocket

5 points

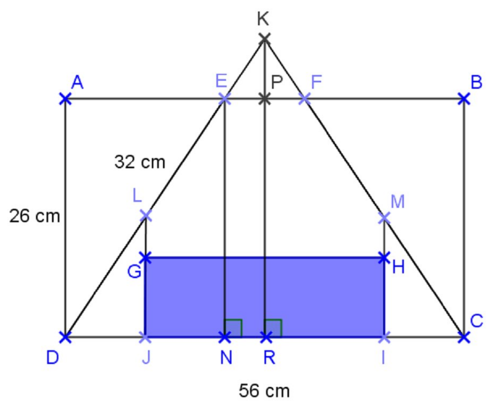
La largeur de l'enveloppe doit être supérieure à la somme de la largeur du livre et de son épaisseur.
La hauteur de l'enveloppe doit être supérieure à la somme de la longueur du livre et de la moitié de son épaisseur.
Les dimensions minimales de l'enveloppe sont donc :
l= 125+30=155 mm
h= 200+15= 215 mm

Ainsi, seule l'enveloppe B convient.

Exercice n°5 — Casier judicieux

8 points

Il suffit de regarder si le casier rentre par le côté qui mesure 30 cm car s'il ne rentre pas par ce côté, il ne rentrera pas par le côté qui mesure 45 cm.



• 1^e méthode

On calcule JL et on regarde si c'est plus grand ou plus petit que 17 cm ce qui correspond à la hauteur du casier.

On applique le théorème de Thalès dans le triangle DEN avec (LJ) // (EN) et on a $\dfrac{LJ}{EN} = \dfrac{DJ}{DN}$.
On sait que EN = 26 cm.
On calcule DN en utilisant la relation de Pythagore dans le triangle ADN rectangle en N.

On trouve DN = $2\sqrt{87}$ cm $\approx$ 18,7 cm.
IJ = 30 cm donc DJ = $\dfrac{56cm}{2}$ - $\dfrac{30cm}{2}$ = 13 cm
Donc $\dfrac{LJ}{26} = \dfrac{13}{18,7}$ donc LJ $\approx$ 18,1 cm .
Donc le casier rentre.

• 2de méthode

On suppose que LJ mesure 17 cm, on calcule DJ puis on en déduit IJ. Si le segment [IJ] mesure plus de 30cm, le casier rentre.
Dans le triangle DEN rectangle en N : $\sin\widehat{EDN} = \dfrac{EN}{DE} = \dfrac{26}{32}$ donc $\widehat{EDN} \approx 54°$.
Dans le triangle rectangle DLJ rectangle en J : $\tan\widehat{LDJ} = \dfrac{LJ}{DJ}$ donc DJ = $\dfrac{17cm}{\tan 54°} \approx$ 12,4 cm
Donc IJ $\approx$ 56 cm - 2 $\times$ 12,4 cm = 31,3 cm
Donc le casier rentre.

Exercice n°6 — Jours fériés bien placés !

5 points

1. 2002 est une année ordinaire

	1er janvier	1er mai	8 mai	15 août	1er novembre	11 novembre	25 décembre
Année ordinaire	mardi	mercredi	mercredi	jeudi	vendredi	lundi	mercredi

2. 2024 est une année bissextile. On examine le cas où le premier janvier est un lundi :

	1er janvier	1er mai	8 mai	15 août	1er novembre	11 novembre	25 décembre
Année bissextile	lundi	mercredi	mercredi	jeudi	vendredi	lundi	mercredi

On décale ensuite les jours : il y a des années au cours desquelles aucun des jours fériés précédemment mentionnés ne tombe un samedi ou un dimanche. C'est n'est le cas que si le 1er janvier d'une année ordinaire tombe un mardi, le 1er mai, le 8 mai et le 25 décembre tombent un mercredi, le 15 août un jeudi, le 1er novembre un vendredi et le 11 novembre un lundi. S'agissant des années bissextiles, il faut que le 1er jour de l'année soit un lundi.

Exercice n°7 — Bûche, ô ma bûche !

8 points

volume $=0{,}5 \times x \times y = 1$
Soit l la longueur de tubes métalliques nécessaires.

1. • Si $x = 1$ alors $l = 16 + 2\sqrt{5} \approx 20,47$m

   • Si $x = 2$ alors $l = 15 + 2\sqrt{5} \approx 19,47$m

2. $l(x,y) = 10 \times 0,5 + 3x + 4y + 2\sqrt{x^2+y^2}$

   $l(x,y) = 5 + 3x + 4y + 2\sqrt{x^2+y^2}$

   or $0,5xy = 1$ d'où $y = \dfrac{2}{x}$

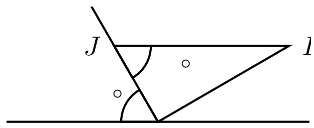
   Ainsi $l(x) = 5 + 3x + \dfrac{8}{x} + 2\sqrt{x^2 + \dfrac{4}{x^2}}$

   En utilisant la calculatrice, le tableur ou par lecture graphique on obtient une valeur minimale de longueur de tubes de 18,84 m (valeur arrondie au cm près) pour x = 1,53 m (valeur arrondie au cm près).

Exercice n°8 — Le cube lâche le bouillon

8 points

1. La hauteur de l'eau dans le cube posé à l'horizontal est 30,5 cm. Le bord de l'ouverture est, une fois le cube basculé, situé à 30 cm (50 cm - 20 cm) du sol. **Le liquide va donc déborder**.
2. Calculons le volume maximal contenu dans le cube en position inclinée. Cette situation correspond à évaluer le volume d'un prisme droit de hauteur 1 m et de surface de base le triangle AIJ rectangle en A et tel que $AI = 0,3$ m, $\widehat{IJA} = 60$ degrés. La longueur AJ vaut : $\dfrac{\sqrt{3}}{3} \times AI = \dfrac{\sqrt{3}}{10}$ m, d'où l'aire du triangle est égale à $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{10} \times \dfrac{\sqrt{3}}{10} = \dfrac{3\sqrt{3}}{200}$ m^2, et le volume correspondant est environ 29,98 L.

   La hauteur de l'eau une fois le cube revenu dans sa position initiale $\dfrac{3\sqrt{3}}{200}$ m $= \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ cm $\approx 2,60$ cm.
3. Soit θ l'angle d'inclinaison. Le triangle AIJ est rectangle en A, $AI = 0{,}3$ m et $\widehat{AJI} = \theta$.
   On a alors : $AJ = \dfrac{1}{tan(\theta)} \times AI = \dfrac{0,3}{tan(\theta)}$. Puisqu'il reste 100 L, l'aire du triangle AIJ est 0,1 m^2.
   De là, $\frac{1}{2} \times AI \times AJ = 0,1$ donc $tan(\theta) = \dfrac{0,3^2}{0,2} = 0,45$, et $\theta \approx 24$ degrés.