Rallye mathématique du Centre et du Congo

Éléments de correction de l'épreuve officielle 2012

Exercice n°1 **Formez les rangs !**

5 points

•
Après 1, la plus petite solution est 36 : $36 = 6^2$ et $36 = 1 + 2 + 3 + ... + 8$.
Il y avait 36 légionnaires romains à cet entraînement.
•
$1225 = 1 + 2 + 3 + ... + 48 + 49$ et
$1225 = 35^2$

L'historien a raison 1225 hommes pouvaient se mettre en formation carrée aussi bien qu'en formation triangulaire.

Exercice n°2 **Quand Cupidon s'emmêle...**

12 points

• Calcul de OS
On calcule d'abord la longueur de la génératrice grâce à la relation de Pythagore dans le triangle rectangle OHU ou OHP.
$OU^2 = OP^2 = 30^2 + 10^2 = 1000$
$OU = OP = \sqrt{1000}\ cm \approx 31,6\ cm$
$S \in [OU]$ donc $OS = OU - US \approx 31,6\ cm - 8\ cm \approx 23,6\ cm$

• Calcul de OE
(HO) et (RE) sont parallèles, E appartient à [OP] et R appartient à [HP]
Donc d'après le théorème de Thalès

$$\frac{PE}{PO} = \frac{PR}{PH} = \frac{ER}{HO}$$

donc

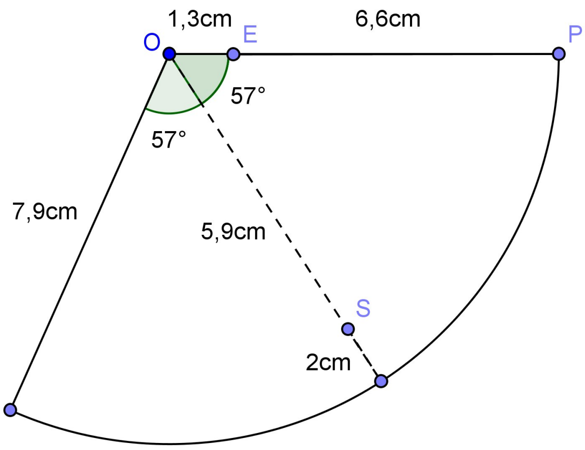
$$\frac{PE}{\sqrt{1000}} = \frac{25}{30}$$

donc $PE \approx 26,4\ cm$
$E \in [PO]$ donc $OE = OP - EP \approx 31,6\ cm - 26,4\ cm \approx 5,2\ cm$

• Réalisation du patron du chapeau
Grâce à la proportionnalité, on peut calculer l'angle α qu'il faut connaître pour réaliser le patron.

360°	α
$2 \times \pi \times \sqrt{1000}$	$2 \times \pi \times 10$

Le tableau ci-dessus est un tableau de proportionnalité donc $\alpha \approx 114^\circ$.
Toutes les longueurs nécessaires à la réalisation du patron sont déjà connues.
Il ne reste plus qu'à tracer le patron en divisant toutes les longueurs par 4.



Exercice n°3	Cinq colonnes à la une

8 points

• 2012 étant pair, il ne se situe pas dans les colonnes b et d.
Divisible par 4, 2012 est donc dans la colonne c. (ligne 503) soit $(2012/4) = 503$

Les nombres M de la colonne c se trouve sur la ligne (M)/4 $\Rightarrow$ $\boxed{\text{2012 (c ; 503)}}$

• 1002 étant pair, il ne se situe pas dans les colonnes b et d.
Non divisible par 4, il n'est donc pas dans la colonne c.
Il est donc dans la colonne a ou e.

Les nombres de la colonne a sont de la forme $2 + 8x$. $2 + 8x = 1002 \Rightarrow x = 125$	Les nombres de la colonne e sont de la forme $6 + 8x$. $6 + 8x = 1002 \Rightarrow x = 124,5$ non entier.

1002 est donc dans la colonne a (ligne 251) soit $(1002 + 2)/4 = 251$

Les nombres P de la colonne a se trouve sur la ligne $(P + 2)/4 \Rightarrow$ $\boxed{\text{1002 (a ; 251)}}$

• 747 est soit dans la colonne b soit dans la colonne d.
748 étant dans la colonne c, la conclusion n'est pas immédiate.
746 est-il dans la colonne a ? $2+8x=746 \Rightarrow x=93$ oui 746 est dans la colonne a,
donc 747 est dans la colonne b (ligne 187) soit $(747+1)/4=187$

Les nombres N de la colonne b se trouve sur la ligne $(N+1)/4 \Rightarrow$ $\boxed{747\ (\text{b} ; 187)}$
Les nombres Q de la colonne d se trouve sur la ligne $(Q+1)/4$

Exercice n°4 Le Carré de POLYBE

5 points

Le mot important du texte est SESAME On utilise donc les lettres : SEAM en premier puis l'alphabet dans l'ordre alphabétique.

	1	2	3	4	5
1	S	E	A	M	B
2	C	D	F	G	H
3	I	J	K	L	N
4	O	P	Q	R	T
5	U	V	X	Y	Z

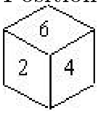
45 ⇒ O
15 ⇒ B
32 ⇒ J
12 ⇒ E
21 ⇒ C
45 ⇒ T ...

Réponse : OBJECTIF PREMIER DE LA CLASSE

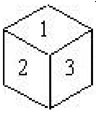
Exercice n°5 **Le dé qui roule**

8 points

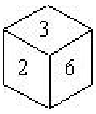
1. Position initiale



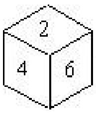
1ère étape : La face du dessus indique 6 donc on bascule le dé en direction de C deux fois. On obtient :



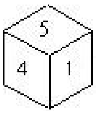
2ème étape : La face du dessus indique 1 donc on bascule le dé en direction de A une fois. On obtient :



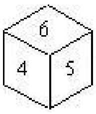
3ème étape : La face du dessus indique 3 donc on bascule le dé en direction de B une fois. On obtient :



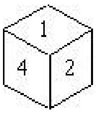
4ème étape : La face du dessus indique 2 donc on bascule le dé en direction de A deux fois. On obtient :



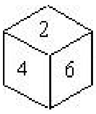
5ème étape : La face du dessus indique 5 donc on bascule le dé en direction de C une fois. On obtient :



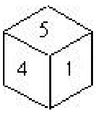
6ème étape : La face du dessus indique 6 donc on bascule le dé en direction de C deux fois. On obtient :



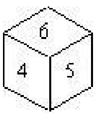
7ème étape : La face du dessus indique 1 donc on bascule le dé en direction de A une fois. On obtient :



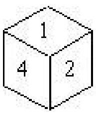
8ème étape : La face du dessus indique 2 donc on bascule le dé en direction de A deux fois. On obtient :



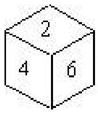
9ème étape : La face du dessus indique 5 donc on bascule le dé en direction de C une fois. On obtient :



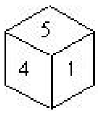
10ème étape : La face du dessus indique 6 donc on bascule le dé en direction de C deux fois. On obtient :



11ème étape : La face du dessus indique 1 donc on bascule le dé en direction de A une fois. On obtient :



12ème étape : La face du dessus indique 2 donc on bascule le dé en direction de A deux fois. On obtient :



On effectue la somme des 13 faces supérieures : $6 + 1 + 3 + 2 + 5 + 6 + 1 + 2 + 5 + 6 + 1 + 2 + 5 = 45$

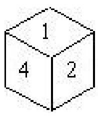
2. On s'aperçoit que la position du dé à la 7ème étape est la même que celle de la 3ème étape.
   Donc les positions des 3ème, 4ème, 5ème et 6ème étapes se répètent successivement en boucle.

   La somme des nombres indiqués sur les faces supérieures du dé en position initiale et des deux premières étapes est : $6 + 1 + 3 = 10$

   La somme des nombres indiqués sur les faces supérieures du dé lors des 3ème, 4ème, 5ème et 6ème étapes est : $2 + 5 + 6 + 1 = 14$.

   $2012 = 10 + 14 \times 143$

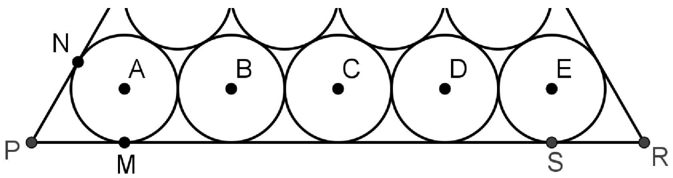
   Donc lorsque la somme des nombres indiqués sur les faces intérieures est égale à 2012, on a eu successivement la position initiale, la 1ère étape, le 2ème étape puis 143 boucles (3ème, 4ème, 5ème et 6ème étapes).
   La position du dé est alors :



Exercice n°6 Good Game !

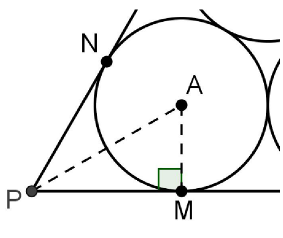
5 points

Le triangle est clairement équilatéral.



La longueur du côté du triangle est : PR = PM + AB + BC + CD + DE + SR
Les longueurs AB, BC, CD et DE correspondent à des diamètres : AB = BC = CD = DE = 57 mm.

Par symétrie, on a PM = SR.
Déterminons PM :



Le triangle en bois est équilatéral donc $\widehat{NPM} = 60^{\circ}$.
On en déduit, par symétrie, puisque (AP) est la bissectrice de $\widehat{NPM}$, que l'angle $\widehat{APM}$ mesure 30°.

Le triangle APM étant rectangle en M, on a $\tan\widehat{APM} = \frac{AM}{PM}$ d'où $PM = \frac{AM}{\tan\widehat{APM}}$

$AM = \frac{57}{2} = 28,5$ mm

Donc $PM = \frac{28,5}{\tan 30} \approx 49,4$ mm

Ainsi : $PR = 2 \times PM + 4 \times AB \approx 2 \times 49,4 + 4 \times 57 \approx 327$ mm

Exercice n°7 Au bal masqué, ohé...

5 points

	Déguisements					
Aristide	V	V	P	P	F	F
Ben	P	F	V	F	V	P
Christian	F	P	F	V	P	V

Le tableau ci-dessus donne toutes les répartitions possibles de déguisements.
Les possibilités en rouge sont exclues par les affirmations du texte. Il reste donc deux possibilités :

Aristide	Pirate
Ben	Vampire
Christian	Fantôme

Aristide	Fantôme
Ben	Vampire
Christian	Pirate

Exercice n°8 Le maître nageur

12 points

Le temps mis pour parcourir un trajet AMB, où M est un point de [HK] est donné par :
$t = \frac{1}{4}AM + MB$, exprimé en secondes, AM et MB étant exprimé en mètres.

On utilise le théorème de Thalès pour obtenir $JK = \frac{2}{3}HJ$; comme $HJ + JK = 20$ m, on obtient $HJ = 12$ m.

On utilise le théorème de Pythagore pour calculer AM et BM connaissant HM et donc MK pour tout point de [HK].

1. trajet AHB : $AH = \sqrt{AK^2 + KH^2} = \sqrt{20^2 + 6^2} = 20,8806$. Alors
$$t = \frac{1}{4}20,8806 + 9 = 14,22 \text{ s}$$
trajet AJB : $AJ = \sqrt{AK^2 + KJ^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. Alors
$$t = \frac{10}{4} + 15 = 17,5 \text{ s}$$
Il a donc raison.
2. On a $HI = 3$ m ;$AI = \sqrt{17^2 + 6^2} = 18,0278$; $IB = \sqrt{3^2 + 9^2} = 9,4868$.
Alors
$$t = 13,9938 \text{ s}$$
3. IL faut tester selon les valeurs de $x = HM$, à l'aide d'un tableur, d'une calculatrice...
On obtient que pour $x = 2$ on a $t = 13,963$ s qui est inférieur au temps mis si $M = I$. Si l'on veut poursuivre on verra que pour $x = 2,2$ on a $t = 13,961$ s qui est encore plus petit.. mais cela devient de plus en plus imperceptible !

x	AM	MB	t	
1	19,925	9,055	14,037	
2	18,974	9,220	13,963	
3	18,028	9,487	13,994	
4	17,088	9,849	14,121	
5	16,155	10,296	14,335	
6	15,232	10,817	14,625	
7	14,318	11,402	14,981	
8	13,416	12,042	15,396	
9	12,530	12,728	15,860	
10	11,662	13,454	16,369	
11	10,817	14,213	16,917	
12	10,000	15,000	17,500	
13	9,220	15,811	18,116	
14	8,485	16,643	18,765	
15	7,810	17,493	19,445	
16	7,211	18,358	20,160	
17	6,708	19,235	20,912	
18	6,325	20,125	21,706	
2	18,974	9,220	13,9630	
2,1	18,879	9,242	13,9615	
2,2	18,784	9,265	13,9610	$\longleftarrow$ temps le plus court
2,3	18,689	9,289	13,9616	
2,4	18,595	9,315	13,9632	
2,5	18,500	9,341	13,9658	
2,6	18,405	9,368	13,9694	
2,7	18,311	9,396	13,9740	
2,8	18,216	9,425	13,9796	
2,9	18,122	9,456	13,9862	