Rallye mathématique du Centre

Éléments de correction de l'épreuve officielle 2015

Exercice n°0 **Questionnaire culturel**

12 points

Voir la feuille annexe.

Exercice n°1 **Le jardin de Jean**

12 points

1. Pour répondre à cette question, il faut d'abord calculer : BE, EF, CA, DA, $\widehat{\mathrm{BF}}$ et $\widehat{\mathrm{DB}}$.

   $*$ BE = ED = EF = rayon du quart de disque = 75 m + 45 m = 120 m donc <u>BE = 120 m</u> et <u>EF = 120 m</u>.

   $*$ En utilisant le théorème de Thalès dans la configuration en « papillon » définie par les droites parallèles (BE) et (DA) et les sécantes (BA) et (DE), on a :
   $\dfrac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}} = \dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{CE}} = \dfrac{\mathrm{DA}}{\mathrm{BE}}$ donc $\dfrac{\mathrm{CA}}{96} = \dfrac{45}{75}$ donc <u>CA = 57,6 m</u>.

   $*$ Toujours en appliquant Thalès dans la même configuration que précédemment, on a :
   $\dfrac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}} = \dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{CE}} = \dfrac{\mathrm{DA}}{\mathrm{BE}}$ donc $\dfrac{\mathrm{DA}}{120} = \dfrac{45}{75}$ donc <u>DA = 72 m</u>.

   $*$ $\widehat{\mathrm{BF}} = \dfrac{2 \times \pi \times 120\,m}{4}$ donc $\widehat{\mathrm{BF}} \approx 188\,m$

   $*$ En utilisant la relation de Pythagore dans DEA rectangle en A, on a <u>EA = 96 m</u>.

   $*$ Dans le triangle DEA rectangle en A, on a $\cos\widehat{\mathrm{DEA}} = \dfrac{\mathrm{EA}}{\mathrm{ED}}$ donc $\cos\widehat{\mathrm{DEA}} = \dfrac{96}{120}$.
   Donc $\widehat{\mathrm{DEA}} \approx 37^\circ$, on en déduit que $\widehat{\mathrm{BED}} \approx 53^\circ$.
   La longueur d'un arc de cercle étant proportionnelle à la mesure de son angle au centre, le tableau ci-dessous est un tableau de proportionnalité.

Angle au centre (°)	53°	360°
Longueur arc (cm)	$\widehat{\mathrm{DB}}$	$2 \times \pi \times 120$

   donc <u>$\widehat{\mathrm{DB}} \approx 111$ m</u>.

   $*$ Longueur totale du trajet :
   120 m + 188 m + 120 m + 120 m + 111 m + 96 m + 58 m + 72 m + 120 m = 1005 m
   <u>Il a parcouru environ 1005 m.</u>

2. Pour répondre à cette question , il faut calculer toutes les longueurs manquantes c'est-à-dire AF et $\widehat{\mathrm{DF}}$.

   $*$ AF ≈ 120 m - 96 m donc <u>AF ≈ 24 m</u> .
   $*$ $\widehat{\mathrm{DF}} \approx 188$ m - 111 m donc <u>$\widehat{\mathrm{DF}} \approx 77$ m</u>.

   $*$ Voici un chemin plus court :
   E → C → D → F → A → D → B → C → A → E → B → E
   Longueur :
   120 m + 77 m + 24 m + 72 m + 111 m + 96 m + 58 m + 96 m + 120 m + 120 m = 894 m.

Exercice n°2 — Boxed Products

5 points

Soit :

a_1	a_2	2	a_4	a_5	4	a_7	a_8	x	a_{10}	a_{11}	3	a_{13}	a_{14}

Comme $a_1 \times a_2 \times 2 \times a_4 = a_2 \times 2 \times a_4 \times a_5 = 120$ donc $a_1 = a_5$
De même $a_2 \times 2 \times a_4 \times a_5 = 2 \times a_4 \times a_5 \times a_6$ donc $a_2 = a_6 = 4$

De façon générale : $a_n \times a_{n+1} \times a_{n+2} \times a_{n+3} = a_{n+1} \times a_{n+2} \times a_{n+3} \times a_{n+4}$ donc $a_n = a_{n+4}$
On peut utiliser cette information et le grille devient :

x	4	2	3	x	4	2	3	x	4	2	3	x	4

$x \times 4 \times 2 \times 3 = 120 \Rightarrow x = 5$
Soit finalement :

5	4	2	3	5	4	2	3	5	4	2	3	5	4

Exercice n°3 — Le cryptex

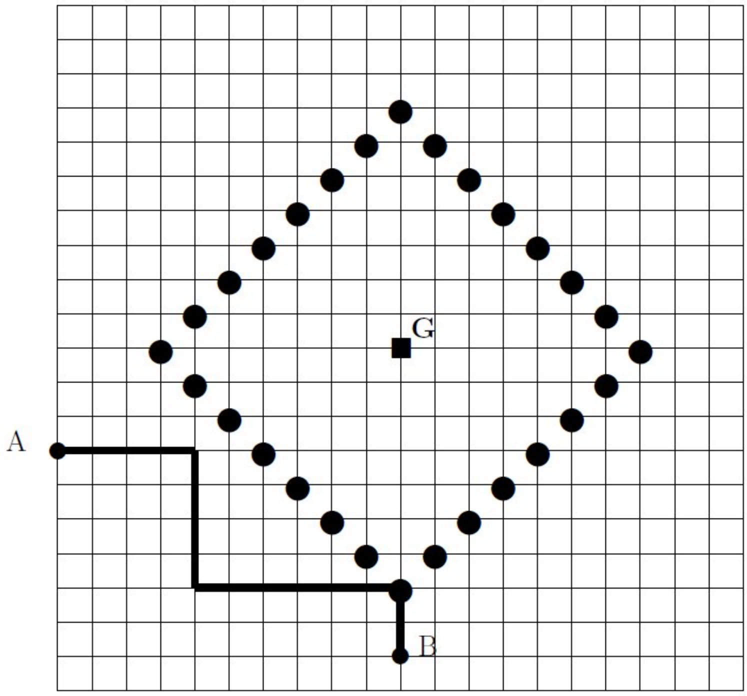
8 points

A chaque fois qu'il tourne le second rouleau, John a tourné 26 fois le premier .
A chaque fois qu'il tourne le troisième rouleau, John a tourné le second 26 fois. C'est-à-dire 26^2 essais.
A chaque fois qu'il tourne le quatrième rouleau, John a tourné le troisième 26 fois. C'est-à-dire 26^3 essais.
A chaque fois qu'il tourne le cinquième rouleau, John a tourné le quatrième 26 fois. C'est-à-dire 26^4 essais.
Pour obtenir EULER :
E (4×26^4) + U (20×26^3) + L(11×26^2) + E (4×26) + R (18).
donc : $4 \times 26^4 + 20 \times 26^3 + 11 \times 26^2 + 4 \times 26 + 17 + 1 = 2\ 186\ 982$ essais.
Chaque essai prend 2 secondes. Le temps nécessaire est donc de 4 373 964 secondes.
Il faudra à John : 50 jours 14 heures 59 min 24 s sans s'arrêter ni dormir ni ...

Exercice n°4 — La distance du taxi

5 points

Voici le résultat :



Remarque :
les points marqués sont en fait sur un cercle de centre G et de rayon 7, mais un cercle lié à cette distance du taxi ! Qui s'appelle aussi (en statistique) la distance de Manhatan.

Exercice n°5 Solidarité avec le Congo

5 points

•Solution à l'aide du tableur

C2 f_x =(1305-22*A2)/9

	A	B	C	D
1	pneus		chambres	
2	1		142,555556	
3	2		140,111111	
4	3		137,666667	
5	4		135,222222	
6	5		132,777778	
7	6		130,333333	
8	7		127,888889	
9	8		125,444444	
10	9		123	
11	10		120,555556	
12	11		118,111111	
18	17		103,444444	
19	18		101	
20	19		98,5555556	
27	26		81,4444444	
28	27		79	
29	28		76,5555556	
36	35		59,4444444	
37	36		57	
38	37		54,5555556	
39	38		52,1111111	
40	39		49,6666667	
41	40		47,2222222	
42	41		44,7777778	
43	42		42,3333333	
44	43		39,8888889	
45	44		37,4444444	
46	45		35	
47	46		32,5555556	
48	47		30,1111111	

Soit x le prix d'un pneu et y le prix d'une chambre à air, on a :
$22x + 9y = 1305$
1305 n'est pas divisible par $(22 + 9) = 31$. $31 \times 42 + 3 = 1305$;
On voit que :
9 pneus et 123 chambres font 1305 € (9 roues complètes)
18 pneus et 101 chambres font 1305 € (18 roues complètes)
36 pneus et 57 chambres font 1305 € (36 roues complètes)
45 pneus et 35 chambres font 1305 € (35 roues complètes)
La bonne solution est :
36 pneus et 57 chambres font 1305 €
Soit 36 roues complètes et 21 chambres à air supplémentaires.

•Solution à l'aide d'un raisonnement arithmétique

$22 + 9 = 31$, une roue complète vaut 31 €.
$1305 = 42 \times 31 + 3$, le nombre maximum de roues complètes est de 42 mais il reste alors 3 €.

<u>Diminuons progressivement le nombre de roues complètes afin de pouvoir dépenser toute la somme.</u>
On s'arrête dès lors que le reste est un multiple de 9 ou 22.

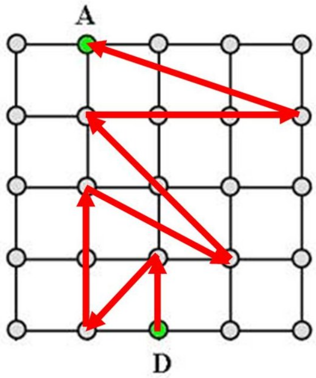
$1305 = 41 \times 31 + 34$
$1305 = 40 \times 31 + 65$
$1305 = 39 \times 31 + 96$
$1305 = 38 \times 31 + 127$
$1305 = 37 \times 31 + 158$
$1305 = 36 \times 31 + 189$ or $189 = 21 \times 9$.

Soit 36 roues complètes et 21 chambres à air supplémentaires.

Exercice n°6 — Le trajet s'enracine

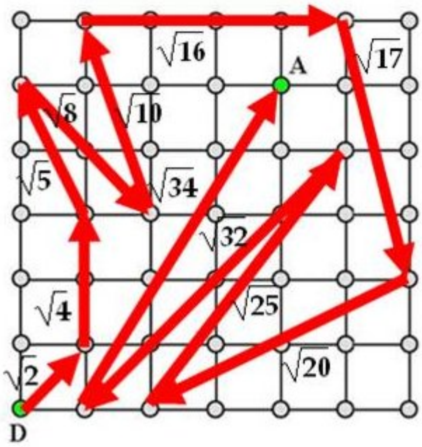
8 points

1. La longueur du trajet représenté sur la *fig b* est : $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\sqrt{8}+\sqrt{9}$.
2. Le trajet représenté sur la *fig c* ci-dessous a pour longueur : $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\sqrt{8}+\sqrt{9}+\sqrt{10}$.



3. La longueur du trajet représenté sur la *fig d* ci-dessous est :

$$\sqrt{2}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\sqrt{8}+\sqrt{10}+\sqrt{16}+\sqrt{17}+\sqrt{20}+\sqrt{25}+\sqrt{32}+\sqrt{34}\approx 40,724.$$



Exercice n°7 — A voir la dalle

8 points

1. Les dimensions de la dalle rectangulaire du nouveau téléviseur sont 100 cm sur 61 cm.
   Soit d la diagonale de la dalle de l'écran du nouveau téléviseur.
   En utilisant le théorème de Pythagore il vient :
   $d^2 = 100^2 + 61^2$
   $d^2 = 1000 + 3721$
   $d^2 = 13721$ soit $d = \sqrt{13721}$
   d' où $d = 117$ cm arrondi à 1cm près
2. Soit x la largeur du bord du cadre qui entourait l'ancien téléviseur de Jean-Pierre.
   On obtient de la même façon : $(102-2x)^2 + (60-2x)^2 = 104^2$
   $10404 - 408x + 4x^2 + 3969 - 252x + 4x^2 = 10816$
   d'où $8x^2 - 660x + 3557 = 0$
   Par essais successifs, par étude de la fonction à l'aide de la calculatrice (graphique ou tableau de valeur), on trouve : $x \approx 5,8$ ou $x \approx 76,7$
   Seule la première solution convient.

Exercice n°8 | Ne jetons pas les pions !

8 points

1. Il y a 32 cases libres et sur ces 32 cases, 8 cases le font perdre.
La probabilité de perdre est donc de $\frac{8}{32}$ soit $\frac{1}{4}$.

2. Le joueur perd s'il tire un pion jaune. Il reste 7 pions jaunes sur les 31 pions restants dans le 2^e sac.
La probabilité de perdre est donc de $\frac{7}{31}$.

3. Si le joueur choisit l'option 1 :
Avec la couleur bleue : quelque soit le numéro de case tirée, il perd.
Avec la couleur rouge : il y a 4 cases (E3, D4, E4, F5) sur les 12 restantes pour lesquelles il ne perd pas.
La probabilité de ne pas perdre est de $\frac{4}{12}$ soit $\frac{1}{3}$.
Avec la couleur verte : il ne peut pas choisir de pion vert car ils sont tous posés.
Avec la couleur jaune : il y a 3 cases (A3, A6, C6) sur les 12 restantes pour lesquelles il ne perd pas.
La probabilité de ne pas perdre est de $\frac{3}{12}$ soit $\frac{1}{4}$.

   Si le joueur choisit l'option 2 :
Avec la case A3 : il doit tirer un pion jaune. Il en reste 4 sur les 12 pions restants.
La probabilité de ne pas perdre est de $\frac{4}{12}$ soit $\frac{1}{3}$.
Avec la case A6 : il doit tirer un pion jaune. Il en reste 4 sur les 12 pions restants.
La probabilité de ne pas perdre est de $\frac{4}{12}$ soit $\frac{1}{3}$.
Avec la case B3 : il perd quelque soit la couleur du pion tiré.
Avec la case B4 : il perd quelque soit la couleur du pion tiré.
Avec la case C3 : il perd quelque soit la couleur du pion tiré.
Avec la case C5 : il perd quelque soit la couleur du pion tiré.
Avec la case C6 : il doit tirer un pion jaune. Il en reste 4 sur les 12 pions restants.
La probabilité de ne pas perdre est de $\frac{4}{12}$ soit $\frac{1}{3}$.
Avec la case D4 : il doit tirer un pion rouge. Il en reste 2 sur les 12 pions restants. La probabilité de ne pas perdre est de $\frac{2}{12}$ soit $\frac{1}{6}$.
Avec la case E1 : il perd quelque soit la couleur du pion tiré.
Avec la case E3 : il doit tirer un pion rouge. Il en reste 2 sur les 12 pions restants.
La probabilité de ne pas perdre est de $\frac{2}{12}$ soit $\frac{1}{6}$.
Avec la case E4 : il doit tirer un pion rouge. Il en reste 2 sur les 12 pions restants.
La probabilité de ne pas perdre est de $\frac{2}{12}$ soit $\frac{1}{6}$.
Avec la case F5 : il doit tirer un pion rouge. Il en reste 2 sur les 12 pions restants.
La probabilité de ne pas perdre est de $\frac{2}{12}$ soit $\frac{1}{6}$.

   Donc soit il choisit l'option 1 avec la couleur rouge, soit il choisit l'option 2 avec les cases A3 ou A6 ou C6.
Dans chaque cas la probabilité de ne pas perdre est de $\frac{1}{3}$.