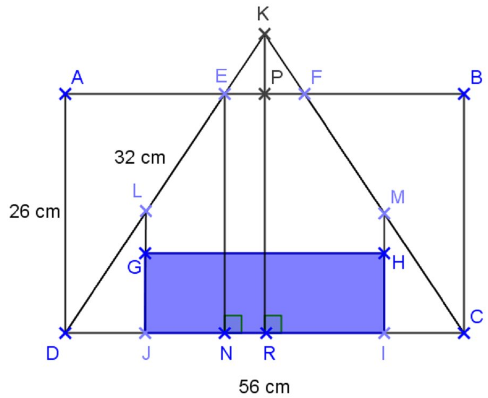
Rallye mathématique du Centre et du Congo

Éléments de correction de l'épreuve officielle 2014

Exercice n°1 **Casier judicieux**

8 points

Il suffit de regarder si le casier rentre par le côté qui mesure 30 cm car s'il ne rentre pas par ce côté, il ne rentrera pas par le côté qui mesure 45 cm.



• <u>1^e méthode</u>

On calcule JL et on regarde si c'est plus grand ou plus petit que 17 cm ce qui correspond à la hauteur du casier.

On applique le théorème de Thalès dans le triangle DEN avec (LJ) // (EN) et on a $\dfrac{LJ}{EN} = \dfrac{DJ}{DN}$.
On sait que EN = 26 cm.
On calcule DN en utilisant la relation de Pythagore dans le triangle ADN rectangle en N.

On trouve DN = $2\sqrt{87}$ cm $\approx$ 18,7 cm.
IJ = 30 cm donc DJ = $\dfrac{56cm}{2}$ - $\dfrac{30cm}{2}$ = 13 cm
Donc $\dfrac{LJ}{26} = \dfrac{13}{18,7}$ donc LJ $\approx$ 18,1 cm .
Donc le casier rentre.

• <u>2^{de} méthode</u>

On suppose que LJ mesure 17 cm, on calcule DJ puis on en déduit IJ. Si le segment [IJ] mesure plus de 30cm, le casier rentre.
Dans le triangle DEN rectangle en N : $\sin\widehat{EDN} = \dfrac{EN}{DE} = \dfrac{26}{32}$ donc $\widehat{EDN} \approx 54^\circ$.

Dans le triangle rectangle DLJ rectangle en J : $\tan\widehat{LDJ} = \dfrac{LJ}{DJ}$ donc DJ = $\dfrac{17cm}{\tan 54^\circ}$ $\approx$ 12,4 cm
Donc IJ $\approx$ 56 cm - 2 $\times$ 12,4 cm = 31,3 cm
Donc le casier rentre.

Exercice n°2 — L'écart d'heure

5 points

1. Écart de 3 s par heure donc pour avoir 7 minutes, il faut $\dfrac{420}{3} = 140$ h soit <u>5 jours et 20 heures</u>.

2. Au bout de 7 jours soit 168 h, il y aura 168 s de retard sur la première montre et 336 s d'avance sur la seconde.

   La première marque (8 h - 2 min 48 s) soit <u>7 h 57 min 12 s</u>.

   La seconde marque (8 h + 5 min 36 s) soit <u>8 h 5 min 36 s</u>.

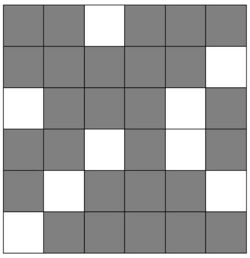
Exercice n°3 — Le cache secret, le message se transforme

8 points

1. Le message que Maxence va envoyer à Sarah est : OASEQ NRDNR OU ?ET RIEER NLECT .

2. Maxence va pouvoir lire : RDVP RESD UCHA TEAU soit rdv près du château.

3. Voici le cache reconstitué.



Exercice n°4 — Jules décode

8 points

Le code comporte 5 chiffres suivis de la lettre B.
Sachant que le code n'a jamais été changé, que deux touches sont quasiment effacées, qu'une autre touche montre des traces d'usure mais moins que les deux autres et que les autres touches sont comme neuves, on peut en déduire que le code utilise uniquement trois chiffres différents : un chiffre est utilisé deux fois, un autre chiffre est aussi utilisé deux fois et un chiffre est utilisé une seule fois.

Les 4 premiers chiffres forment un carré parfait donc on cherche les nombres de 4 chiffres qui sont des carrés parfaits composés de 3 chiffres différents.
De plus comme le nombre de la combinaison à cinq chiffres est un palindrome, son chiffre des dizaines est le même que celui des unités de mille donc dans la liste des carrés il faut éliminer tous les nombres dont le chiffre des unités n'est pas égal au chiffre des centaines.

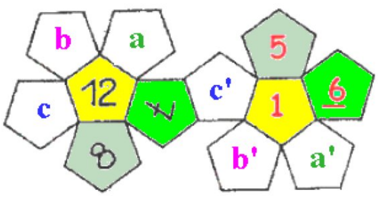
Finalement, il reste comme carrés possibles : 3969, 5929 et 8464.
La combinaison étant un palindrome, il reste comme possibilités : 39693B , 59295B et 84648B.

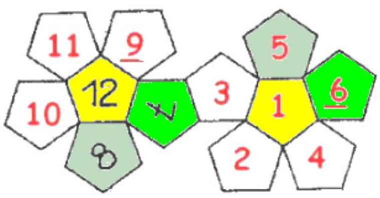
Il n'y a donc que 3 codes possibles donc il est certain de rentrer dans l'immeuble sans bloquer la porte.
Il a donc raison.

Exercice n°5 — Le dé à Dédé

5 points

Il y a plusieurs solutions, En voici une :





avec a+a'=13, b+b'=13 et c+c'=13

avec (a,a')=(9 ; 4) ; (b,b')=(11 ; 2) et (c,c')=(10 ; 3)

Exercice n°6 — Deux plis pour trois

8 points

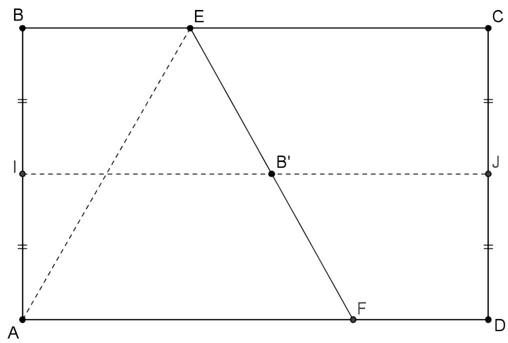
1. B′ est symétrique de B par rapport à (AE) donc $\widehat{BAE}=\widehat{EAB'}$
2. On note F le point d'intersection de (EB′) et (AD).
   - B′ est le milieu de [EF] grâce au théorème de Thalès ;
   - $\widehat{ABE}=\widehat{AB'E}$ par symétrie par rapport à (AE).

   Dans le triangle EAF, la droite (AB′) est hauteur et médiane donc bissectrice. On a donc $\widehat{EAB'}=\widehat{B'AD}$

   Les angles $\widehat{BAE}$, $\widehat{EAB'}$ et $\widehat{B'AD}$ sont égaux et leur somme vaut 90°.

   Finalement $\underline{\widehat{BAE}=\widehat{EAB'}=\widehat{B'AD}=30^\circ}$

3. On a partagé l'angle $\widehat{BAF}$ en trois.
   L'opération associée s'appelle la <u>trisection</u> ; les droites (AE) et (AB′) sont appelées trisectrices de l'angle $\widehat{BAF}$.



<u>Autre solution plus élégante et concise :</u>

Le triangle ABB′ possède deux axes de symétrie (qui correspondent aux axes des deux pliages opérés : celui qui définit l'axe de la bande : à savoir (IJ) et celui d'axe (AE). Il est donc équilatéral. (soit parce qu'on connaît ce théorème soit parce que la démonstration en est immédiate).
Finalement on réalise sans aucun instrument - mais grâce à la géométrie du pliage - un angle de 60° . Il est bien sûr plus "facile" (quoique...) par deux pliages de réaliser un angle droit .

Exercice n°7 — Des dés

5 points

Première manche
L'attaquant a obtenu 5.
Le défenseur doit faire 5 ou 6. La probabilité est : $P=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$.

Deuxième manche
L'attaquant a obtenu 3 et 5.
Le défenseur doit faire 4, 5 ou 6. La probabilité est : $P=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$.

Troisième manche
L'attaquant a obtenu 3 et 4.
Le défenseur doit faire un des scores non rayés du tableau suivant :

	1	2	3	4	5	6
1	$\cancel{2}$	$\cancel{3}$	$\cancel{4}$	$\cancel{5}$	$\cancel{6}$	7
2	$\cancel{3}$	$\cancel{4}$	$\cancel{5}$	$\cancel{6}$	7	8
3	$\cancel{4}$	$\cancel{5}$	$\cancel{6}$	7	8	9
4	$\cancel{5}$	$\cancel{6}$	7	8	9	10
5	$\cancel{6}$	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Et on a : $P=\dfrac{21}{36}\ (>\dfrac{1}{2})$

Exercice n°8 — Des pensées sans trop dépenser

8 points

Soit x le petit coté du triangle de pensées de grand coté 60 m (qui est le même que celui de coté 80).
Calculons les surfaces de chaque morceaux.
Tulipes : $st(x)=(80-x)(60-x)=4800-140x+x^2$.
Pensées : $sp(x)=\dfrac{1}{2}(60x+80x)=70x$.
Gazon : $sg(x)=60\times 80-(4800-140x+x^2+70x)=70x-x^2$.

Pour les prix, on multiplie st par 8, sp par 7 et sg par 4.
Le prix total est alors : $Pt(x) = 38400 - 350x + 4x^2$.
Il faut minimiser cette valeur. En utilisant un tableur on obtient le minimum du prix pour x compris entre 43,7 et 43,8 (en m). Le prix total est alors : $Pt = 30\ 743,76$ euros.
Par calcul, on obtient le minimum pour $x = \frac{350}{8} = 43,75$. Le prix est $Pt = 30\ 743,75$ euros.