Rallye mathématique du Centre et du Congo

Éléments de correction de l'épreuve préparatoire

Décembre 2013

Exercice n°1 **Meuble sous toit**

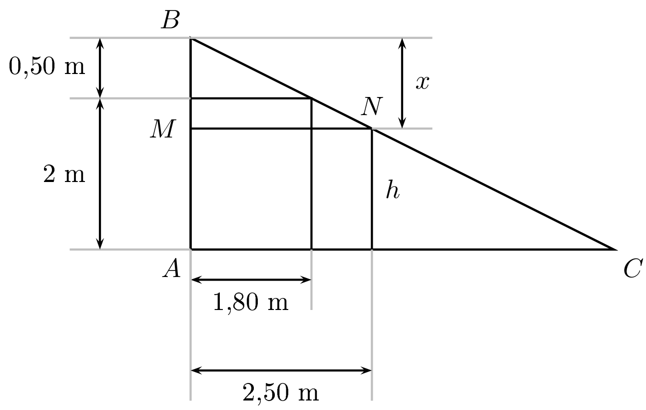
5 points

Posons $BM = x$ et $AM = h$ (voir figure).
Utilisons le théorème de Thalès dans le triangle BMN (ou en utilisant $\tan(\widehat{ABC})$) pour écrire :

$$\frac{1,8}{0,5} = \frac{2,5}{x} \quad \text{d'où} \quad x = \frac{2,5 \times 0,5}{1,8} = \frac{25}{36}$$

$$h = 2,5 - \frac{25}{36} \approx 1,8055$$

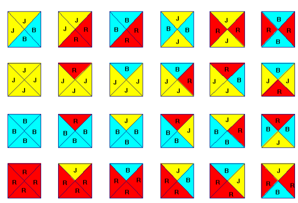
Le locataire peut donc mettre à la même place le meuble de 1,80 m sur 2,50 m.
Remarque : c'est loin d'être la seule méthode !



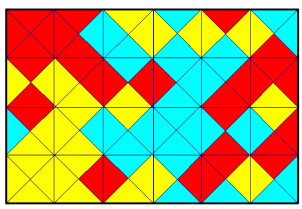
Exercice n°2 **Couper Coller**

8 points

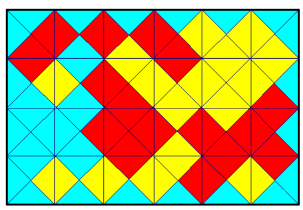
Les 24 pions :



Les côtés en contact de même couleur :



Les côtés en contact de même couleur et les côtés du rectangle d'une seule couleur :



Exercice n°3 « Epharant ... »

12 points

Situation 1 :
Les instants d'émission du phare A ont lieu avec un nombre de minutes pair , alors que les instants d'émission du phare B ont lieu avec un nombre de minutes impair.
Il n'y aura donc pas de coïncidence.
Situation 2 :
Soit t l'horaire de la 1ère émission du phare B. 5 h 48 min valent 348 min ;
t est tel que $348 = n \times 10 + t$ avec $0 \leqslant t < 9$; t est le reste de la division de 348 par 10 soit 8.
Le phare B émet pour la première fois à 0 h 08 min.
Situation 3 :
Phare A : 0 - 6 - 12 - 18 - $\boxed{24}$ - 30 - 36 - 42 - 48 - **54** - ...
Phare B : 4 - 14 - $\boxed{24}$ - 34 - 44 - **54** ...
L'heure de la 1ère coïncidence entre les deux phares est 0 h 24 min
Les coïncidences suivantes ont lieu toutes les 30 min (plus petit commun multiple de 6 et 10).
La dixième coïncidence a donc lieu 9×30 min après la première, c'est à dire à 4 h 54 min.
On peut compter toutes les 30 min entre 0 h 00 et 07 h 00 à partir de la première coïncidence à 0 h 24.
Ou bien, on recherche le plus grand entier n tel que $24 + n \times 30 \leqslant 7 \times 60$ d'où $n = 13$;
Il y aura donc eu 14 coïncidences entre 0 h et 7 h.
Situation 4 :
Soit x la période d'émission du phare B. 1 h 36 min = 96 min ;
x est tel que $96 = 5 + n \times x$ et $2 \leqslant x \leqslant 12$ donc $n \times x = 91 = 7 \times 13$ d'où $x = 7$.
La période d'émission du phare B est de 7 minutes.

Exercice n°4 Le code secret

5 points

Procédons par ordre : le nombre s'écrit abcd pq.

abcd est de la forme : 1234 ; 2345 ; 3456 ; 4567 ; 5678 ; 6789
Les deux derniers chiffres possibles sont : **10 ; 21 ; 32 ; 43 ; 54 ; 65 ; 76 ; 87 ; 98**

Or le code est un carré parfait. Les carrés ne peuvent se terminer que par : 0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 6 ou 9.

Les deux derniers chiffres ne peuvent être que : **10 ; 21 ; 54 ; 65 ; 76**

1234	10	pas un carré		4567	10	pas un carré
1234	21	pas un carré		4567	21	pas un carré
1234	54	pas un carré		4567	54	pas un carré
1234	65	pas un carré		4567	65	pas un carré
1234	76	pas un carré		4567	76	pas un carré
2345	10	pas un carré		5678	10	pas un carré
2345	21	pas un carré		5678	21	pas un carré
2345	54	pas un carré		5678	54	pas un carré
2345	65	pas un carré		5678	65	pas un carré
2345	76	pas un carré		5678	76	pas un carré
3456	10	pas un carré		6789	10	pas un carré
3456	21	pas un carré		6789	21	pas un carré
3456	54	pas un carré		6789	54	pas un carré
3456	65	pas un carré		6789	65	pas un carré
3456	76	pas un carré		6789	76	$(824)^2$

Le code était donc : **678976**

Exercice n°5 **Renversants**

5 points

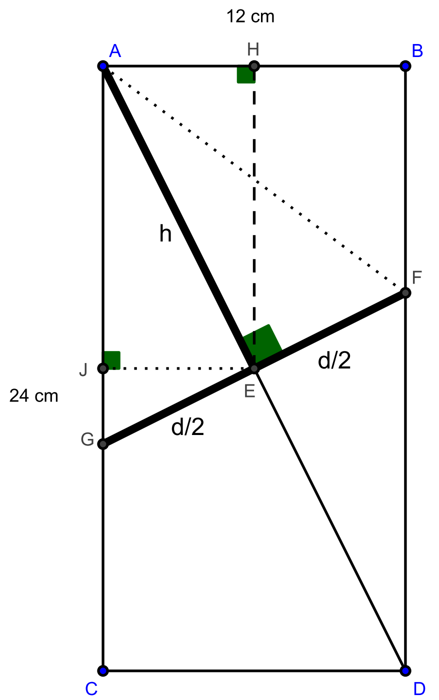
Voici les 24 nombres "renversants" vérifiant les règles de l'énoncé :
60009 ; 60809 ; 66099 ; 66899 ; 68089 ; 68889 ; 69069 ; 69869
80008 ; 80808 ; 86098 ; 86898 ; 88088 ; 88888 ; 89068 ; 89868
90006 ; 90806 ; 96096 ; 96896 ; 98086 ; 98886 ; 99066 ; 99866

Exercice n°6 **Le chapeau chinois**

8 points

1. Pour faire le pliage, il faut amener le point D sur le point A. On obtient ainsi le pli indiqué par le segment [GF].

2. Puis en pliant la feuille suivant h, on obtient le pli indiqué par le segment [AD].
On obtient donc la figure ci-dessous dans laquelle, pour des raisons de symétrie, E est le centre du rectangle et H et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC].



On remarque que la hauteur h est égale à la moitié de la longueur de la diagonale [AD].
En utilisant la relation de Pythagore dans le triangle rectangle AHE rectangle en E, on a

$\mathrm{h}^2 = 6^2 + 12^2$ donc $\mathrm{h} = \sqrt{180}$ cm

3. L'aire du pentagone est égale à l'aire totale de la bande à laquelle il faut enlever l'aire du triangle GAF.

Sachant que $\mathrm{d} = \mathrm{h} = \sqrt{180}$ cm, on a :

$$A_{pentagone} = 12 \times 24 - \frac{\sqrt{180} \times \sqrt{180}}{2} = 288 - 90 = 198$$

L'aire du pentagone est de 198 cm^2.

Exercice n°7 **Le logo du mécène**

8 points

1. Lorsque $BM = 1$ m, on a $AM = 3,2$ m.
   La propriété de Thalès permet de trouver $MN = \dfrac{1}{4,2} \times 1,8 = \dfrac{3}{7}$ m.
   L'aire du rectangle $AMNP$ est alors $\mathscr{A} = AM \times MN = 3,2 \times \dfrac{3}{7} \approx 1,37$ m^2.
2. En posant $BM = x$ m, on trouve $AM = 4,2 - x$ et $MN = \dfrac{x}{4,2} \times 1,8 = \dfrac{3x}{7}$ m.
   L'aire du rectangle $AMNP$ est alors $\mathscr{A}(x) = (4,2 - x) \times \dfrac{3x}{7} = \dfrac{-3x^2 + 12,6x}{7}$.
   A l'aide de la calculatrice, on peut conjecturer que $\mathscr{A}(x)$ est maximum lorsque $x = 2,1$ m et $\mathscr{A}_{max} = 1,89$ m^2.

   On peut démontrer cette conjecture :
   - $\mathscr{A}(2,1) = (4,2 - 2,1) \times \dfrac{3 \times 2,1}{7} = 1,89$
   - Pour tout $x \in [0\ ;\ 4,2]$,
     $1,89 - \mathscr{A}(x) = 1,89 - \dfrac{-3x^2 + 12,6x}{7} = \dfrac{3x^2 - 12,6x + 13.23}{7} = \dfrac{3(x^2 - 4,2x + 4,41)}{7} = \dfrac{3(x - 2,1)^2}{7} \geq 0.$
     Donc pour tout $x \in [0\ ;\ 4,2]$, $1,89 - \mathscr{A}(x) \geq 0$, donc $1,89 \geq \mathscr{A}(x)$.

   Le maximum de $\mathscr{A}$ est bien 1,89, atteint pour $x = 2,1$.
   Dans ce cas, $AM = 4,2 - x = 4,2 - 2,1 = 2,1$ m et $MN = \dfrac{3x}{7} = \dfrac{3 \times 2,1}{7} = 0,9$ m.

   Conclusion : Pour que le logo ait une aire maximale, il faut que $AM = 2,1$ m et $MN = 0,9$ m.

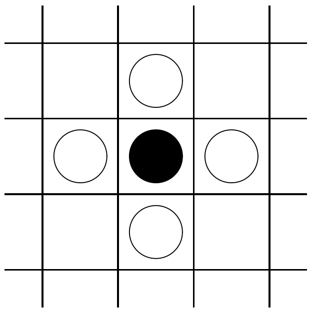
Exercice n°8 **Touché, coulé !**

8 points

1. **(a)**
   Il n'y a a priori pas de difficultés. Un bateau est constitué de 2 cases contiguës. L'expérience aléatoire correspondante consiste à toucher une des cases. Il y a 2 cases favorables sur 100 cases possibles. La probabilité est donc de 2/100, soit **1/50**.
   (b)
   C'est une nouvelle expérience aléatoire. Cette fois, les cases du bateau étant contiguës, et comme on est en E5 (case "standard"), il y a 4 cases favorables pour atteindre la deuxième case du bateau, qui sont **E4, E6, D5 et F5**.
   (c)
   Il faut de nouveau se placer dans une autre expérience aléatoire, et envisager trois cas distincts, selon la case touchée. On sait que 2 cases sont "favorables".

1er cas :

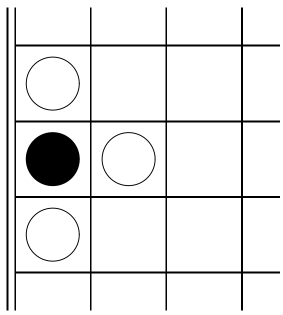
Case "standard"



même cas que la b/
4 cases sont possibles.

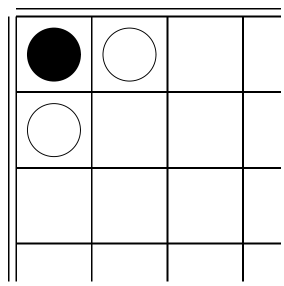
2ème cas :

Case touchant un bord, mais pas en coin.



3 cases sont possibles.

3ème cas :
coin.

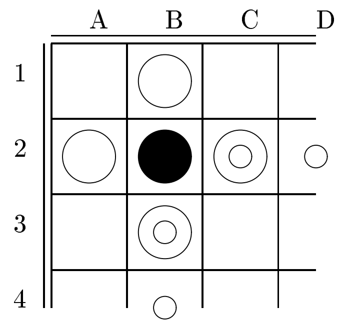


Cette fois, seules 2 cases sont possibles.

Seul, le 3ème cas correspond à la description. La position des cases favorables est alors donnée : par exemple, B1 et A2 si Léa a joué en A1.

Les positions possibles de la case touchée du bateau de Pierre sont : **A1, A10, J1, et J10**.
D'où 8 positions possibles du bateau : **(A1,A2) ; (A1,B1) ; (A9,A10) ; (A10,B10) ; (J1,J2) ; (I1,J1) ; (I10,J10) et (J9,J10)**

2. L'expérience consiste à atteindre <u>une</u> deuxième case (et une seule). La disposition des cases favorables se trouve dans le dessin suivant :



On s'aperçoit alors que certaines cases correspondent à deux positions du bateau. Ce sont les cases **B3 et C2** qui donnent le maximum de chance.