Rallye mathématique du Centre

Éléments de correction de l'épreuve officielle 2017

Exercice n°0 — Questionnaire culturel

12 points

- **Pierre de Fermat et son grand théorème arithmétique : Voir la feuille réponse annexe.**

- **Théorème de Fermat et triplets Pythagoriciens**

  1. **On peut faire fonctionner l'algorithme « à la main », à l'aide d'un logiciel (Scratch, Algobox,..) ou encore avec un tableur en mettant des formules différentes suivant la parité de A.**

	A	B	C	D	E	F	G
1	A	B	C		A < B ?	C²-A²-B² =	
2	~~1~~	~~0~~	~~1~~			~~0~~	
3	~~2~~	~~0~~	~~2~~			~~0~~	
4	3	4	5		OUI	0	
5	~~4~~	~~3~~	~~5~~			~~0~~	
6	5	12	13		OUI	0	
7	6	8	10		OUI	0	
8	7	24	25		OUI	0	
9	8	15	17		OUI	0	
10	9	40	41		OUI	0	
11	10	24	26		OUI	0	
12	11	60	61		OUI	0	
13	12	35	37		OUI	0	
14	13	84	85		OUI	0	
15	14	48	50		OUI	0	
16	15	112	113		OUI	0	
17	16	63	65		OUI	0	
18	17	144	145		OUI	0	
19	18	80	82		OUI	0	
20	19	180	181		OUI	0	
21	20	99	101		OUI	0	
22							

  On trouve alors 17 triplets.

  2. **Un exemple de solution « oubliée » par cet algorithme est : (9 ; 12 ; 15).**

Exercice n°1 — Gare à la « Catcher car »

6 points

1. **A 15 h 30 soit 2 h 30 après le départ des coureurs la voiture a roulé pendant 2h.
La première heure elle a parcouru 15 km et la deuxième heure elle a parcouru 16 km.
Donc à 15 h 30 , la voiture a parcouru 31 km.**

2.

	A 14h30	A 15h00	A 15h30
distance parcourue par le coureur (en km)	12,5×1,5=18,75	12,5×2=25	12,5×2,5=31,25
distance parcourue par la voiture (en km)	15	15+16/2=23	15+16=31

**A 15 h 30 le coureur a encore 250 m d'avance. Donc il a été rattrapé après 15 h 30.
On appelle t la durée écoulée entre 15 h 30 et le moment où le coureur est rattrapé.**

17×t=12,5×t+ 0,25 d'où 4,5 × t= 0,25

Ainsi $t=\frac{0,25}{4,5}=\frac{1}{18}h$ **soit 200 secondes.**

Le coureur a été rattrapé à 15 h 33 min 20 s.

3.

	A 16 h 30	A 17 h 30	A 18 h 30
distance parcourue par la voiture (en km)	31+17=48	48 + 20 = 68	68 + 20 = 88

Il reste à trouver la durée mise par la voiture pour parcourir 0,44 km en roulant à 35 km/h.

t$=\frac{d}{v}=\frac{0,44}{35}=\frac{11}{875}h$ **soit environ 45 s.**

La voiture a rattrapé le coureur à 18 h 30 min 45 s.

Exercice n°2 — Argh ! Tu parles...

6 points

1. **Phrase d'un cri :« argh », « irgh » et « orgh »**
   Phrases de deux cris :
   « argh argh », « argh irgh » ,« argh orgh »
   « irgh argh »,« irgh irgh »,« irgh orgh »
   « orgh argh »,« orgh orgh »,« orgh orgh »

   $3+3^2+3^3=39$
2. $4+4^2+4^3=84$
3. **Des phrases d'au plus 15 cris suffisent :**

	A	B
1	Taille phrase	Nombre de phrases
2	3	84
3	4	340
4	5	1364
5	6	5460
6	7	21844
7	8	87380
8	9	349524
9	10	1398100
10	11	5592404
11	12	22369620
12	13	89478484
13	14	357913940
14	15	1431655764

Exercice n°3 — Vaillant Michel !

5 points

1. **Par 4 sauts, Michel a grimpé de** $1+2+3+4=10$ **marches**
   $73=4\times 18+1$, $18\times 10+1=181$
   Il arrive à la 181^e **marche.**
2. $2017=10\times 201+7$
   201 $\times$**4= 804 sauts : 2010**^{e} **marche**
   805 sauts : 2011^e **marche**
   806 sauts : 2013^e **marche**
   807 sauts : 2016^e **marche**
   808 sauts : 2020^e **marche**

   Il ne posera pas le pied sur la 2017^e **marche.**

Exercice n°4 MATHKRYPT for ever

12 points

1. (a) Le message : QZP /-12 0-2 33 02 1-2 3-2 20 2-2 -12 32 est décodé en : 14 MARS 2017.
   (b) La phrase : A NOUS LA VICTOIRE est codée en :
   02 12 21 0-1 3-2 23 02 40 22 -10 3-1 21 22 1-2 11.
2. Attention : Nous sommes désolés mais une erreur s'est glissée dans l'énoncé concernant la 2ème réponse départementale.

   Le message :
   GZA/ -24 11 -10 14 -21 13 -20 -33 01 -43 -23 13 14 10 11 0-1 -21 13 -31 -2-1 01 14 -3-1
   est traduit en : POUR LE 18 A VIERZON LE 4 MARS

   Le message :
   1UL/ 04 31 10 34 01 33 12 -13 21 13 14 21 22 33 21 10 -22 10 2-1 01 33 00 -10 0-1 21 34 -1-1
   est en fait :
   1UL/ 04 31 10 34 01 33 12 -13 21 13 14 21 22 33 21 10 -22 10 2-1 01 33 00 <u>02</u> 0-1 21 34 -1-1
   est traduit en : POUR LE 28 A CHATEAUDUN LE 13 MARS

   Le message :
   5S7/ 25 52 31 55 22 54 23 05 42 24 10 10 52 31 03 31 40 22 54 12 20 42 55 10
   est traduit en : POUR LE 36 A ISSOUDUN LE 4 MARS

   Le message :
   UGF/ -14 21 00 24 -11 23 -21 -10 11 -20 -11 21 -13 -2-1 -11 23 -10 -10 -1-1 11 24 -2-1
   est traduit en : POUR LE 41 A BLOIS LE 11 MARS

   Le message :
   9EW/ -21 1-2 -1-3 11 -2-2 10 -2-1 -4-3 0-2 0-1 1-2 -1-3 11 -3-4 -2-2 10 -1-1 -2-4 0-2 11 -3-4
   est traduit en : POUR LE 37 A TOURS LE 2 MARS

   Le message :
   2TC/ -12 2-1 0-2 22 -1-1 21 -2-1 -3-3 1-1 -12 -11 10 02 -11 -31 -11 21 22 -2-3 -1-1 21 -3-2 -1-3 1-1 22 -2-3
   est traduit en : POUR LE 45 A PITHIVIERS LE 7 MARS

   Le message :
   XNU/ -10 12 13 05 -32 25 23 -15 13 12 -21 -12 22 -14 -20 -12 24 -13 -25 -10 12 25 -20
   est traduit en : MATHKRYPT A BLOIS LE 30 MARS

   Il y a donc deux possibilités pour la grille de décodage :

6	0	P	H	W	R
V	8	I	C	9	E
D	J	3	2	T	Y
K	4	L	F	A	O
7	B	1	U	G	Z
5	S	M	X	N	Q

6	0	P	H	W	R
V	8	I	C	9	E
D	Q	3	2	T	Y
K	4	L	F	A	O
7	B	1	U	G	Z
5	S	M	X	N	J

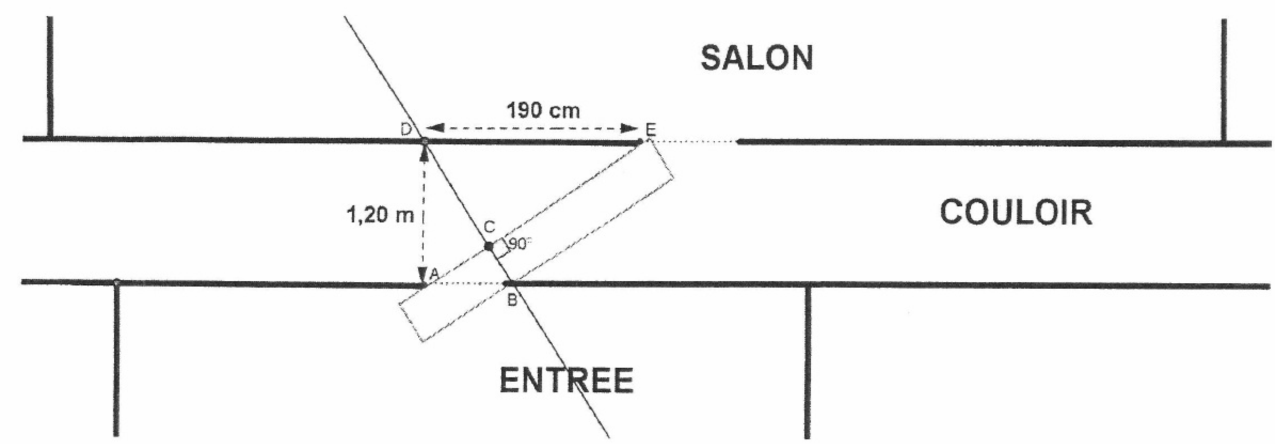
Exercice n°5	Ça passe ou pas ?

8 points

Pour espérer faire passer le meuble par les deux portes il faut le coller le long de (AE).
Dans le triangle DAE rectangle en D : $tan(\widehat{DAE}) = \dfrac{190}{120}$ **donc** $\widehat{DAE} \approx 58°$
Donc $\widehat{CAB} \approx 32°$

Dans le triangle ACB rectangle en C : $sin(\widehat{CAB}) = \dfrac{CB}{AB}$ **donc** $sin32° = \dfrac{40}{AB}$ **donc** $AB = \dfrac{40}{sin32°}$
Donc AB≈75 cm

Donc le meuble ne passe pas car c'est plus large que la porte.



Exercice n°6	La chasse d'Olaf le pirate

9 points

1. **Voir feuille annexe**
2. **On note R1 ,R2, R3 les trois positions prises par la goélette au bout des 3 premières demi-heures et de même G1, G2, G3 les positions correspondantes du galion.**
   En utilisant le théorème de Pythagore puis celui de Thalès on calcule les coordonnées de R1 et R2 :
   R1 (6,078 ; 0,784) et R2 (2,189 ; 2,842).
   On en déduit que R2G3 = 3,837 < 4,84 = R2R3 (en milles)

   Olaf navigue à 9,68 nœuds donc il parcourt les 3,837 milles en 0,3964 heures soit 23,78 minutes. La galion navigue à 4 nœuds soit 2 milles en 30 minutes, donc en 23,78 minutes il parcourt 1,586 milles. Cette position est notée G2'.

   Olaf arrive donc en G3 avant le galion en le précédant en ce point de 23,78 minutes ce qui a permis au galion de parcourir 1,586 milles depuis G2.

   Quand Olaf est en G3 où il coupe la route du galion, il a parcouru 3,837 milles et se trouve à 0,414 mille de celui-ci.

Exercice n°7 | Game of cubes

12 points

1. **Stratégie : On considère que le vase est vide. On pose un cube sur le fond. On calcule le volume d'eau qu'il faudrait ajouter dans le vase pour que l'eau arrive juste à la hauteur du cube. Si le volume d'eau à ajouter est inférieur à 500 cm^3 alors le cube est sous l'eau sinon il dépasse du niveau de l'eau.**
$1cm \times 11cm \times 11cm - (1cm)^3 = 120cm^3$
$2cm \times 11cm \times 11cm - (2cm)^3 = 234cm^3$
$3cm \times 11cm \times 11cm - (3cm)^3 = 336cm^3$
$4cm \times 11cm \times 11cm - (4cm)^3 = 420cm^3$
$5cm \times 11cm \times 11cm - (5cm)^3 = 480cm^3$
$6cm \times 11cm \times 11cm - (6cm)^3 = 510cm^3$
$7cm \times 11cm \times 11cm - (7cm)^3 = 504cm^3$
$8cm \times 11cm \times 11cm - (8cm)^3 = 456cm^3$
$9cm \times 11cm \times 11cm - (9cm)^3 = 360cm^3$
$10cm \times 11cm \times 11cm - (10cm)^3 = 210cm^3$

   Donc le cube d'arête 6 cm et le cube d'arête 7 cm dépasse du niveau de l'eau.

2. **D'abord on regarde quelles sont les combinaisons de cubes qui peuvent tenir dans le vase en regardant les dimensions des cubes commençant par le plus gros cube sans s'occuper de savoir s'ils vont être sous l'eau.**
n°10 et n°1
n°9, n°2 et n°1
n°8, n°3, n°2, n°1
n°7, n°4, n°3, n°2, n°1
n°6, n°5, n°4, n°3, n°2, n°1
n°5, n°4, n°3, n°2, n°1
et ainsi de suite.

   La plus grande combinaison est donc la suivante : n°6, n°5, n°4, n°3, n°2, n°1
On regarde s'ils sont sous le niveau de l'eau.
Le cube le plus grand mesure 6 cm d'arête on va donc calculer la quantité d'eau à ajouter dans le vase pour que l'eau ait une hauteur de 6 cm.

   $6cm \times 11cm \times 11cm - [(6cm)^3 + (5cm)^3 + (4cm)^3 + (3cm)^3 + (2cm)^3 + (1cm)^3] = 285cm^3$

   Donc les cubes sont bien sous l'eau.

3. **Pour faire mieux il faut ajouter au moins un cube par rapport aux 6 de la question d'avant. Donc il faut au moins 7 cubes. D'abord on regarde quelles sont les combinaisons de 7 cubes ou plus qui peuvent tenir dans le vase sachant que le vase a des dimensions de 11 cm × 11 cm × 20 cm, un volume disponibles de 2420 cm^3 - 500 cm^3.**
On sait déjà que les cubes n°1 à n°6 tiennent tous sur le fond. On peut ajouter au-dessus le cube n°7 ou n°8 ou n°9 ou n°10.
n°10, n°6, n°5, n°4, n°3, n°2, n°1
n°9, n°6, n°5, n°4, n°3, n°2, n°1
n°8, n°6, n°5, n°4, n°3, n°2, n°1
n°7, n°6, n°5, n°4, n°3, n°2, n°1

   Il n'a pas de combinaisons de 8 cubes qui tiennent dans le vase.
Dans chaque cas, on calcule la quantité d'eau à ajouter pour que le niveau de l'eau au niveau du cube le plus haut.

   $16cm \times 11cm \times 11cm - [(10cm)^3 + (6cm)^3 + (5cm)^3 + (4cm)^3 + (3cm)^3 + (2cm)^3 + (1cm)^3] = 495cm^3$
$15cm \times 11cm \times 11cm - [(9cm)^3 + (6cm)^3 + (5cm)^3 + (4cm)^3 + (3cm)^3 + (2cm)^3 + (1cm)^3] = 645cm^3$
$14cm \times 11cm \times 11cm - [(8cm)^3 + (6cm)^3 + (5cm)^3 + (4cm)^3 + (3cm)^3 + (2cm)^3 + (1cm)^3] = 741cm^3$
$13cm \times 11cm \times 11cm - [(7cm)^3 + (6cm)^3 + (5cm)^3 + (4cm)^3 + (3cm)^3 + (2cm)^3 + (1cm)^3] = 789cm^3$

   Donc les cubes n°10, n°6, n°5, n°4, n°3, n°2, n°1 sont bien sous l'eau.

Exercice n°8	A l'eau la bouée

6 points

Soient :
r **le rayon du cercle de base de la bouée**
$2h$ **la hauteur de la bouée**
V **le volume de la bouée**

On a $V = \dfrac{2\pi r^2 h}{3} = \dfrac{2\pi}{3}(80^2 - h^2)h = \dfrac{2\pi}{3}(6400h - h^3)$

Volume	1 m^3	V
Masse	110 kg	1716 g

On en déduit : $V = 15,6$ **dm**$^3 = 15600\ cm^3$**.**

Le problème se traduit par l'équation :
$\dfrac{2\pi}{3}(6400h - h^3) = 15600$ **soit** $\pi h^3 - 6400\pi h + 23400 = 0$

On peut alors utiliser la calculatrice, Géogébra ou le tableur pour obtenir une valeur approchée de h**.**

On obtient $h \approx -80,57$ **ou** $h \approx 79,41$ **ou** $h \approx 1,16$**.**
On retiendra raisonnablement $h \approx 79,41 cm$**.**