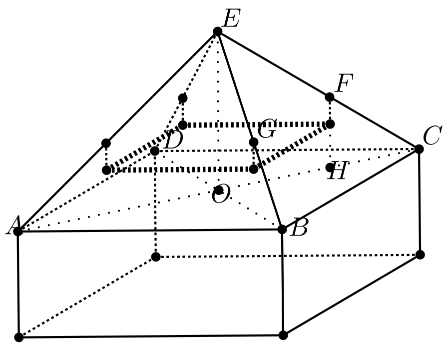
# Rallye mathématique du Centre et du Congo

## Éléments de correction de l'épreuve préparatoire

### Décembre 2014

**Exercice n°1** **« Et la lumière fut »**

**8 points**




1. • En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle $ABC$ rectangle en $B$, on obtient :
   $AC = 10\sqrt{2}$ m donc $OC = 5\sqrt{2}$ m.
   • En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle $EOC$ rectangle en $O$, on obtient :
   $EC = \sqrt{86}$ m.
   • $F$ appartient à $(EC)$, $G$ appartient à $(EB)$ et $(GF)$ est parallèle à $(BC)$ donc d'après le théorème de Thalès :
   $\dfrac{EF}{EC} = \dfrac{EG}{EB} = \dfrac{FG}{BC}$ donc $\dfrac{EF}{\sqrt{86}} = \dfrac{7}{10}$ donc $EF = \dfrac{7\sqrt{86}}{10}$ m $\approx 6,5$ m.
   (et donc $FC = \sqrt{86} - \dfrac{7\sqrt{86}}{10} = \dfrac{3\sqrt{86}}{10}$ m)
   Les filins sont accrochés à 6,5 m du sommet de la pyramide.
2. Soit $H$ le point de $[OC]$ tel que $(FH)$ et $(OC)$ soient perpendiculaires.
   • $F$ appartient à $(CE)$, $H$ appartient à $(CO)$ et $(FH)$ et $(EO)$ sont parallèles donc d'après le théorème de Thalès :
   $\dfrac{CF}{CE} = \dfrac{CH}{CO} = \dfrac{FH}{EO}$ donc $\dfrac{0,3 \times \sqrt{86}}{\sqrt{86}} = \dfrac{FH}{\sqrt{86}}$ donc $FH = 1,8$ m.
   • $4 \text{ m} + 1,8 \text{ m} - 1 \text{ m} = 4,8$ m.
   Les néons sont à une hauteur du sol de $4,8$ m.

## Exercice n°2 Just an average box

**5 points**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | b | c | 22 | d | 45 |

$\dfrac{a+b}{2} = 2$ donc $a+b = 2c$
soit $\dfrac{22+d}{2} = 45$ donc $d = 68$
$\dfrac{c+22}{2} = 68$ donc $c = 114$
$\dfrac{b+114}{2} = 22$ donc $b = -70$
$\dfrac{a+(-70)}{2} = 114$ donc $b = 298$

finalement,

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 298 | -70 | 114 | 22 | 68 | 45 |

## Exercice n°3 A côté de la plaque

**5 points**

1. De CA001 à CA999, il y a 999 numéros d'immatriculation.
   De même, de CB 001 à CB 999, il y a 999 numéros d'immatriculation...
   De A à J, il y a 10 lettres différentes, donc de CA0001 à CJ999, il y a $10 \times 999$ numéros d'immatriculation, c'est-à-dire 9990.
   De CK001 à CK854, il y a 854 numéros d'immatriculation.
   $9990 + 854 = 10844$ Il y a 10844 numéros d'immatriculation commençant par C.

2. 

| Numéros de plaque | Nombre de plaque comportant le chiffre 7 |
|---|---|
| De CA001 à CA069 | 7 (une par dizaine) |
| De CA070 à CA079 | 10 |
| De CA080 à CA099 | 2 |
| De CA001 à CA099 | 19 (en sommant ce qui précède) |
| De CA001 à CA699 | 133 (19 par centaine et 7 centaines) |
| De CA700 à CA799 | 100 |
| De CA800 à CA999 | 38 (19 par centaine et 2 centaines) |
| Donc de CA001 à CA999 | $133 + 100 + 38 = 271$ |
| De CA001 à CJ999 | 2710 (De A à J, il y a 10 lettres et pour chaque lettre 271 numéros comportant un 7) |
| De CK001 à CK854 | $7 \times 19 + 100 + 5 = 238$ |

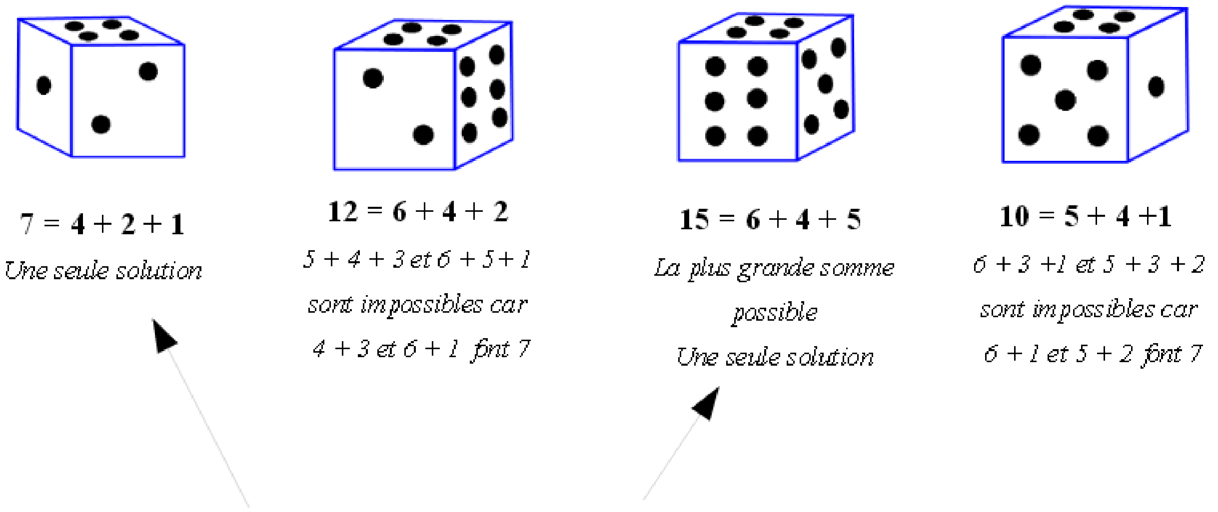
   $2710 + 238 = 2948$
   Il y a 2948 véhicules dont le numéro de plaque commence par C et comporte le chiffre 7.

3. 3. De 001 à 999, les palindromes comportant le chiffre 7 sont : 070 ; 171 ; 272 ; 373 ; 474 ; 575 ; 676 ; 707 ; 717 ; 727 ; 737 ; 747 ; 757 ; 767 ; 777 ; 787 ; 797 ; 878 ; 979. Ils sont au nombre de 19.
   De A à J, il y a 10 lettres donc de CA001 à CJ999, il y a 190 numéros de plaque vérifiant toutes conditions données.
   De CK001 à CK854, les palindromes comportant le chiffre 7 sont : 070 ; 171 ; 272 ; 373 ; 474 ; 575 ; 676 ; 707 ; 717 ; 727 ; 737 ; 747 ; 757 ; 767 ; 777 ; 787 ; 797. Ils sont au nombre de 17.
   $190 + 17 = 207$. Il y a 207 véhicules dont le numéro de plaque commence par C et dont la partie numérique est palindromique et comporte le chiffre 7.

## Exercice n°4 — La face cachée

**5 points**

La somme de deux faces opposées d'un dé étant toujours égale à 7.
On peut s'amuser à chercher les faces observées par nos quatre amis.

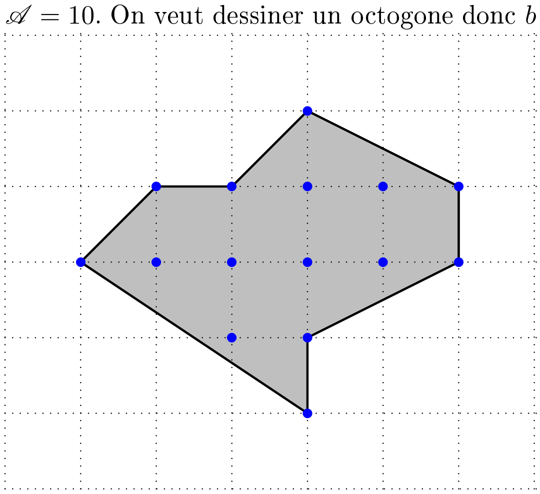



En observant seulement deux dés, ceux dont les sommes sont 7 et 15 ; on voit cinq faces sur les six.
<u>Sur la face cachée, il y a 3 points noirs</u>

## Exercice n°5 — Pick, l'as des carreaux

**8 points**

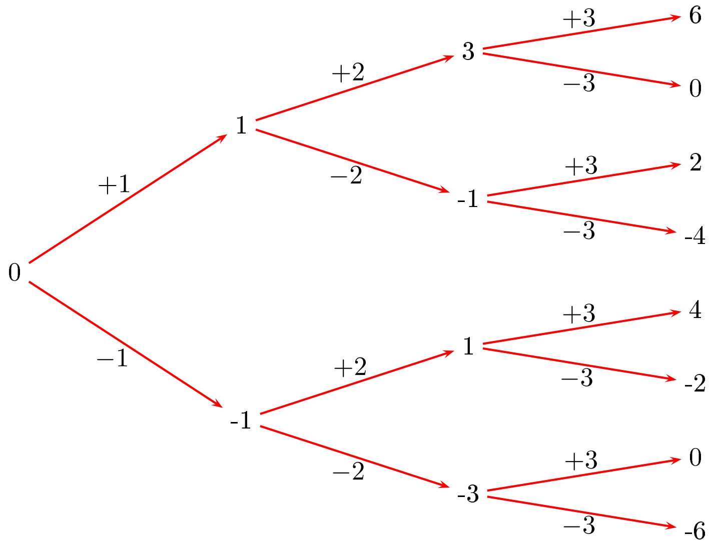
1. (a) 15 unités d'aire
   (b) $i = 9$, $b$=14 donc la formule donne le même résultat.
2. L'aire du triangle vaut 7 unités d'aires (déterminée grâce à de bons découpages). On a $i = 6$ et $b = 4$, donc la formule fonctionne ici.
3. $\mathscr{A} = 10$. On veut dessiner un octogone donc $b \geq 8$. Je prends par exemple $b = 8$. Il faut donc $i = 10 - \frac{8}{2} + 1 = 7$



Exercice n°6 | Les *"Criket Numbers"* de la sauterelle

**8 points**

1. Pour répondre à ces questions, on peut par exemple dessiner un arbre qui représente tous les chemins possibles pour la sauterelle.




Donc on voit qu'il est impossible pour la sauterelle d'aterrir sur 3 au 3ème bond. 3 n'est pas un *"Criket Number"*.

On peut atterrir sur 8 au 8ème bond. 8 est un *"Criket Number"*.
Par exemple :
$0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{-3} 0 \xrightarrow{+4} 4 \xrightarrow{-5} -1 \xrightarrow{-6} -7 \xrightarrow{+7} 0 \xrightarrow{+8} 8$.

2. Il y a 3 chemins possibles pour atteindre 5 en 5 bonds.
1er chemin : $0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{-2} -1 \xrightarrow{-3} -4 \xrightarrow{+4} 0 \xrightarrow{+5} 5$ ;
2ème chemin : $0 \xrightarrow{-1} -1 \xrightarrow{+2} 1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{-4} 0 \xrightarrow{+5} 5$ ;
3ème chemin : $0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+4} 10 \xrightarrow{-5} 5$ ;

3. Pour atteindre 9 en 4 bonds supplémentaires, elle peut faire par exemple : $0 \xrightarrow{...} ... \xrightarrow{...} 5 \xrightarrow{-6} -1 \xrightarrow{-7} -8 \xrightarrow{+8} 0 \xrightarrow{+9} 9$ ;

4. Si la sauterelle se trouve en $N$ au $N$-ième bond alors :
• En faisant un bond de longueur $N+1$ vers l'arrière, elle atterrit en $-1$.
• Puis en faisant un bond de longueur $N+2$ encore vers l'arrière, elle atterrit en $-N-3$.
• En faisant ensuite un bond de longueur $N+3$ vers l'avant, elle atterrit en 0.
• Enfin en faisant un bond de longueur $N+4$ vers l'avant, elle atterrit en $N+4$.
$0 \xrightarrow{...} ... \xrightarrow{...} N \xrightarrow{-(N+1)} -1 \xrightarrow{-(N+2)} -N-3 \xrightarrow{+(N+3)} 0 \xrightarrow{+(N+4)} N+4$ ;

Donc comme la sauterelle peut atteindre 1 en 1 bond elle peut atteindre 5 puis 9 puis 13 puis 17 ...
Comme la sauterelle peut atteindre 0 en 0 bond elle peut atteindre 4 puis 8 puis 12 puis 16 ...

Les sept premiers *"Criket Numbers"* sont 1, 4, 5, 8, 9, 12 et 13.

## Exercice n°7 — Un exercice qui ne manque pas de sel

**8 points**

En notant par exemple $x$ et $y$ les dimensions du rectangle ($y$ représentant la longueur du côté longé par la mer), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} xy = 435\,600 \\ 2x + y = 2\,420 \end{cases}$$

Par substitution,

$$\begin{cases} x(2420 - 2x) = 435\,600 \\ y = 2\,420 - 2x \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} 2x^2 - 2420x + 435\,600 = 0 \\ y = 2420 - 2x \end{cases}$$

c'est-à-dire, en simplifiant par deux la première ligne,

$$\begin{cases} x^2 - 1210x + 217\,800 = 0 \\ y = 2420 - 2x \end{cases}$$

Méthode experte (impossible pour un élève de seconde) : $\Delta = 592900 = 770^2$ et on trouve deux solutions $x_1 = 990$ et $x_2 = 220$
Méthode à l'aide des Tice (au choix : tableur, calculatrice, géogébra ...)

Et enfin, à l'aide de la deuxième équation, on en déduit la valeur de $y$ correspondante : Pour $x = 990$ on trouve $y = 440$ et pour $x = 220$ on trouve $y = 1980$

Conclusion : il est donc possible d'entourer 4 356 ares de marais salants avec 2 420 m de clôture et le saunier a deux façons de le faire : un terrain qui longe la mer sur 440 m ( 990 m pour le deuxième côté) ou un terrain qui longe la mer sur 1980 m ( 220 m pour le deuxième côté)

## Exercice n°8 — Mais où est donc passée Argine ?

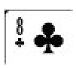
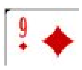
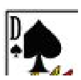
**8 points**

Sur les 104 cartes du jeu, 39 ont été distribuées.
Il y a donc 65 cartes dans la pioche.

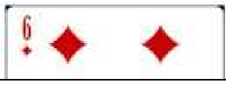
1. Quelle est la probabilité que Judith tire une carte lui permettant de faire un carré ?

| Cartes favorables |  |  | 3 cartes sur 65 sont possibles donc : |
|---|---|---|---|
| Cartes disponibles | 1 | 2 | p=$\frac{3}{65}$ |

2. Quelle est la probabilité que Rachel tire une carte lui permettant de faire une tierce ?

| Cartes favorables |  |  |  |  |  |  | 7 cartes sur 65 sont possibles donc : |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cartes disponibles | 1 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | p=$\frac{7}{65}$ |

3. Quelle est la probabilité que Pallas tire une carte lui permettant de faire une quinte ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| Cartes favorables |  |  | 1 carte sur 65 sont possibles donc : |
| Cartes disponibles | 1 | 0 | p=$\frac{1}{65}$ |