Rallye mathématique du Centre

Éléments de correction de l'épreuve officielle 2016

Exercice n°0 Questionnaire culturel

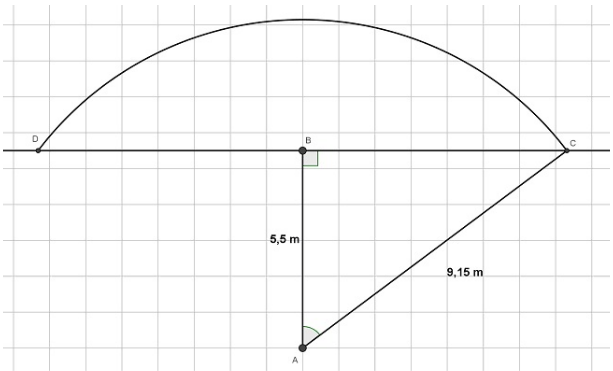
10 points

Compléter la feuille annexe à rendre avec les feuilles réponses.

Exercice n°1 Les lignes du terrain

12 points

1.
2.
- Longueur du rond central : 2 $\times\pi\times$ 9,15 m = 18,3 π m
- Longueur du petit arc de cercle devant la surface de réparation :



Dans le triangle ABC rectangle en B :
$cos\widehat{BAC} = \dfrac{5,5}{9,15}$ donc $\widehat{BAC} \approx 53^\circ$
Donc $\widehat{DAC} \approx 106^\circ$

Donc longueur arc de cercle :

$$\frac{106^\circ \times 2 \times \pi \times 9,15m}{360^\circ} \approx \frac{3233}{600}\pi \text{ m}$$

- Longueur des 4 arcs de cercle au niveau des poteaux de corner : $4 \times \dfrac{2\times\pi\times 1}{4} = 2\pi$ m

Donc longueur totale des lignes :
$3 \times 90 + 2 \times 120 + (5{,}5 + 5{,}5 + 7{,}32 + 5{,}5 + 5{,}5\ ) \times 2 + (16{,}5 + 16{,}5 + 7{,}32 + 16{,}5 + 16{,}5) \times 2 + 18{,}3\ \pi + 2\pi +$
$2 \times \dfrac{3233}{600}\pi \approx 812{,}9$

La longueur totale des lignes est d'environ 812,9 m.

3.
En 3ème : Grâce à GéoGébra, on peut conjecturer que la distance minimale parcourue par le ballon est d'environ 115,9 m. Le joueur B est alors à environ 70,5 m du poteau de corner adverse.

En 2nde : On appelle x la distance entre le joueur B et le poteau de corner qui se trouve dans le camp du joueur C et sur la même ligne que B.
La distance d parcourue par le ballon en fonction de x est égale à :

$$d(x) = \sqrt{(45 - 16,5 - 7,32 : 2)^2 + (120 - 16,5 - x)^2} + \sqrt{45^2 + (x - 11)^2}$$
$$d(x) = \sqrt{24,84^2 + (103,5 - x)^2} + \sqrt{45^2 + (x - 11)^2}$$

En étudiant cette fonction avec la calculatrice ou un tableur, on trouve que la distance minimale parcourue par le ballon est atteinte pour x compris entre 70 m et 71 m.
Dans ce cas, la distance parcourue par le ballon est d'environ 115,9 m.
Le joueur B doit donc se trouver à environ 70,5 m du poteau de corner adverse.

N.B : Une solution plus élégante est l'introduction du symétrique C' de C par rapport à la ligne de touche qui amène, grâce au théorème de Thalès, à un même résultat de 70,5 m environ.

Exercice n°2 — C'est une grille en somme

6 points

1. Réponse :

7	5	3
12	10	8
17	15	13

2. Mettons des lettres dans le tableau :

a	9	b
c	*17*	d
e	25	f

On sait que : a + b = 18 ; c + d = 34 ; e + f = 50. Donc :

somme des 9 nombres = 18 + 34 + 50 + 9 + 17 + 25 = 153.

3.
On a le tableau :

x	7	y
9	t	v
z	u	20

On peut former un système de 6 équations à 6 inconnues ! !
Mais, en remarquant que :
x + 20 = 2t , x = 2t - 20 : **x est pair**.
De même pour **y** et pour **z**, qui sont pairs aussi. On va donc envisager tous les cas, un par un (il n'y en a pas beaucoup).
Avec x = 2, on obtient : y = 12 et z = 16. Soit le tableau :

2	7	12
9	? ?	16
16	18	20

Ne convient pas !

Avec x = 4 , on obtient y = 10 et z = 14. Soit :

4	7	10
9	12	15
14	17	20

Convient !

Avec x = 6, on a y =8 et z = 12 ; soit :

6	7	8
9	? ?	14
12	16	20

Ne convient pas !
Et de même pour **x = 8, x= 10** et **x =12** (ainsi que x = 0 et x =14). Les tableaux obtenus ne conviennent pas.
Une seule solution !

Exercice n°3 — Les aventuriers de $\rho\lambda$

5 points

Soit x la quantité de riz quotidienne que pourra manger un candidat.
Il vient :
$16 \times 3 \times x + 15 \times 3 \times x + 14 \times 3 \times x + 13 \times 3 \times x + ... + 2 \times 3 \times x = 12000$ g

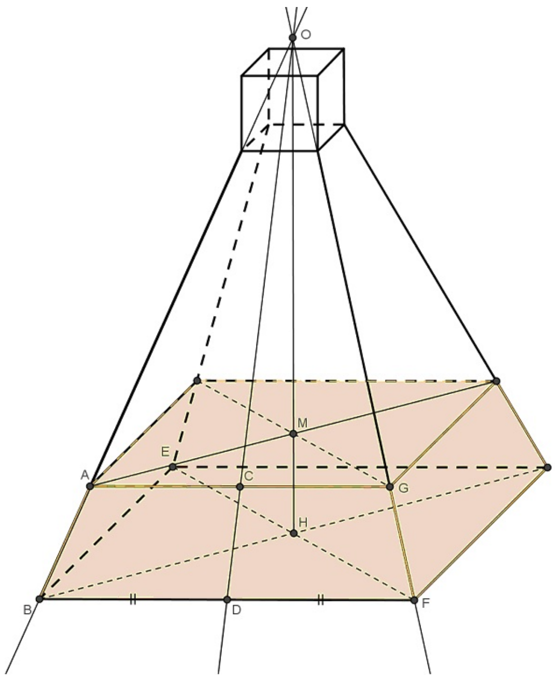
Remarque : La durée du jeu est de 15 × 3 = 45 jours

On obtient : $3x[16 + 15 + 14 + ... + 2] = 12000$ g
soit $3x \times 135 = 12000$ g   d'où $x = \dfrac{4000}{135}$ g

La quantité de riz quotidienne que pourra manger un candidat est d'environ 29,6 g de riz par jour.

Exercice n°4 Qui a raison ?

12 points



Il faut d'abord calculer le volume de la grande pyramide formée par le flacon donc il faut commencer par calculer la hauteur OH de cette pyramide.

Ensuite, il faut calculer le volume de la pyramide vide sans le parfum donc il faut calculer la hauteur OM de cette pyramide.

• D'après le théorème de Thalès dans OBF :
$\frac{OA}{OB} = \frac{AG}{BF}$ donc $\frac{OA}{OA+3} = \frac{5}{7}$ donc OA = 7,5 cm

Donc OB = 7,5 cm + 3 cm = 10,5 cm

• D'après la relation de Pythagore dans le triangle BEF rectangle en F :

BE^2 = BF^2 + FE^2
donc BE = $\sqrt{7^2+7^2}$ cm = $\sqrt{98}$ cm = 7 $\sqrt{2}$ cm
donc BH = $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ cm

• D'après la relation de Pythagore dans le triangle BHO rectangle en H :

OH^2 = BO^2 - BH^2
donc OH =$\sqrt{10,5^2-(3,5\sqrt{2})^2}$cm = $\sqrt{87,5}$ cm = $\frac{7\sqrt{7}}{2}$ cm

Donc **OH** = $\frac{7\sqrt{7}}{2}$ **cm**

•D'après le théorème de Thalès dans OBH :

$\frac{OM}{OH}=\frac{OA}{OB}$ donc $\frac{OM}{\frac{7\sqrt{7}}{2}} = \frac{7,5}{10,5}$ donc **OM** = $\frac{5}{2}\sqrt{7}$ **cm**

• Volume grande pyramide OBFEG = (7 cm × 7 cm × $\frac{7\sqrt{7}}{2}$ cm) : 3 = $\frac{343\sqrt{7}}{6}$ cm^3

• Volume pyramide vide OAHIJ = (5 cm × 5 cm × $\frac{5\sqrt{7}}{2}$ cm) : 3 = $\frac{125\sqrt{7}}{6}$ cm^3

• Volume parfum = $\frac{343}{6}\sqrt{7}$ cm^3 - $\frac{125\sqrt{7}}{6}$ cm^3 = $\frac{109\sqrt{7}}{3}$ cm^3 ≈ 96,129 cm^3

• Volume de parfum en mL : 96,129 cm^3 = 0,096 129 dm^3 = 0,096 129 L = 96,129 mL

$\frac{96,129mL}{0,07mL} \approx 1373$ Il y a encore de quoi faire 1373 pulvérisations de parfum. $\frac{1373}{4}$= 343,25

Donc il n'y a pas assez de parfum pour se parfumer pendant un an à raison de quatre pulvérisations par jour. Donc Laetitia a raison.

Exercice n°5 Le codage Fairplay de Playfair

9 points

1. Maëlle code le message en : PC XT PK SC PV IF IT RO MH XN OM

2. Mathilde a envoyé en réponse : JE DOIS FAIRE MES DEVOIRS

3. La grille de codage utilisée par Mathilde est :

R	F	Z	U	S
X	T	Q	D	E
L	N	B	I	A
O	C	M	Y	K
H	P	G	V	J

Exercice n°6 | Du rouge au vert

5 points

Stratégie : on cherche pour avant-dernier coup à obtenir 3 rouges en équerre, le reste étant vert.

1. Le niveau 1 se joue sur un rectangle composé de 4 cases. Par raison de symétrie on peut commencer en a.
   Solutions en 4 coups : [a→ d→ b→ c]
   et aussi [a→ d→ c→ b]
   Les solutions en 3 coups partant de a échouent toutes. Le minimum de coups est 4.
2. Le niveau 2 se joue sur un rectangle composé de 9 cases.
   Avec la stratégie décrite, on trouve des solutions en 5 coups :
   ∗ En partant d'un coin : [a→ c→ e→ g→ i]
   ∗ En partant du centre : [e→ a→ c→ i→ g]

Exercice n°7 | Le jeu des cavaliers

6 points

1. Les 6 nombres solutions avec une grille de 8 colonnes et 4 rangées sont :
   42 324 311, 41 134 232, 34 232 411, 11 423 243, 23 243 114, 11 342 324.
2. Les 10 nombres solutions avec une grille de 10 colonnes et 5 rangées sont :
   5 242 354 311, 5 113 453 242, 4 511 435 232, 3 523 245 114, 3 453 242 511, 1 152 423 543, 4 115 423 253, 2 325 341 154, 2 423 543 115, 1 134 532 425.

Exercice n°8 | De dé en dé

9 points

1. Une façon simple est de lister tous les cas possibles, comme dans le tableau ci-dessous (les sommes sont à l'intersections des lignes et des colonnes) :

les dés	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Il suffit alors de faire les décomptes. Les probabilités sont :

somme	**proba (sur 36)**
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6
8	5
9	4
10	3
11	2
12	1

2. On reprend le tableau précédent, en modifiant les nombres affichés par le premier dé ; puis, ligne par ligne, on indique les nombres de l'autre dé de façon à obtenir les sommes voulues. Cela donne :

autre dé\ premier dé	**1**	**2**	**2**	**3**	**3**	**4**
1	2	3	3	4	4	5
3	4	5	5	6	6	7
4	5	6	6	7	7	8
5	6	7	7	8	8	9
6	7	8	8	9	9	10
8	9	10	10	11	11	12

L'autre dé portait donc les nombres **1, 3, 4, 5, 6 et 8**.