Rallye mathématique du Centre et du Congo

Épreuve officielle

Mardi 17 mars 2015

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.
Les solutions partielles seront examinées.

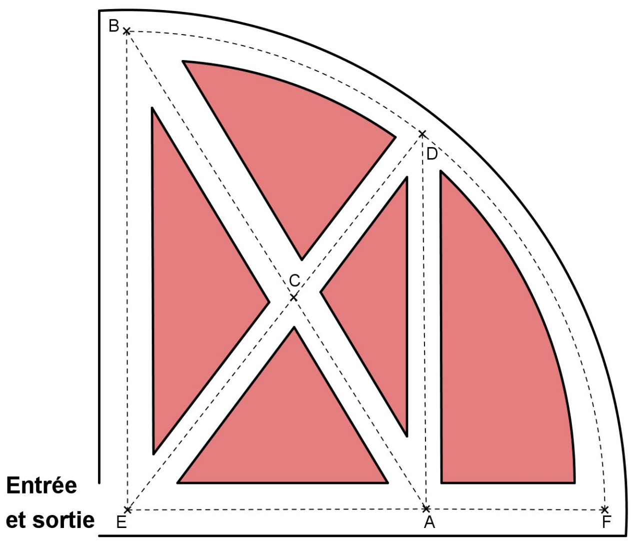
Exercice n°1 — Le jardin de Jean

12 points

Jean, qui est employé à l'entretien du parc d'un château, doit passer la tondeuse dans toutes les allées engazonnées d'un ancien jardin ayant la forme d'un quart de disque constitué de cinq parterres de fleurs.

Voici des indications concernant ce jardin :

- l'entrée et la sortie ne peuvent se faire qu'en E ;
- les allées [BE] et [DA] sont perpendiculaires à l'allée [EF] qui passe par A ;
- l'allée $\widehat{\mathrm{BF}}$ est un quart de cercle de centre E passant par D ;
- les allées [BA] et [DE] se coupent en C ;
- Par mesure à 0,1 m près, on a :
  EC = 75 m , CD = 45 m et BC = 96 m .



1. Hier, Jean a passé la tondeuse dans toutes les allées de ce jardin. Il a fait le trajet suivant :
   E → A → F → D → B → E → C → D → B → C → A → D → C → E
   Calculer la longueur de son trajet. (Arrondir les longueurs des allées au mètre près.)
2. Après avoir passé la tondeuse, Jean se dit que son trajet n'est certainement pas le plus court pour entretenir toutes ces allées. Il se demande alors quel trajet emprunter pour avoir le chemin le plus court possible.
   Proposer un chemin, le plus court possible, pour l'entretien de ces allées et en donner sa longueur.

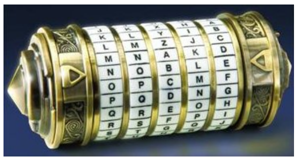
Exercice n°2 — Boxed Products

5 points

A positive integer is to be placed in each box. Integers may be repeated, but the product of any four adjacent integers is always 120. Determine all possible values for x.

		2			4			x			3		

Exercice n°3 Le cryptex

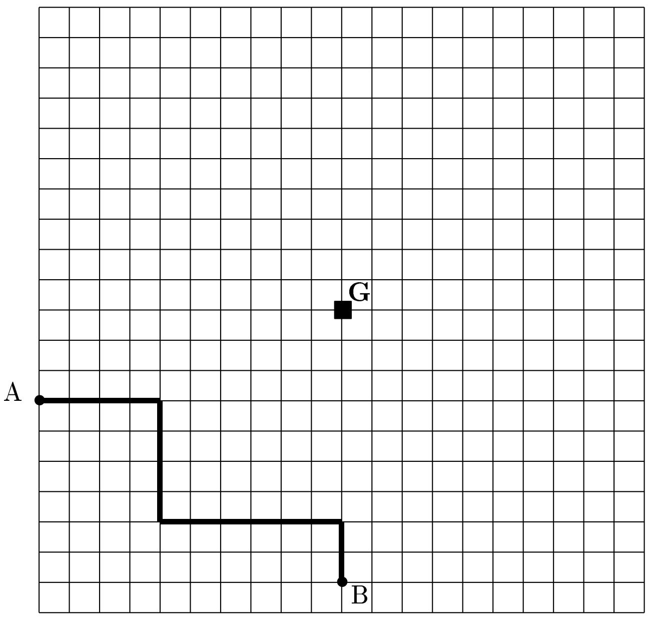


8 points

Dans le « Da Vinci Code », Dan Brown fait utiliser cet objet (voir ci-contre).
C'est une sorte de coffre-fort portable, capable de contenir des messages.
L'idée originale proviendrait de Léonard de Vinci.
Ce cryptex fonctionne comme un antivol de vélo. C'est un mot de cinq lettres qui actionnera la serrure et permettra d'ouvrir le cylindre. Ce cylindre contient un papier où a été inscrit un message.
Ce papier est enroulé autour d'un tube en verre fin contenant un produit chimique, ce qui empêche toute ouverture de force du cryptex pour obtenir le message : cela briserait le tube de verre et répandrait le produit chimique sur le papier qui deviendrait dès lors illisible.
Le cryptex est composé de cinq rouleaux, chacun comportant toutes les lettres de l'alphabet dans l'ordre usuel.
Ils sont tous sur la position donnant AAAAA au départ.
Pour découvrir le code et ouvrir le cryptex, John teste toutes les combinaisons en actionnant les rouleaux de la façon suivante :
la 1^{e} combinaison testée est AAAAA, la 2^{e} AAAAB, la 3^{e} AAAAC, etc. Ainsi, la 26^{e} combinaison testée est AAAAZ, puis la 27^{e} AAABA, la 28^{e} AAABB, la 29^{e} AAABC, etc.
John met en moyenne 2 secondes pour tester chaque combinaison. Combien de temps (jours, heures, minutes et secondes) lui faudra-t-il pour ouvrir cet objet sachant que le mot permettant l'ouverture est E U L E R ?

Exercice n°4 La distance du taxi

5 points



Un taxi se déplace dans la ville de *Circularix* où les rues forment toutes un quadrillage comme indiqué sur la figure ci-contre. Pour mesurer un trajet sur ce quadrillage, on compte le nombre de côtés des carrés parcourus de longueur 1 unité. Il n'y a pas de sens interdits.
Le garage du taxi est situé à l'origine **G** (indiquée sur la figure).
Par exemple, la longueur du trajet dessiné du point A au point B est de 16 unités (10 à l'horizontale et 6 à la verticale). Il n'y a pas de trajet entre A et B plus court que celui-ci mais d'autres trajets de même longueur sont possibles. On dit alors que la taxi-distance de A à B est de 16 unités. C'est la définition de la "distance du taxi".

Une cliente appelle le taxi. Elle lui dit qu'elle se trouve à une taxi-distance de 7 unités du garage **G**.
Sur le quadrillage, à découper et à coller sur votre feuille-réponse, marquer tous les points où peut se trouver la cliente.

Exercice n°5 Solidarité avec le Congo

5 points

Un petit groupe de jeunes français a entendu dire qu'une équipe de cyclistes amateurs du Congo avait beaucoup de mal à se procurer des pneus et des chambres à air pour leurs vélos de course. Pour leur venir en aide, ils ont collecté 1305 € grâce à des actions bénévoles. Dans un grand magasin de la Région Centre, les pneus « course » valent 22 € pièce et les chambres à air correspondantes valent 9 € pièce.
Ils se rendent compte qu'ils ne peuvent pas acheter avec la somme de 1305 € exactement le même nombre de pneus et de chambres à air pour avoir des roues complètes. Ils décident donc d'acheter le maximum de roues complètes (pneu plus chambre à air) et d'utiliser le reliquat (reste des fonds disponibles) pour acheter des pneus ou des chambres à air supplémentaires. Ils veulent absolument tout dépenser.
Combien de pneus et de chambres à air doivent-ils acheter ?

Exercice n°6 — Le trajet s'enracine

8 points

Sur un quadrillage formé de carrés de côté une unité, on construit des trajets d'un point de départ D jusqu'à un point d'arrivée A. Ces trajets sont formés d'une suite de segments consécutifs qui ne se coupent pas, de longueurs strictement croissantes et dont chaque extrémité est un point du réseau.
Par exemple, le trajet représenté sur la *fig a* ci-dessous a pour longueur : $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{4}$

1. Donner de la même façon la longueur du trajet représenté sur la *fig b* ci-dessous.
2. Tracer sur le quadrillage de la *fig c* (à découper et à coller sur la feuille-réponse) un trajet de D à A dont la longueur est : $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\sqrt{8}+\sqrt{9}+\sqrt{10}$
3. Tracer sur le quadrillage de la *fig d* (à découper et à coller sur la feuille-réponse) un trajet de D à A le plus long possible et donner sa longueur.

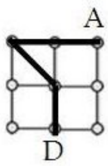


fig a

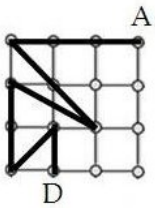


fig b

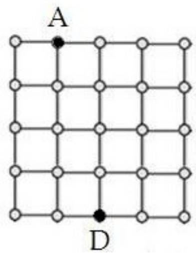


fig c

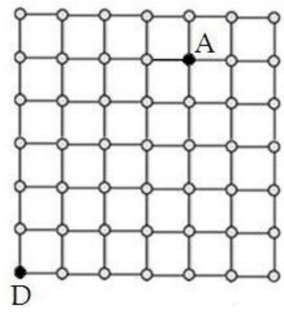


fig d

Exercice n°7 — A voir la dalle

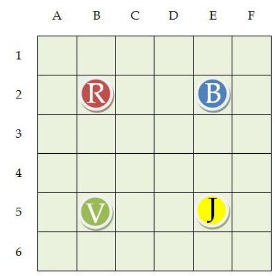
8 points

Jean-Pierre vient d'acheter un nouveau téléviseur pour remplacer l'ancien, tombé en panne.
Il remarque que les deux téléviseurs ont des dimensions extérieures identiques de 102 cm sur 63 cm. La diagonale de la dalle de l'écran du nouveau téléviseur est affichée par le constructeur à 117 cm alors que la diagonale de l'ancien mesurait exactement 104 cm. Jean-Pierre se dit que la différence doit provenir du cadre de largeur régulière qui entoure les écrans. Le cadre est beaucoup plus fin sur le nouveau, il ne mesure que 1 cm de large.

1. Vérifier que la diagonale de la dalle du nouveau téléviseur mesure 117 cm en arrondissant au cm près.
2. Trouver la largeur du cadre qui entourait l'ancien téléviseur de Jean-Pierre.

Exercice n°8 — Ne jetons pas les pions !

8 points



Deux joueurs jouent à un jeu qui utilise un plateau carré de 36 cases numérotées de A1 à F6 et 2 sacs. Le 1^{er} sac contient 13 pions bleus, 7 pions rouges, 7 pions verts et 9 pions jaunes. Le 2^{d} sac contient 36 jetons portant chacun le numéro d'une des cases de A1 à F6. Avant de jouer, on prend dans le 1^{er} sac un pion rouge, un pion vert, un pion bleu et un pion jaune que l'on pose respectivement sur les cases B2, B5, E2, E5. Puis on enlève ensuite du 2^{d} sac les jetons des cases B2, B5, E2, E5.
Avant chaque tour de jeu, le joueur doit choisir l'une des deux options suivantes :
• *Option 1* : il prend en regardant dans le 1^{er} sac un pion de la couleur de son choix puis il tire au hasard dans le 2^{d} sac un jeton (qui ne sera pas remis en jeu) indiquant le numéro de la case où il devra poser son pion de couleur.
• *Option 2* : il choisit en regardant dans le 2^{d} sac un jeton (qui ne sera pas remis en jeu) indiquant le numéro de la case où il va poser le pion de couleur qu'il tire au hasard dans le 1^{er} sac.
La règle du jeu impose que deux pions de même couleur ne peuvent pas se trouver posés sur deux cases voisines, que ce soit horizontalement, verticalement ou en diagonale. Dès qu'un joueur ne peut plus poser son pion, il a perdu.

1. La partie commence, le 1^{er} joueur choisit l'option 1 avec un pion de couleur jaune.
   Quelle est la probabilité qu'il perde ?
   Il tire ensuite un jeton indiquant la case C4 et pose son pion jaune en C4. Il n'a pas perdu, la partie peut continuer.
2. Le 2^{d} joueur prend l'option 2 et choisit le jeton indiquant la case F6. Quelle est la probabilité qu'il perde ?
   Il tire alors un pion bleu du 1^{er} sac et le pose en F6. Il n'a pas perdu, la partie peut continuer.
3. Après plusieurs coups, on arrive à une situation où aucun joueur n'a perdu et en plus des pions déjà posés précédemment, il y a des pions bleus en A1, A4, B6, C2 et D5, des pions rouges en A5, D1, D6 et F1, des pions verts en A2, C1, D3, E6, F2 et F4, des pions jaunes en B1, D2 et F3.
   Que doit décider de jouer le prochain joueur pour avoir le moins de chances de perdre ? (On donnera toutes les possibilités.)