RALLYE MATHEMATIQUE DU CENTRE ET DU CONGO

Eléments de correction de l'épreuve préparatoire
Décembre 2011

Exercice n°1 Zoo logique

5 points

	Éléphant	Rhino	Buffle	Lion	Léopard
Aldo					1er
Bobo		3e			
Coco				2e	
Dino			4e		
Enzo	5e				

Zoo logique

L'espèce à laquelle appartient Aldo est : Léopard

L'espèce à laquelle appartient Bobo est : Rhinocéros

L'espèce à laquelle appartient Coco est : Lion

L'espèce à laquelle appartient Dino est : Buffle

L'espèce à laquelle appartient Enzo est : Éléphant

Exercice n°2 Le prix du $

5 points

FA vaut $1+6=7$; CIL vaut $3+9+12=24$ et CAFE vaut $3+1+6+5=15$.
Soit x la longueur du côté CA$
On partage le quadrilatère en deux triangles rectangles de même hypoténuse et on applique la relation de Pythagore.
On obtient successivement :

$15^2+x^2=7^2+24^2$

$x^2=49+576-225$

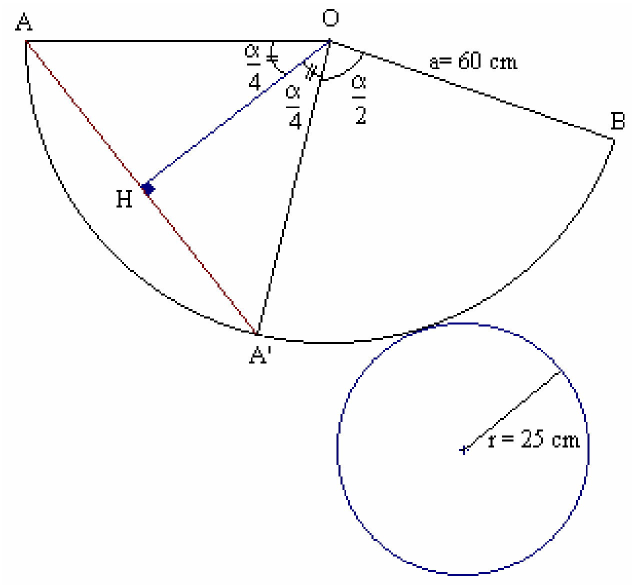
$x^2=400$

Donc $x=20$ et la lettre $ vaut 20-3-1 c'est à dire 16.

La lettre remplacée par $ est P.

Exercice n°3 — De quoi en baver !

8 points



Soit $\widehat{AOB} = \alpha = \frac{r \times 360}{a} = \frac{25 \times 360}{60} = 150°$

L'angle au sommet du patron est de 150°.

La longueur de la trace est celle du segment [AA'] tel que l'angle $\widehat{AOA'} = 75°$.

AA' = 2 x AH = 2 x sin 37,5° x 60

AA' ≈ 73,1 cm.

Exercice n°4 — Grille cartésienne

5 points

1. a) La réponse est HMSHHSATMMAATSHTMS MSHHHS HMATAHTATSHHTSHMATMS
   b) le message est : ON EST BIEN EN AUTOMNE
2. Le mot clé était : RAYON

Exercice n°5 — Joe's walk

8 points

Après avoir effectué une première suite de déplacements, Joe se trouve à l'intersection de la 35ème avenue et de la Rue H en regardant en direction du sud.

Après la deuxième séquence de déplacements, Joe est à l'angle de la 35ème avenue et de la Rue I en direction de l'ouest.

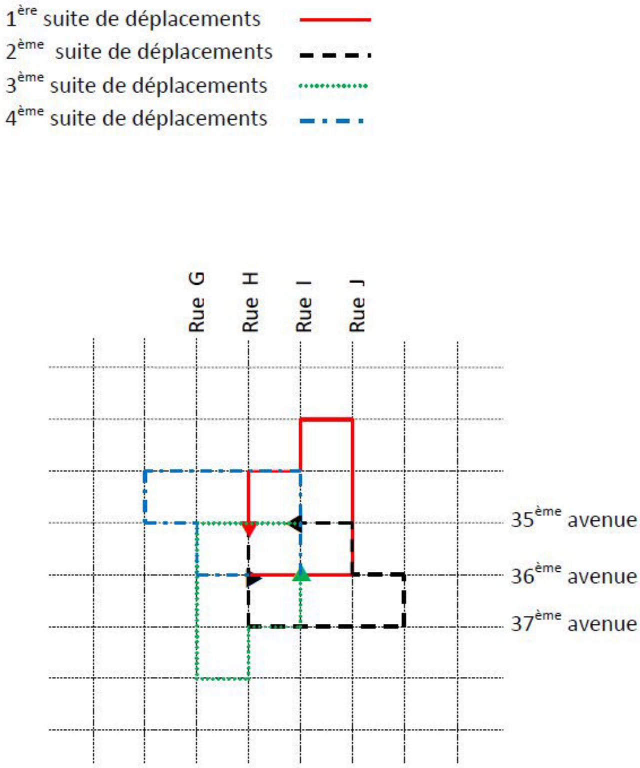
La troisième suite de déplacements amène Joe à l'intersection de la 36ème avenue et de la Rue I en direction du nord.

La quatrième suite de déplacements amène Joe à l'intersection de la 36ème avenue et de la Rue H en direction du l'est : Joe est revenu au point de départ dans la même direction.

Lorsque Joe effectue 4 suites de déplacements, il revient à la situation initiale.

Il effectue au total 2012 suites de déplacements.

2012 est un multiple de 4 car $2012 = 4 \times 503$ donc au bout des 2012 suites de déplacements, Joe est à l'intersection de la 36ème avenue et de la Rue H.



Exercice n°6 **Les bigoudis**

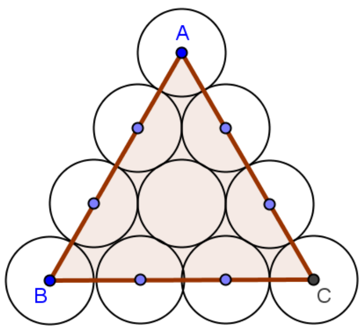
8 points

Le triangle ABC formé par les bigoudis est un triangle équilatéral dont le côté mesure 12 cm.

Sa hauteur est donc égale à $12\text{cm} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c'est-à-dire $6\sqrt{3}$ cm.

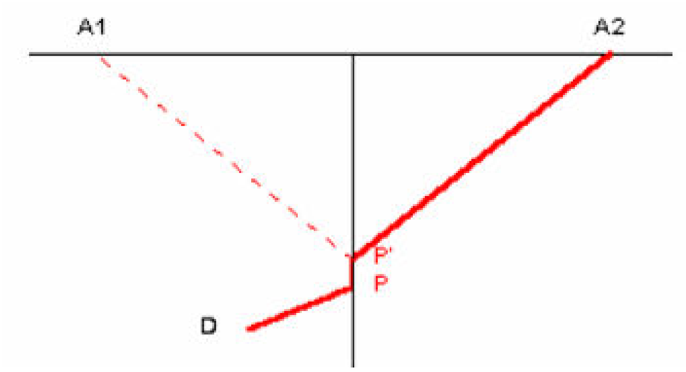
Soit h la hauteur de la pile de bigoudis.

$h = 6\sqrt{3}\text{ cm} + 2\text{ cm} + 2\text{ cm} = 6\sqrt{3}\text{ cm} + 4\text{ cm} \approx 14{,}4\text{ cm}.$



Exercice n°7 **Réfléchir avant de foncer**

8 points



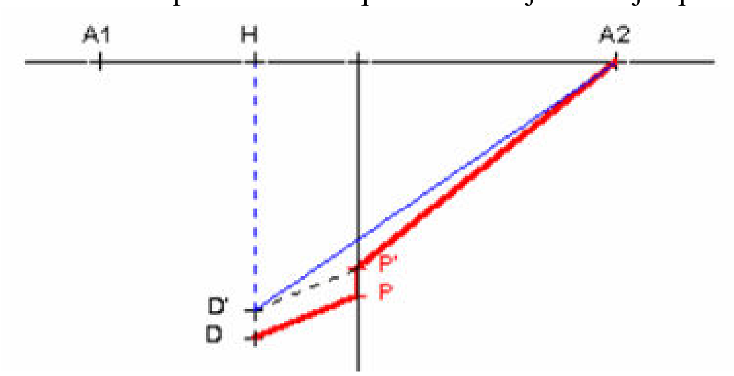
Sur la figure ci-dessus, on a représenté en rouge le trajet d'un concurrent qui a rejoint la piste en P et a parcouru 500 m sur celle-ci jusqu'en P'.

La piste cyclable représente la médiatrice du segment [A_1A_2].

A partir de P', rejoindre A_1 ou A_2 donne la même longueur de parcours.

Le choix du point d'arrivée n'influe donc pas sur la longueur du trajet.

Cherchons la position de P' qui rend le trajet de D jusqu'à A_2 le plus court possible.



Le trajet du concurrent a pour longueur : ℓ = DP + PP' + P'A_2 .

Le concurrent doit obligatoirement faire 500 m sur la piste cyclable [PP'].

Traçons le parallélogramme DD'P'P. Alors DD' = PP' = 500 (m).

Donc ℓ = 500 + D'P' + P'A_2.

Ce trajet de longueur ℓ sera minimum lorsque D', P' et A_2 seront alignés.

Dans ce cas, ℓ = 500 + D'A_2 .

La distance D'A_2 se calcule aisément avec la relation de Pythagore dans le triangle D'HA_2 .

HA_2 = 2000 + 5000 = 7000 m et HD'= 5400 – 500 = 4900 m.

On obtient D'HA_2 = 8 545 m.

Dans ce cas, ℓ = 8 545 + 500 = 9045 m (arrondi au mètre près).

Exercice n°8 **Le logo du mécène**

8 points

1. Lorsque $BM = 1$ m, on a $AM = 3,2$ m.

   La propriété de Thalès permet de trouver $MN = \frac{1}{4,2} \times 1,8 = \frac{3}{7}$ m.

   L'aire du rectangle $AMNP$ est alors $\mathcal{A} = AM \times MN = 3,2 \times \frac{3}{7} \approx 1,37$ m²

2. Lorsque $BM = 3$ m, on trouve de même $AM = 1,2$ m et $MN = \frac{3}{4,2} \times 1,8 = \frac{9}{7}$ m.

   L'aire du rectangle $AMNP$ est alors $\mathcal{A} = AM \times MN = 1,2 \times \frac{9}{7} \approx 1,54$ m².

3. En posant $BM = x$ m, on trouve $AM = 4,2 - x$ et $MN = \frac{x}{4,2} \times 1,8 = \frac{3x}{7}$ m.

   L'aire du rectangle $AMNP$ est alors $\mathcal{A}(x) = (4,2 - x) \times \frac{3x}{7} = \frac{-3x^2 + 12,6x}{7}$

   A l'aide de la calculatrice, on peut conjecturer que $\mathcal{A}(x)$ est maximum lorsque $x = 2,1$ m et $\mathcal{A}_{max} = 1,89$ m².

On peut démontrer cette conjecture :

- $\mathcal{A}(2,1) = (4,2 - 2,1) \times \frac{3 \times 2,1}{7} = 1,89$
- Pour tout $x \in [0; 4,2]$,

$$1,89 - \mathcal{A}(x) = 1,89 - \frac{-3x^2 + 12,6x}{7} = \frac{3(x^2 - 4,2x + 4,41)}{7} = \frac{3(x - 2,1)^2}{7} \geq 0.$$

Donc pour tout $x \in [0; 4,2]$, $1,89 - \mathcal{A}(x) \geq 0$, donc $1,89 \geq \mathcal{A}(x)$.

Le maximum de $\mathcal{A}$ est bien $1,89$, atteint pour $x = 2,1$.

Dans ce cas, $AM = 4,2 - x = 4,2 - 2,1 = 2,1$ m et $MN = \frac{3x}{7} = \frac{3 \times 2,1}{7} = 0,9$ m.

Conclusion : Pour que le logo ait une aire maximale, il faut que $AM = 2,1$ m et $MN = 0,9$ m.