

Rallye mathématique du Centre et du Congo

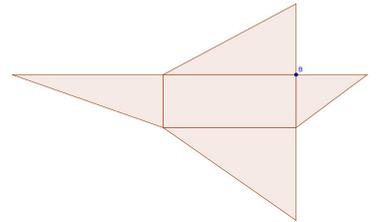
Éléments de correction de l'épreuve officielle 2013

Exercice n°1

A la pêche au moule

8 points

- Le patron du moule ne peut avoir que la configuration ci-contre (on a positionné deux angles droits au point B) :
Les calculs des longueurs des cotés se font de proche en proche par application du théorème de Pythagore.

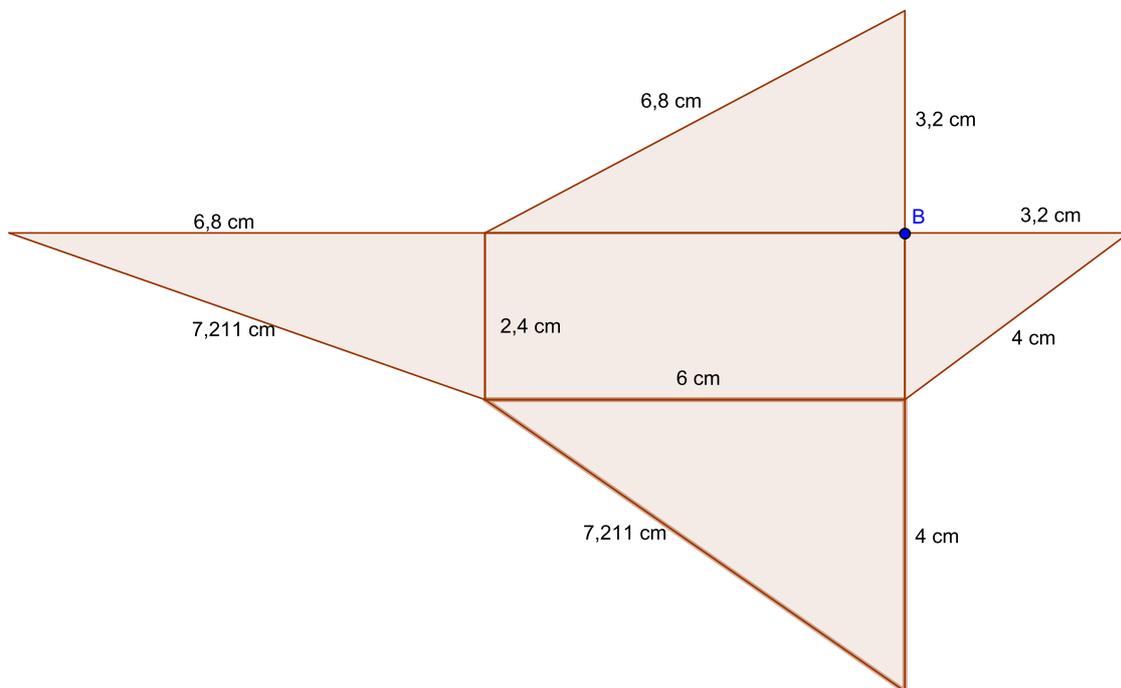


- On a ainsi la longueur de la tige supplémentaire : $\sqrt{52}$ cm (soit environ 7,2 cm).
- Le volume d'un moule est donné par :

$$V = \frac{1}{3} (6 \times 2,4 \times 3,2) = 15,36 \text{ cm}^3$$

soit 15,36 mL.

Pour 100 moules, cela donne 1536 mL



Exercice n°2**A côté de la plaque****5 points**

- De CA001 à CA999, il y a 999 numéros d'immatriculation.
De même, de CB 001 à CB 999, il y a 999 numéros d'immatriculation...
De A à J, il y a 10 lettres différentes, donc de CA0001 à CJ999, il y a 10×999 numéros d'immatriculation, c'est-à-dire 9990.
De CK001 à CK854, il y a 854 numéros d'immatriculation.
 $9990 + 854 = 10844$ Il y a 10844 numéros d'immatriculation commençant par C.

2.

Numéros de plaque	Nombre de plaque comportant le chiffre 7
De CA001 à CA069	7 (une par dizaine)
De CA070 à CA079	10
De CA080 à CA099	2
De CA001 à CA099	19 (en sommant ce qui précède)
De CA001 à CA699	133 (19 par centaine et 7 centaines)
De CA700 à CA799	100
De CA800 à CA999	38 (19 par centaine et 2 centaines)
Donc de CA001 à CA999	$133 + 100 + 38 = 271$
De CA001 à CJ999	2710 (De A à J, il y a 10 lettres et pour chaque lettre 271 numéros comportant un 7)
De CK001 à CK854	$7 \times 19 + 100 + 5 = 238$

$$2710 + 238 = 2948$$

Il y a 2948 véhicules dont le numéro de plaque commence par C et comporte le chiffre 7.

- De 001 à 999, les palindromes comportant le chiffre 7 sont : 070 ; 171 ; 272 ; 373 ; 474 ; 575 ; 676 ; 707 ; 717 ; 727 ; 737 ; 747 ; 757 ; 767 ; 777 ; 787 ; 797 ; 878 ; 979. Ils sont au nombre de 19.
De A à J, il y a 10 lettres donc de CA001 à CJ999, il y a 190 numéros de plaque vérifiant toutes conditions données.
De CK001 à CK854, les palindromes comportant le chiffre 7 sont : 070 ; 171 ; 272 ; 373 ; 474 ; 575 ; 676 ; 707 ; 717 ; 727 ; 737 ; 747 ; 757 ; 767 ; 777 ; 787 ; 797. Ils sont au nombre de 17.
 $190 + 17 = 207$. Il y a 207 véhicules dont le numéro de plaque commence par C et dont la partie numérique est palindromique et comporte le chiffre 7.

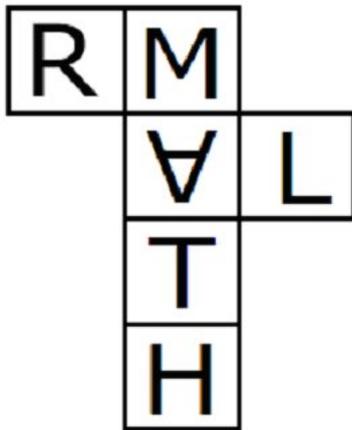
Exercice n°3**Ce n'est pas du cinéma!****5 points**

A ce jour, les formules les plus courtes possibles sont :

$$28 = (1 + 2 \times 3) \times 4$$

$$468 = (1 \times 2 + 3^4 - 5) \times 6$$

$$2013 = 1 + 2 \times (3 + 4^5 - 6 - 7 - 8)$$

Exercice n°4**Les trois vues du cube****5 points****Exercice n°5****Jeu du Potkimonte****8 points**

1. Compléter ce tableau jusqu'au niveau 20.

niveau	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
PV	1	3	0	4	9	3	10	2	11	1	12	0	13	27	12	28	11	29	10	30

2. Combien a-t-il de PV au niveau 39?
Au niveau 39, on aura 0 PV .
3. Que remarque-t-on aux niveaux 3, 12 et 39? A quel niveau suivant cela se reproduit-il?
A ces niveaux on obtient toujours 0.

On remarque que si $PV_n = 0$ alors $PV_{n+1} = n + 1$ et $PV_{n+3} = n$; $PV_{3n+3} = 0$

$$PV_3 = PV_{3 \times (3)+3} = PV_{12}$$

$$PV_{3 \times (12)+3} = PV_{39} = 0$$

$$PV_{3 \times (39)+3} = PV_{120} = 0$$

$$PV_{3 \times (120)+3} = PV_{363} = 0$$

$$PV_{3 \times (363)+3} = PV_{1992} = 0$$

4. Au 2009e niveau, le personnage a 635 PV .

$$PV_{2008} = 2644 \quad (2008 + 635 = 2644)$$

$$PV_{2010} = 2645$$

2008	2009	2010	2011	2012	2013
2644	635	2645	634	2646	633

Exercice n°6**In the pocket****5 points**

La largeur de l'enveloppe doit être supérieure à la somme de la largeur du livre et de son épaisseur.

La hauteur de l'enveloppe doit être supérieure à la somme de la longueur du livre et de la moitié de son épaisseur.

Les dimensions minimales de l'enveloppe sont donc :

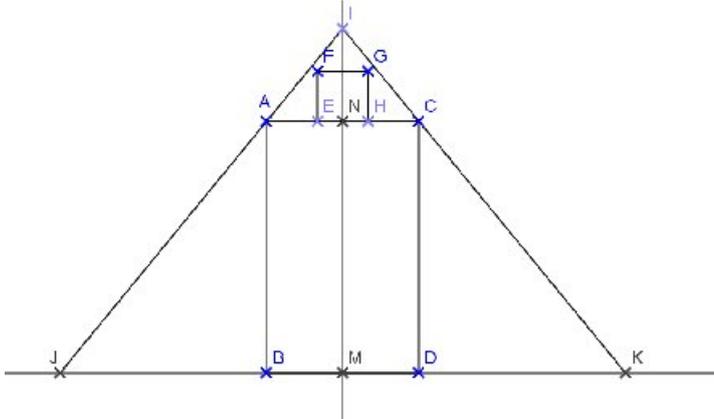
$$l = 125 + 30 = 155 \text{ mm}$$

$$h = 200 + 15 = 215 \text{ mm}$$

Ainsi, seule l'enveloppe B convient.

Exercice n°7**Un parfum de maths****8 points**

Le problème revient à chercher l'aire minimale du triangle de la base du prisme.



On pose $MK = y$ et $IN = x$ avec $y > 3$ et $x > 2$

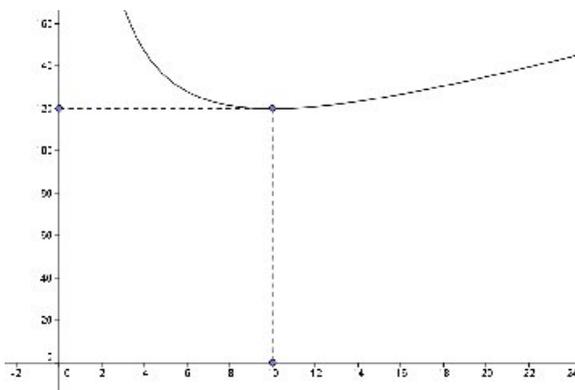
N appartient à (IN), C appartient à (IK) et (NC) est parallèle à (NK) donc d'après la propriété de Thalès :

$$\frac{IN}{IM} = \frac{NC}{MK} \text{ donc } \frac{x}{x+10} = \frac{3}{y} \text{ donc } xy = 3(x+10) \text{ donc } y = 3 + \frac{30}{x}$$

$$\text{Aire}(IJK) = \frac{JK \times IM}{2} = \frac{2y \times (10+x)}{2} = \left(3 + \frac{30}{x}\right) \times (10+x) = 60 + 3x + \frac{300}{x}$$

Il faut trouver le minimum de la fonction $f(x) = 60 + 3x + \frac{300}{x}$ en la programmant sur la calculatrice ou en utilisant GeoGebra pour $x > 2$. Le minimum est 120 et il est atteint pour $x = 10$. $f(10) = 120$.

On peut noter que dans ce cas, A est le milieu de [IJ] et C est le milieu [IK].



Donc le volume minimal du prisme est :

$$V = \text{Base} \times \text{Hauteur} = 120 \times 3 = 360$$

Le volume minimal de la boîte est 360 cm^3 .

Exercice n°8**Mais où est donc passée Argine ?****8 points**

Sur les 104 cartes du jeu, 39 ont été distribuées.
Il y a donc 65 cartes dans la pioche.

1. Quelle est la probabilité que Judith tire une carte lui permettant de faire un carré ?

Cartes favorables			3 cartes sur 65 sont possibles donc :
Cartes disponibles	1	2	

2. Quelle est la probabilité que Rachel tire une carte lui permettant de faire une tierce ?

Cartes favorables							7 cartes sur 65 sont possibles donc :
Cartes disponibles	1	2	1	0	1	2	

3. Quelle est la probabilité que Pallas tire une carte lui permettant de faire une quinte ?

Cartes favorables			1 carte sur 65 sont possibles donc :
Cartes disponibles	1	0	