Rallye mathématique du Centre et du Congo

Éléments de correction de l'épreuve préparatoire - 2° 2012

Exercice n°1 **Les cubes de son cours**

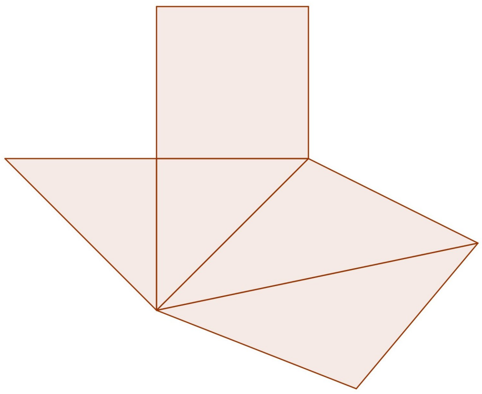
5 points

FACE A:

FACE B:

Exercice n°2 **Empreinte**

8 points



Exercice n°3 Les ascendants

12 points

1. 123456789
2. Les ascendants à 2 chiffres :

   12 13 14 15 16 17 18 19
   23 24 25 26 27 28 29
   34 35 36 37 38 39
   45 46 47 48 49
   56 57 58 59
   67 68 69
   78 79
   89

   soit 1+2+...+8 = 36
3. 84 ascendants à 3 chiffres (84 = 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 +1)
   le nombre d'ascendants à 3 chiffres qui commencent par 1 est 28
   le nombre d'ascendants à 3 chiffres qui commencent par 2 est 21
   le nombre d'ascendants à 3 chiffres qui commencent par 3 est 15 et ainsi de suite.
4. 126 ascendants à 4 chiffres (126 = 56+35+20+10+4+1).
   Le nombre d'ascendants à 4 chiffres qui commencent par 1 est 56 et ainsi de suite.
5. Il y a autant d'ascendants à 4 chiffres qu'à 5 chiffres :
   Pour chaque ascendant à 4 chiffres, on obtient avec les 5 chiffres non utilisés un unique ascendant à 5 chiffres.
6. 511

Nombre de chiffres	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**total**
Nombre d'ascendants	**9**	**36**	**84**	**126**	**126**	**84**	**36**	**9**	**1**	**511**

Exercice n°4 Echecs et maths

8 points

Question 1 : ce sont les cases C4, C6, D3, D7, F3, F7, G4, G6.
Question 2a : 4, avec par exemple le trajet G4, F6, D5 et F4.
Question 2b : ce sont les cases H8, G7, F4, F8, E7, D6, D8, C1, C3, C5,
C7, B2, B4, B6, A1, A3, A5, A7.
Pour justifier, il suffit d'inscrire sur chaque case le nombre minimum de coups nécessaires pour l'atteindre.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
A	4	5	4	5	4	5	4	5
B	3	4	3	4	3	4	5	4
C	4	3	4	3	4	3	4	5
D	3	2	3	4	3	4	3	4
E	2	3	2	3	2	3	4	3
F	1	2	1	4	3	2	3	4
G	2	3	2	1	2	3	4	3
H	3	X	3	2	3	2	3	4

Exercice n°5 — Attention à la marche

5 points

Les diverses hypothèses concernant la descente de l'escalier 2 marches par 2 marches, 3 marches par 3 marches, etc... jusqu'à 7 par 7 conduisent aux constatations suivantes :
le nombre de marches est :

1. multiple de 7 ;
2. impair ;
3. et quand on le divise par
   (a) 3 il reste 2 ;
   (b) 4 il reste 3 ;
   (c) 5 il reste 4 ;
   (d) 6 il reste 5.

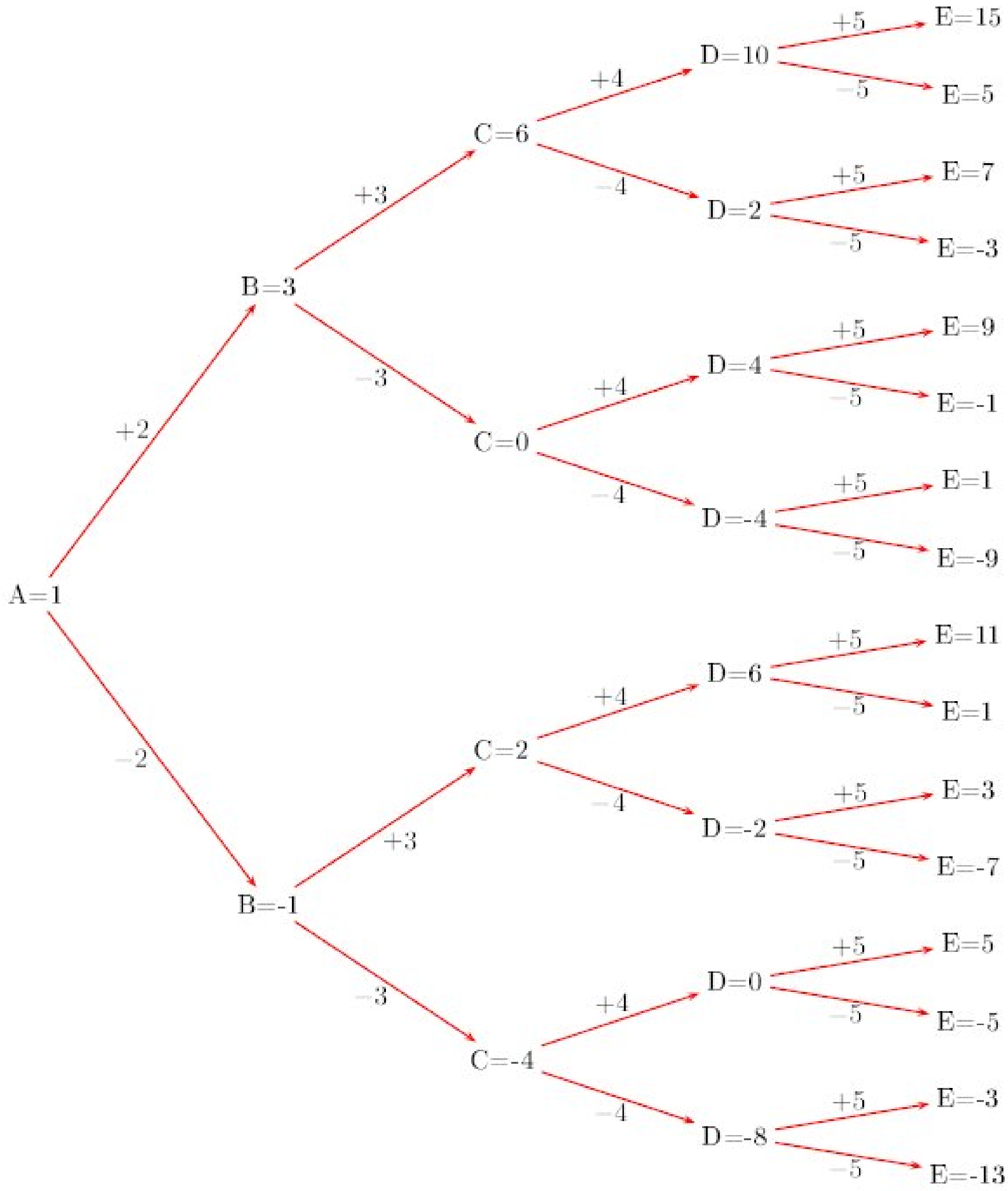
En divisant les multiples de 7 impairs inférieurs à 200 par 3, 4, 5 et 6, on constate que seul **119** convient. Ce qui prouve à la fois son existence et son unicité.

Plus astucieusement : On pourra s'intéresser à un escalier ayant une marche de plus.

Exercice n°6 La farandole des + et des −

5 points

On peut obtenir toutes les valeurs prises par E en faisant l'arbre suivant :



1. On peut obtenir 5 de deux manières différentes :
   $E = 1 + 2 + 3 + 4 - 5$ et $E = 1 - 2 - 3 + 4 + 5$
2. E peut prendre treize valeurs différentes :
   -13 -9 -7 -5 -3 (2) -1 1 (2) 3 5 (2) 7 9 11 et 15
3. On a $F = E \pm 6$. Pour que F puisse être égale à 12, il faudrait que E puisse atteindre la valeur 6 ou la valeur 18, ce qui n'est pas le cas.
   Donc F ne peut pas être égal à 12.

Exercice n°7 — Bien tenté

5 points

1. On applique le théorème de Pythagore pour trouver les dimensions du triangle formant l'entrée de la tente. C'est un triangle isocèle de côté 2,5 m et de hauteur 1. D'où le volume du prisme : $2,1\times 1\times\sqrt{2,5^2-1^2}\approx 4,8$.
2. De même : $2,1\times 2\times\sqrt{2,5^2-2^2}\approx 6,3$.
3. En prenant x pour hauteur de piquet, avec x compris entre 0 et 2,5, on trouve que l'aire du triangle d'entrée est donnée par $2,1x\sqrt{2,5^2-x^2}$
A l'aide de la calculatrice, par lecture graphique on détermine un maximum de cette fonction sur l'intervalle $[0\ ;\ 2,5]$.
D'où l'aire maximum pour $x\approx 1,77$. (valeur exacte $x=2,5/\sqrt{2}$)

   On peut utiliser une démonstration géométrique comme celle de l'exercice 1 :
On considère le triangle rectangle "moitié" du triangle isocèle.
La hauteur issue du pied du piquet est toujours inférieure à la médiane et la base correspondante mesure toujours 2,5 m.
Ainsi l'aire du triangle rectangle est maximum lorsque la hauteur coïncide avec la médiane, c'est à dire lorsque le triangle est rectangle isocèle.
En utilisant le théorème de Pythagore, on obtient ainsi : $2x^2=2,5^2$, ce qui donne la réponse.

Exercice n°8 — Jeu, sets et maths ...

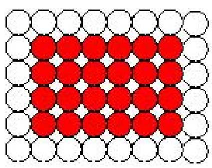
8 points

Posons x le nombre de cercles sur la longueur et y le nombre de cercles sur la largeur ($x\geqslant y$).
Le nombre total de cercles est xy.
Le nombre de cercles blancs est $2x+2y-4$.
Le nombre de cercles rouges est égal à $\frac{1}{2}xy$.
On cherche à résoudre l'équation $\frac{1}{2}xy=2x+2y-4$, soit $xy=4x+4y-8$.

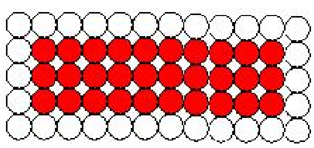
Méthode experte :
$4x+4y-8=xy \iff (x-4)(y-4)=8$
Il y a quatre chemins pour écrire 8 comme produit de deux entiers : 4×2 et 8×1 qui correspondent aux solutions : les couples $(x\ ;\ y)$ sont $(8\ ;\ 6)$ et $(12\ ;\ 5)$.

Autre méthode :
$4x+4y-8=xy \iff y=\frac{8}{x-4}+4$.
En utilisant le tableur de la calculatrice, on obtient le tableau ci-contre.

x	y
1	1.33
2	0
3	−4
4	ERROR
5	12
6	8
7	6.67
8	**6**
9	5.6
10	5.33
11	5.14
12	**5**
13	4.89
14	4.8



8×6



12×5