Rallye mathématique du Centre
Correction de l'épreuve préparatoire décembre 2015

Exercice n°1 — Ça ne tourne pas rond !

5 points

- Quand on écrit la spirale jusqu'au nombre 3^2 :
  Ce nombre est dans la case située 1 case à droite de 1 et 1 case plus haut que 1. $\left(\dfrac{3-1}{2}=1\right)$
  Il y a les 2 entiers qui le précèdent écrits dessous. $(3-1=2)$

- Quand on écrit la spirale jusqu'au nombre 5^2 :

  Ce nombre est dans la case située 2 cases à droite de 1 et 2 cases plus haut que 1. $\left(\dfrac{5-1}{2}=2\right)$
  Il y a les 4 entiers qui le précèdent écrits dessous. $(5-1=4)$

- Quand on écrit la spirale jusqu'au nombre 7^2 :

  Ce nombre est dans la case située 3 cases à droite de 1 et 3 cases plus haut que 1. $\left(\dfrac{7-1}{2}=3\right)$
  Il y a les 6 entiers qui le précèdent écrits dessous. $(7-1=6)$

  Or $44^2 < 2015 < 45^2$

- Quand on écrit la spirale jusqu'au nombre 45^2 :

  Ce nombre est dans la case située 22 cases à droite de 1 et 22 cases plus haut que 1. $\left(\dfrac{45-1}{2}=22\right)$
  Il y a les 44 entiers qui le précèdent écrits dessous. $(45-1=44)$

  $45^2=2025$ donc 2015 est situé 10 cases sous 45^2.

  Donc 2015 est dans la case située 22 cases à droite de 1 et 12 cases plus haut que 1.

Exercice n°2 — Le Carré de POLYBE

5 points

Le mot important du texte est SESAME On utilise donc les lettres : SEAM en premier puis l'alphabet dans l'ordre alphabétique.

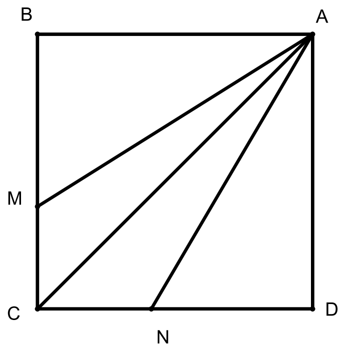
	1	2	3	4	5
1	S	E	A	M	B
2	C	D	F	G	H
3	I	J	K	L	N
4	O	P	Q	R	T
5	U	V	X	Y	Z

45 ⇒ O
15 ⇒ B
32 ⇒ J
12 ⇒ E
21 ⇒ C
45 ⇒ T ...

Réponse : OBJECTIF PREMIER DE LA CLASSE

Exercice n°3 — Un puits pour trois

8 points



(AC) est un axe de symétrie ; donc il faut que BM soit égal à DN pour que les aires des triangles ABM et ADN soient égales.
L'aire de la parcelle AMCN est le double de celle du triangle AMC.

On doit donc avoir $\dfrac{AB \times BM}{2} = MC \times AB$ d'où $MC = \dfrac{BM}{2}$

• M est sur [BC] tel que BM=$\dfrac{2}{3}$ BC

• N est sur [DC] tel que DN=$\dfrac{2}{3}$ DC

En utilisant le théorème de Pythagore on obtient :

• Périmètre(ABM)= Périmètre (ADN) $= 40(5+\sqrt{13})$ m

• Périmètre(AMCN)= $80(1+\sqrt{13}) = 40(2+2\sqrt{13})$ m

D'où Périmètre(AMCN) $>$ Périmètre(ABM)

Exercice n°4 — Quitte ou double

8 points

$19 \rightarrow 38 \rightarrow 76 \rightarrow 152 \rightarrow 15 \rightarrow 30 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 12 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow$ Fin

$29 \rightarrow 58 \rightarrow 116 \rightarrow 232 \rightarrow 23 \rightarrow 46 \rightarrow 92 \rightarrow 9 \rightarrow 18 \rightarrow 36 \rightarrow 72 \rightarrow 7 \rightarrow 14 \rightarrow 28 \rightarrow 56 \rightarrow 112 \rightarrow 11 \rightarrow 22 \rightarrow 2 \rightarrow$ Fin

$\mathbf{43} \rightarrow 86 \rightarrow 172 \rightarrow 17 \rightarrow 34 \rightarrow 68 \rightarrow 136 \rightarrow 272 \rightarrow 27 \rightarrow 54 \rightarrow 108 \rightarrow 216 \rightarrow 432 \rightarrow \mathbf{43}$ (on retrouve le nombre de départ)

Tous les nombres inférieurs à 100 sont « attirés » par 2 sauf 17, 27, 34, 43, 54, 67, 68, 84, 85 et 86.

Exercice n°5 — Un exercice bien ciblé

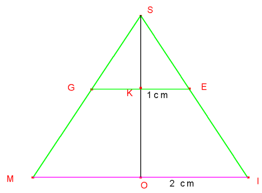
5 points

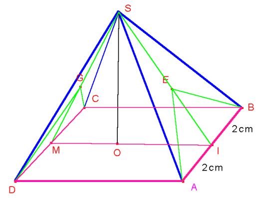
1. (a) On ne peut pas obtenir 21, par contre on peut obtenir 44 : $44 = 5 \times 7 + 9$
   (b) La réponse est 31.
   Justification : Commençons par écrire les nombres posssibles :
   5, 9, 10, 14, 15, 18, 19, 20, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, ...
   À partir du moment où on a obtenu 5 scores qui se suivent (de 32 à 36), on peut ajouter 5 et on aura tous les suivants.
2. Non. Si on avait 6 et 8, tous les nombres impairs seraient impossibles à atteindre.
3. Si au lieu de 5 et 9, on avait 2 et 3, le plus grand nombre impossible à atteindre serait 1.

Exercice n°6 — De quoi prendre de la hauteur

12 points

Soit O le centre de la base. On peut schématiser la situation par les deux figures ci-dessous.





1. • <u>On calcule d'abord IE</u> :
   Comme les 4 triangles sont superposables et reforment la base, ce sont tous des triangles rectangles isocèles en E, F, G et H. Donc E et S sont sur la médiatrice de $[AB]$ et donc (ES) est la médiatrice de $[AB]$. Donc comme I est le milieu de l'hypoténuse du triangle rectangle ABE, I est équidistant des 3 sommets et donc $IE = 2$ cm.

   <u>Autre possibilité pour calculer IE</u> :
   Comme les 4 triangles reforment la base, ce sont tous des triangles rectangles isocèles en E, F, G et H.
   Donc $AB^2 = AE^2 + BE^2$ donc $4^2 = 2 \times AE^2$ donc $AE = 2\sqrt{2}$ cm.
   En appliquant la propriété de Pythagore dans le triangle rectangle IEA, on a :
   $(2\sqrt{2})^2 = 2^2 + IE^2$ donc $IE = 2$ cm.

   • On applique la propriété de Thalès dans le plan (SMI) :
   $\dfrac{SK}{SO} = \dfrac{SE}{SI} = \dfrac{KE}{OI}$ donc $\dfrac{SK}{SO} = \dfrac{SE}{SI} = \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{SK}{SO} = \dfrac{SE}{SE+2} = \dfrac{1}{2}$ donc $SE = 2$ cm.

   • Donc $SI = SE + EI = 2$ cm $+ 2$ cm $= 4$ cm.
   La hauteur du triangle SAB est de 4 cm.

2. La construction du patron ne présente pas de difficulté particulière.
   $SA = SB = SC = SD = \sqrt{2^2 + 4^2}$ cm soit environ 4,5 cm.

3. Il faut appliquer la propriété de Pythagore dans le triangle rectangle SOI.
   $4^2 = 2^2 + SO^2$ donc $SO^2 = 12$ donc $SO = 2\sqrt{3}$ cm.
   La hauteur de la pyramide est $2\sqrt{3}$ cm.

Exercice n°7 — Can you light my lantern ?

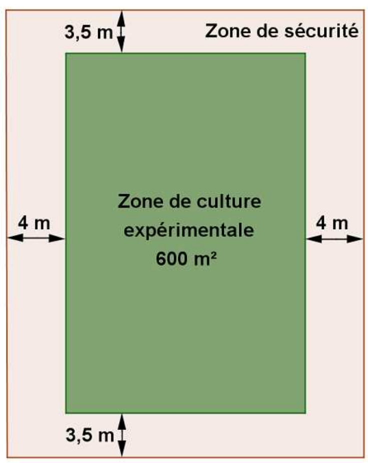
5 points

La position dans laquelle les trois bougies blanches sont adjacentes correspond à celle où les deux bougies bleues le sont aussi. Ainsi, si une bougie bleue est placée alors 2 positions sur les 4 restantes conviennent pour la seconde bougie bleue.

La probabilité que deux bougies bleues soient adjacentes est donc de $\dfrac{1}{2}$.

Exercice n°8 — A la recherche du blé pas cher !

8 points



Soit x la "largeur" du terrain et y sa "longueur".

L'aire de la zone de culture étant de 600 m^2, on obtient :

$(x-8)(y-7) = 600$ avec $x > 8$ et $y > 7$
d'où $y = 7 + \dfrac{600}{x-8}$

Soit A l'aire du terrain acheté : $A(x) = xy = x(7 + \dfrac{600}{x-8}) = \dfrac{7x^2 + 544x}{x-8}$

A l'aide d'un tableur, d'une calculatrice, d'un logiciel traceur-grapheur ...
on détermine que l'aire A est minimale lorsque $x \approx 34{,}2$ m d'où $y \approx 29{,}9$ m.